வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(பகுதி 1)

தி. கோவிந்தராசன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—482

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(பகுதி 1)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்
தி. கோவிந்தராசன், எம்.ஏ., எல்.டி.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
அரசினர் கலைக் கல்லூரி, சேலம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—August, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 482

DIFFERENTIAL EQUATIONS (Vol. I)

T. GOVINDARAJAN

Price Rs. **5-15**

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
Kabeer Printing Works,
Madras-600005.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்மூன் றாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறி வியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர் களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற் கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரி யர்கள் கலை,' அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்று விப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் 'பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதி யியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றுன 'வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (பகுதி 1)' என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 482ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 517 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர் களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

தோற்றுவாய்
(Introduction)

1–1. முன்னுரை

இயற் கணிதத்திலும் நுண் கணிதத்திலும் $y = F(x)$ என்பது போன்ற சார்புகளைப்பற்றி நாம் பல கோணங்களில் பார்த்திருக்கின்றோம். இச் சார்பை $\phi(x,y) = 0$ என்ற வகையிலும் எழுதலாமென நமக்குத் தெரியும். $\phi(x,y) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் சில மாறிலிகள் தோன்றக்கூடும் ; அப்படிப்பட்ட மாறிலி ஒன்று a எனக் கொள்வோம். இச் சமன்பாடு கொண்டு, yஇன் மதிப்பை xஇன் சார்பாக நாம் கண்டால், yஇன் மதிப்பில் aஉம் தொடர்பு கொண்டிருக்கும். (எ.கா. : $x^3+y^3 = 3axy$). இப்போது aக்கு வெவ்வேறு மதிப்புக் கொடுப்போமானால், அந்தந்த aக்குரிய ஒரு yமதிப்பு பெறப்படும். எனவே yக்கு aஉடனும் தொடர்புண்டு என்பதை நாம் ஏற்கும்போது, மேற்கூறிய சமன்பாட்டை

$$\phi\ (x,\ y,\ a) = 0 \qquad \text{......(1)}$$

என எழுதுவதும் ஏற்புடையதாகும். இந்தச் சமன்பாடு (1) கொண்டு, aக்கு உரிய மதிப்புக்குப் பொருத்தமான yஐக் காண மற்றோர் சமன்பாடும் பெறலாம். (1)இல், இரு பக்கங்களுக்கும் xஒட்டிய முழு வகைக்கெழு காண்போமானால்

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\ \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{......(2)}$$

இங்கு மரபுப்படி $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$உம் $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$உம் முறையே ϕ என்ற சார்புக்கு x ஒட்டிய, y ஒட்டிய பகுப்பு வகைக்கெழுக்களாகும்.

இப்போது (1), (2) என்ற இரு சமன்பாடுகளுக்கு மிடையே a என்ற மாறிலியை நீக்குவோமாஞல், நமக்கு

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots(3)$$

என்ற ஒரு சமன்பாடு கிடைக்கும். இப்போது f என்ற சார்பமைப்பு ϕ என்ற சார்பமைப்பைப் பொருத்தேயிருக்கும். சமன்பாடு (1) வழியாகப் பெறக்கூடிய எல்லா y மதிப்புகளையும் சமன்பாடு (3) தன்னகத்தே தாங்கி நிற்கிறது. மேலும் நாம் (1), (2) என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே கொண்டு (3)ஐப் பெறும் காரணத்தால் $\phi(x,y,a) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் aக்குப் பதிலாக b அல்லது c அல்லது எந்த ஒரு மாறிலி இராசி இருப்பினும் aஇன் எந்த மதிப்புக்கும் (3) பொருந்தும்; ஏனெனில் அம்மாறிலியை அறவே விலக்கிவிடுகிருேம்; படிப்படியாக விலக்கும் முறையும் மாருதிருக்கும் எனக் கண்டுகொள்க.

எடுத்துக்காட்டு: $x^3+y^3 = 3axy$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வகைக்கெழு காண

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கப்பெறும். எனவே

$$\frac{x^3+y^3}{3\left(x^2+y^2\dfrac{dy}{dx}\right)} = \frac{3axy}{3a\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)}$$

aஐ நீக்க

$$\frac{x^3+y^3}{3\left(x^2+y^2\dfrac{dy}{dx}\right)} = \frac{xy}{y+x\dfrac{dy}{dx}}$$

அதாவது

$$(x^3+y^3)\left(y+x\frac{dy}{dx}\right) = 3xy\left(x^2+y^2\frac{dy}{dx}\right)$$

இதைச் சுருக்கி இடம் மாற்றி எழுதிஞல்

$$x\frac{dy}{dx}(x^3-2y^3)+y(y^3-2x^3)=0 \qquad \ldots\ldots(\mathrm{I})$$

என்ற a தொடர்பற்ற சமன்பாடு கிட்டுவதைக் காண்க.

மேலே கூறியபடி, aக்குப் பதிலாக b, c, d,...என்ற எந்த மாறிலி இருப்பினும், அதை விலக்கும் முறையும் ஒன்றே, விலக்கிப் பெறப்படும் சமன்பாடும் ஒன்றேயெனக் காணலாம்.

இவ்வாறே $\Psi(x, y, a, b)=0$ என்ற வகையில் yஇன் மதிப்பு, a, b என்ற இரண்டு வெவ்வேறு மாறிலிகளோடு தொடர்பு பெற்றிருப்பின், பின் வரும் முறைப்படி, a, b என்ற இரு மாறிலிகளும் விலக்கப் பட்ட ஒரு சமன்பாட்டினைப் பெறலாம்.

$$\Psi(x, y, a, b)=0 \qquad \ldots\ldots(4)$$

(4)இல் இரு முறை, ஒன்றன் பின் ஒன்றாக Ψஇன் xஒட்டிய முழு வகைக் கெழு காணில்

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad \ldots\ldots(5)$$

எனவும்,

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{2\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad \ldots\ldots(6)$$

எனவும் இரு சமன்பாடுகள் பெறப்படும். (4), (5), (6) என்ற மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து a, b இரண்டையும் விலக்கினால்

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \qquad \ldots\ldots(7)$$

என்று a, b இரண்டும் நீங்கியதோர் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு : $xy=ae^x+be^{-x}$ ......(A)

எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. தொடர்ச்சியாக xஒட்டிய வகைக் கெழு காணின்

$$y+x\frac{dy}{dx}=ae^x-be^{-x} \qquad \ldots\ldots(B)$$

$$\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=ae^x+be^{-x} \qquad \ldots\ldots(C)$$

(A), (B), (C) என்ற மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும் இங்கு மிக எளிதில் a, b இரண்டையும் நீக்கலாம். (A)இன் வலக் கைப்புறமும் (C)இன் வலக்கைப் புறமும் ஒன்றே. எனவே

$$xy=x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx} \qquad \ldots\ldots(D)$$

என்ற சமன்பாடு பெறப்படுகிறது. a, b இரண்டிற்கும் எந்த மதிப்பும் கொடுத்து yஐப் பெற்றால் அந்த yஆனது (D)இல் அடங்கியுள்ளது.

இந்த முறையைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்தினால்

$$H(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n)=0 \qquad \ldots\ldots(8)$$

என்ற சமன்பாட்டிலுள்ள $a_1, a_2, \ldots, a_n$ எனப்படும் n மாறிலிகளையும் நீக்கிய ஒரு சமன்பாடு

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots(9)$$

என்ற அமைப்பில் பெறக்கூடும்.

குறிப்பு : இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $u(x, y) = a$ என இருப்பின், அதாவது முற்றிலும் x, yஆல் மட்டுமே அமைந்த $u(x, y)$ என்ற சார்பு ஒரு மாறிலிக்குச் சமம் என்றிருப்பின்,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots\ldots(10)$$

என்ற சமன்பாடு a நீங்கலாகப் பெறப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு : $x^2 + y^2 = a^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால், வகைக்கெழு காண

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

அல்லது

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots\ldots(E)$$

என்ற aஇன் சார்பற்ற, சமன்பாடு நேரடியாகவே கிடைக்கப் பெறுகிறது. aக்குரிய எல்லா மதிப்புகளுக்கும் (E) என்ற சமன்பாடு ஒரு வட்ட இனத்தைத் தருகிறது; ஆய ஆதி மையமாக, எந்த ஆரமுடையதாயினும் அக்குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

எனவாகின்றது.

1–2. முன் பத்தியில் (3), (7), (9), (10) என்ற பொது அமைப்பில் உள்ளவை யாவும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் எனப்படும்; குறிப்பாக (I), (D), (E) என்பவையும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும்.

(I) குறிக்கும் சமன்பாடு $x^3 + y^3 = 3axy$ என்ற குடும்பத்தையும்,

(D) குறிக்கும் சமன்பாடு $xy = ae^x + be^{-x}$ என்ற குடும்பத்தையும்,

(E) குறிக்கும் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற குடும்பத்தையும் பொதுப்படக் குறித்து நிற்பனவாம்; இங்கு a, b எம்மதிப்புகளேனும் ஏற்கலாம்.

(1) என்பது (3)ன் *தீர்வு* ;

(4) என்பது (7)ன் *தீர்வு* ;

(8) என்பது (9)ன் *தீர்வு* ;

எனப்படும். அதாவது ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காணுதல் எனில் அச்சமன்பாடு எந்த முதற் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைத்ததோ அம்முதற் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிப்பதாகும்; அதாவது தீர்வில் வகைக்கெழுக்கள் தோன்ருமல் மாறிகளுக்கிடைப்பட்ட தொடர்பு மட்டுமே பெறப்படும்.

1–3. (1) இலிருந்து (3)ஐக் காணும்போது ஒரு மாறிலி விலக்கப் பட்டது; மறுதலையாக (3)இலிருந்து (1)ஐக் காண்போமாளுல், தீர்வில் ஒரு மாறிலி நுழையும் என்று எதிர்பார்க்கலாமல்லவா? அதேமாதிரியாக, n மாறிலிகள் உள்ள ஒரு சமன்பாடு கொண்டு nவது வகைக்கெழு வரையில் கண்டு, கொடுக்கப்பட்ட முதற் சமன்பாட்டையும் மேலும் வகைக்கெழுக்கள் உள்ள n சமன்பாடுகளையும் கொண்டு, n மாறி லிகளை நீக்கி ஒரு n வரிசைச் சமன்பாட்டைப் பெறுவது போல, ஒரு nவரிசைச் சமன்பாட்டிலிருந்து அதன் முதற் சமன்பாட்டுக்கு அல்லது வகைக்கெழுக்கள் நீங்கிய தீர்வுக்குச் செல்லும்போது முறையாக n மாறிலிகள் தீர்வில் நுழைவதை நாம் எதிர்பார்க்க வேண்டுமல்லவா?

எப்படி இம்மாறிலிகள் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளில் நுழைகின்றன என்பதை நாம் எளிதில் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக $\phi(x, y, a)=0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து aஐ நீக்கிய பின் கிடைக்கப் பெறும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$M\frac{dy}{dx}+N=0$$

என்று கொள்வோம். M, N இரண்டும் x, y என்ற மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகள். இயற்கணித முறைப்படி $\phi(x, y, a)=0$ என்பது ஒரு வளைவரைக்குரிய சமன்பாடு; வகை நுண் கணிதப்படி, $\frac{dy}{dx}$ என்பது அவ் வளைவரைக்கு $P(x, y)$ என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடு வரையின் சரிவு (**gradient = tan**Ψ). $M\frac{dy}{dx}+N=0$ என்பதற்கொப்ப $\frac{dy}{dx}=\frac{-N}{M}$;

இப்போது yஅச்சின்மேல் $A(0, y_0)$ என்ற ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். $(0, y_0)$ என்ற மதிப்புகளை $\frac{-N}{M}$-இல் ஈடுசெய்தால் நமக்குக் கிடைக்கும் மதிப்பே $A(0, y_0)$இல் அவ்வளைவரையின் சரிவு;

எனவே அந்தச் சரிவுடைய ஒரு கோடு $(0, y_0)$இல் வரைந்து, மிகச் சிறிதுதூரம் அக்கோட்டின் மேற் செல்வோம் ; அடுத்த புள்ளி $B(x_1, y_1)$க் குரிய மதிப்புகளை $\frac{-N}{M}$ இல் ஈடுசெய்தால், நமக்கு மற்றொரு மதிப்புக் கிடைக்கும் ; அம் மதிப்பே $B(x_1, y_1)$இல் அவ் வளைவரையின் சரிவு ; அச் சரிவுடைய ஒரு கோடு (x_1, y_1) இல் வரை. இவ்வாருக அடுத்தடுத்த புள்ளிகளில் கோடுகள் வரைந்து, சிறிது சிறிது தூரமாகச் செல்லலாம். நாம் ஒவ்வொரு முறையும் செல்லும் தூரம் மிக நுண்ணிதாக ஆக, நமக்கு ஒரு வளைவரை கிடைக்கும். அவ் வளைவரையின் சமன்பாடு,

$$M\frac{dy}{dx}+N = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாக அமையும். அவ் வளைவரைக்குரிய ஒரு திட்டமான சமன்பாடு y_0ஐச் சார்ந்ததாய்,

$$F(x, y, y_0) = 0$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும் ; y_0 என்பது Aஇன் y ஆயத் தொலை தூர மாகும். Aக்குப் பதிலாக $A_1\ (0, y_1)$ என்ற மற்றொரு புள்ளியை y அச்சின் மேல் எடுத்துக்கொண்டு முன்கூறியபடி வளைவரை வரையக் கூடுமல்லவா? அவ் வளைவரைக்குரிய ஒரு திட்டமான சமன்பாடு y_1ஐச் சார்ந்ததாய்

$$F(x, y, y_1) = 0$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும். இதேபோல் $A_2\ (0, y_2)$, $A_3\ (0, y_3)$,...... என yஅச்சின் மேல் வெவ்வேறு புள்ளிகள் எடுத்து, $M\frac{dy}{dx}+N=0$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரியாக்கும் வகையில் எண்ணற்ற வளைவரைகள் வரையலாம். அவை $F(x, y, y_2) = 0$, $F(x, y, y_3) = 0$ என்ற வகையில் ஒரு, ஒரே ஒரு மாறிலியை ஏற்று நிற்கும். அவ் வளைவரை களெல்லாம் $M\frac{dy}{dx}+N = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் பல்வேறு தீர்வு களாகும் ; ஏனெனில் அவை அச் சமன்பாடான

$$M\frac{dy}{dx}+N = 0$$

என்ற அடிப்படையில் பெறப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு புள்ளி வழியாகச் சாதாரணமாக ஒரே ஒரு வளைவரைதான் செல்லும். எனவே $M\frac{dy}{dx}+N = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வில் ஒரு மாறிலி நுழைந்து நிற்கும். ஆனால் வளைவரையும், yஅச்சும் வெட்டுமிடத்திற்குரிய y ஆயத் தொலையானது அம்மாறிலியாயிருக்கும் எனக் கூற முடியாது.

1–3·1. இதுவரை நாம் ஏற்று ஆய்ந்த சமன்பாட்டில் $\dfrac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு ஒரு குறிப்பிட்ட (x, y)க்கு ஒரே ஒரு திட்டமான மதிப்பு அதாவது $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-N}{M}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொண்டால்

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

என்பதாகும். அதாவது XOY தளத்தில், உரிய x, y அச்சுகள் கொண்டு, புள்ளிகளை இடங் குறிப்போமானுல், (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில்

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x_1}{y_1};$$

$(x_1+\Delta x_1, y_1+\Delta y_1)$ என்ற புள்ளியில்

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(x_1+\Delta x_1)}{y_1+\Delta y_1}$$

என ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒரே ஒரு $\dfrac{dy}{dx}$ மதிப்புப் பெறப்படும்; ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட $\dfrac{dy}{dx}$ மதிப்புப் பெறப்படாது. அதாவது எடுத்துக் காட்டாக (2, 3) என்ற புள்ளியில்

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}$$

1–3·2. அடுத்தபடியாக, வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+M\frac{dy}{dx}+N=0$$

எனவிருப்பின், கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y மதிப்புகளுக்கு $\dfrac{dy}{dx}$ இருமதிப்புகளை உடையது. இவ் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$C^2+CP+Q=0$$

(P, Q என்பவை x, yஆல் ஆன சார்புகள்; C என்பது ஒரு மாறிலி) என்ற வகையில் பெறப்படும். மாறிலி இரண்டாம் படியில் தோன்றக் காரணம் கண்டுகொள்க. இதைப் போல்

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^r+M_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{r-1}+\dots\dots+M_r=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$C^r+P_1C^{r-1}+\dots\dots+P_r=0$$

(P_1, P_2,..., P_r யாவும் x, yஆல் ஆன சார்புகள் ; C ஒரு மாறிலி). மாறிலி rஆம் படியில் தோன்றுவதற்குக் காரணம் கண்டுகொள்க.

எடுத்துக்காட்டு 1 : $y^2 = 4ax$ என்பது **4a** அலகு செவ்வகலமுள்ள ஒரு பரவளையம். ஒவ்வொரு **a** மதிப்பிற்கும் ஒவ்வொரு பரவளையம் இருக்கும். இப்போது xஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காணின்

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

எனவே $y^2 = 2y\ \dfrac{dy}{dx}x$

அதாவது $y = 2x\dfrac{dy}{dx}$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கிட்டும். அதாவது a எந்த மாறிலியாக இருப்பினும், இப்பரவளையக் குடும்பம், $y^2 = 4ax$ என்பது,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

என்ற சமன்பாட்டால் பெறப்படுகின்றது. அதாவது

இப் பரவளையக் குடும்பத்தின் பண்பு யாதெனில், இதில் எந்தப் பரவளையத்திற்கும், எந்த ஓர் இடத்திலும் வரையப்படும் தொடு வரையின் சரிவு

$$= \frac{y}{2x} = \left[\frac{\text{அப்புள்ளியின் } y \text{ ஆயத்தொலை}}{\text{அப்புள்ளியின் இருமடங்கு } x \text{ ஆயத்தொலை}}\right].$$

எனவே $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையச் சமன்பாட்டைத் தனது தீர்வாகக் கொண்டுள்ளது ; a எந்த மெய்யெண் மதிப்பேனும் ஏற்கலாம் ; ஆனால் அதன் பொதுப்பண்பு, மேலே அடைப்புக்குள் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கும் பண்பாகும். எனவே $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு, a என்ற ஏதேனுமொரு மாறிலியைக் கொண்ட $y^2 = 4ax$ என்ற தொடர்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : $(x-a)^2 + y^2 = 4a^2$ என்ற தொடர்பை எடுத்துக் கொள்வோம். இது $(a, 0)$ மையங்கொண்டு **2a** அலகு ஆரம் கொண்டதொரு வட்டமாகும். aஇன் மதிப்பு வேறுக வேறுக, வெவ் வேறு வட்டங்கள் கிடைக்கும். ஆனால் அக்குடும்பத்தைச் சேர்ந்த வட்டங்களின் பின்வரும் பண்புகள் எல்லா **a** மதிப்புகளுக்கும் பொது வாக இருப்பதைக் காணலாம்.

தோற்றுவாய்

1. மையம் x அச்சின் மேல் உள்ளது.

2. வட்டம் x அச்சை வெட்டும் ஓரிடத்திற்கும் வட்ட மையத்திற்கும் சரியான நடுவில் ஆய ஆதி உள்ளது.

இம்மாதிரியாக எத்தனையோ வட்டங்கள் வரையலாம். இப்போது இச்சமன்பாட்டின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

$(x-a)^2 + y^2 = 4a^2$ என்பதைக் கொண்டு x ஒட்டிய வகைக் கெழு காண

$$2(x-a) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

அதாவது

$$x-a = -y \frac{dy}{dx}$$

என்ற தொடர்பைக் காணலாம். aஐ விலக்க

$$y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)^2$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

அதாவது

$$3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8xy\frac{dy}{dx} + 4x^2 - y^2 = 0.$$

இச் சமன்பாட்டில் $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ இன் இருபடி வருவதையும், இதன் தீர்வில் [முதற் சார்பான $(x-a)^2+y^2=4a^2$] a என்ற மாறிலி இருபடியில் வருவதையும் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$ax - y = a^n$$

என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்போம். x ஒட்டிய வகைக்கெழு காண

$$a - \frac{dy}{dx} = 0$$

எனக் கிடைக்கும். எனவே

$$\frac{dy}{dx} = a$$

என்ற தொடர்பைப் பயன்படுத்தி aஐ நீக்க

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n - x\frac{dy}{dx}+y=0$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு வருகின்றது. இதில் $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, n ஆவது படியில் வருவதையும் இதன் முதற் சமன்பாடான $ax-y=a^n$ இல் a, nஆம் படியில் இருப்பதையும் காண்க.

1–3·3. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல் : இயற்கணிதத்தில் (1) சாதாரணச் சமன்பாடுகள் (Simple Equations) (ஒரு தேராக் கணியம் x முதற்படியில் மட்டும் வருவது), (2) இருபடிச் சமன்பாடுகள் (Quadratic Equations, $ax^2+bx+c=0$ என்ற அமைப்பு) என இருவகையான சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் கணிக்கும் முறை நமக்குத் தெரியும். மேலும் முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகளை ($ax^3+bx^2+cx+d=0$, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$) நாம் தீர்த்து x மதிப்புகளை — அதாவது தீர்வுகளைக் — கணிக்கலாம். ஐந்துபடி, அதற்கு மேற்பட்ட படிகளிலுள்ள சமன்பாடுகள், சில திட்டமான அமைப்புகளில் இருந்தாலொழிய, அல்லது சில திட்டமான அமைப்புகளுக்கு மாற்றியமைக்க முடிந்தாலொழிய, அவற்றினைத் தீர்த்து xஇன் மதிப்பினைக் காணுதல் இயலாது. எனினும் அவ்விதச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் இல்லையென்று கூறிவிட முடியாது. பொதுவாக ஒரு n படி இயற்கணிதச் சமன்பாட்டிற்கு n தீர்வுகள், n தீர்வுகள் மட்டுமே (n and only n roots — மெய்யெண், கற்பனை எண் தீர்வுகள் உட்பட) உள்ளன என்பது நிறுவப்பட்டதோர் தேற்றமாகும். இவை பற்றி விரிவாக "சமன்பாட்டியல்" என்ற நூல்களில் விரிவாகக் காணலாம். (Burnside and Panton : Theory of Equations I & II என்பது ஒரு சிறந்த விரிவான நூல்).

மேலும் நாம் வகை நுண்கணிதத்தில் எவ்வளவு சிக்கலான சார்பு கொடுக்கப்பட்டாலும் (x சார்பில் மாறி, y சார்புடை மாறி) அதற்கு x ஒட்டிய வகைக்கெழு காணமுடியும், அதாவது $\frac{dy}{dx}$ காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $y = \frac{1}{\sqrt{\sec x-\alpha}} \times x^{\cot nx} \times \log\frac{1}{1-\sin\sqrt[3]{x}}$

என்ற சார்பிற்கு $\frac{dy}{dx}$ காணமுடியும். ஆனால் இதன் தொகை காணமுடியாது. அதாவது,

$$\int \frac{x^{\cot nx}}{\sqrt{\sec x-\alpha}} \log\left(\frac{1}{1-\sin\sqrt[3]{x}}\right)dx$$

என்பதைக் கணித்தல் இயலாது. ஆனால் ஒரு தொகை கட்டாயம் இருக்கத்தான் செய்யும். முன் குறிப்பிட்ட இடர்ப்பாடுகள் வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதிலும் ஏற்படும். கொடுக்கப்பட்ட $f(x, y) = 0$ என்ற ஒரு சமன்பாட்டிலிருந்து அதில் தோன்றும் பொது மாறிலிகளை நீக்கி அதற்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண முடியும். ஆனால் இந்த முறையில் பின்னோக்கிச் சென்று ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்பது அவ்வளவு எளிதல்ல. ஒரு வகைக் கெழுச் சமன்பாடு மட்டுமே கொடுக்கப்பட்டால், படிப்படியாக மாறிலியை நீக்கும் முறைப்படி, பின்னோக்கிச் செல்ல முடியாது; பின்னோக்கிச் செல்வதற்கு ஒருவித முறையும் சாதாரணமாக நமக்குக் கிடைக்காது. எனவே சில திட்டமான முறைகளை அறிந்துகொண்டு தான் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காணமுடியும்.

1–3·4. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல் என்பது யாதெனின், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் வகையில் xக்கும், yக்கும் உள்ள தொடர்பினைக் காணல்: அத்தொடர்பு $y = f(x)$ என்ற முறையிலோ அல்லது $f(x, y) = C$ என்ற முறையிலோ கிடைக்கலாம். அல்லது $y = \int F(x)\,dx$ அல்லது $x = \int H(y)\,dy$ அல்லது $\int \Psi(x)dx = \int \phi(y)dy$ என்ற நிலைவரை கொண்டுவந்து நிறுத்த முடியும். இதில் $\int F(x)dx$ அல்லது $\int \Psi(y)dy$ இன் தொகையை நேரடிச் சார்புகளாகக் காணமுடியாவிட்டாலும் இந்த அமைப்பில் கடைசியாக நாம் தீர்வை எழுத முடியுமானாலே போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டாக

$y = A + \int e^{-x^3} \cos^{-1}(\sqrt{x})dx$ என்ற நிலையை எய்திவிட முடியுமானாலே வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணப்பட்டதாகப் பொருள்; $\int e^{-x^3} \cos^{-1}(\sqrt{x})dx$ இன் மதிப்பை நாம் நேரடியாகக் காணவில்லையெனினும் பரவாயில்லை. மேற்கூறியவற்றில் எது நமக்குச் சாத்தியமென்றாலும் தீர்வு காணப்பட்டதென்பதே பொருள்.

1–4. வகைக்கெழுச் சமன்பாடு—வகைகள் :

இந்நிலையில் நாம் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் எவ்வெவ் வகைகளில் தோன்றும் என்பதைப் பார்ப்போம். விரிவாக, இருவகைப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் உள்ளன :

(1) சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்; (Ordinary Differential Equations)

(2) பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Partial Differential Equations)

முதற் பிரிவில் ஒரே ஒரு சார்பில் மாறிதான் இருக்கும்; வகைக் கெழுக்கள் அந்த ஒரே ஒரு சார்பில் மாறியைத்தான் ஒட்டியிருக்கும். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்புடை மாறிகள் இருப்பின், எத்தனைச் சார்புடை மாறிகள் உள்ளனவோ அத்தனை ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்ற சமன் பாடுகள் இருக்கும் (இருக்க வேண்டும்). [இயற்கணிதத்தில் ஒருங் கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகாண, இரண்டு தெராக் கணியங்கள் இருப்பின் இரு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளும், n தெராக் கணியங்கள் இருந்தால் n ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளும் காணத் தேவைப்படுவது போல].

எடுத்துக்காட்டாக

(i) $$\frac{d^2y}{dx^2}+y = 0$$

(ii) $$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+x &= t\\ \frac{d^2y}{dt^2}+y &= t\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&t \text{ சார்பில் மாறி}\\ &x, y \text{ இரண்டும் சார்புடை மாறி}\end{aligned}$$

இரண்டாம் பிரிவில் அதாவது பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு களில், ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்பில் மாறிகள் இருக்கும். குறைந்தது இரண்டு சார்பில் மாறிகளும் ஒரு சார்புடை மாறியும் இருக்கலாம். பல சார்புடை மாறிகள் இருக்குமானுல் எத்தனைச் சார்புடை மாறிகள் உள்ளனவோ அத்தனை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் தேவைப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} = y$$

2. $$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}\\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

1–4·1. வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசையும் (Order) படியும் (Degree) : ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் தோன்றும் வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே அச் சமன்பாட்டின் வரிசை எனப்படும். அம் மிக உயர்ந்த வரிசை வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த படியே அச்சமன்பாட்டின் படி எனப்படும். பின்னர் வரும் சமன் பாடுகளில் அவற்றிற்குரிய வரிசைகளும் படிகளும் காண்க.

சாதாரணமாக, வகைக்கெழுக்களின் இயற்கணித அமைப்புகளே, நாம் காணவிருக்கும் சமன்பாடுகளில் தோன்றும்.

எண்	வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	வரிசை	படி
	சாதாரணச் சமன்பாடுகள்		
1.	$\dfrac{dy}{dx} = x+y$	1	1
2.	$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \sin x+1$	1	2
3.	$\dfrac{d^n y}{dx^n}+Py = Q(x)$	n	1
4.	$\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^4+P\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^3+P_1\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^6+y=0$	3	4
5.	$y-x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$ (இது எவ்வாறு என, படி மூலங்களை நீக்கிச் சுருக்கி அறிக).	1	8
6.	$\dfrac{dx}{dt}+x = f(t)$	1	1
	$\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+y = F(t)$	1	2
	பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்		
7.	$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = u$	2	1
8.	$\left(1+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}\right)^2 = xyz$	3	2

1-4·2. ஒரு குறிப்பிட்ட சமன்பாட்டமைப்பு:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots\dots+P_n y = F(x)$$

என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட, பொது அமைப்பிலுள்ள சமன்பாடு. இது nஆம் வரிசை, முதற்படிச் சமன்பாடு; P_1, $P_2, \ldots\ldots, P_n$ என்பன xஇன் சார்புகள்; மாறிலிகளாகவும் இருக்கலாம்.

1–5. ஒருபடிக்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (Linear Differential Equation):

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் தோன்றும் படி மூலங்களையும் பின்னங்களையும் நீக்கியபின்பு, வகைக்கெழுக்களும் சார்புடை மாறிகளும் முதற்படி மட்டிலுமே தோன்றி, ஒரு வகைக்கெழு மற்றொரு வகைக்கெழுவைப் பெருக்கிவரும் உறுப்புகள் தோன்ருமல் தனித்தனி உறுப்புகள் மாறிலிகளாகவோ அல்லது சார்பில் மாறிகளின் சார்பாகவோ இருக்குமாயின் அச்சமன்பாடு ஒருபடிக்குரிய வகைக் கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும். பின்வருவன இவ்வகைப்பட்ட சமன் பாடுகள்.

1. $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^2+1$

2. $\dfrac{d^ny}{dx^n}+P_1\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_ny=F(x)$

(P_1, $P_2, \ldots\ldots, P_n$ என்பவை xஆல்மட்டும் ஆன சார்புகள்.)

3. $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$

4. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial x}-z=0$

1–5·1. வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தீர்வு: ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில், வகைக்கெழுக்களை நீக்கி, மாறிகளுக்கிடையே உள்ள மிகப் பொதுவான தொடர்பினைக் காண்பதுதான் அச்சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு (General solution) அல்லது முதற்சார்பு (the primitive) எனப்படும்.

1–5·2. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் முதற்சார்பு காணுதல்:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+P_ny=F(x)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது இதிலிருந்து கொள்கையளவில் (in theory) முதற்படியாக $(n-1)$ வரிசையிலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டைக் காணலாம். இதற்கு முதல்தொகை (first

integral) எனப்படும். அது கொண்டு $(n-2)$ வரிசையிலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டைக் காணலாம்; இதில் மொத்தம் இரண்டு பொதுமாறிலிகள் நுழையும். இவ்வாறாக, படிப்படியாக, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் வரிசைகளைக் குறைத்துக்கொண்டே வந்து, கடைசியாக

$$\Psi(x, y, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n)=0$$

என்ற முதற்சார்பைக் கண்டால், சமன்பாடு முழுவதும் தீர்க்கப்பட்டது எனக் கூறலாம். முதற்படியாக $(n-1)$ வரிசையிலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டைக் காணும்பொழுது, அது ஒன்றுக்கு மேற்பட்டமுறையில் பெறப்படலாம். எனவே அதற்கொப்ப ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அமைப்புகளில் முதல் தொகைகளும் பெறப்படலாம். ஆனால் அவையாவும் ஒன்றுக்கொன்று தனித்தனியாக, அதாவது தொடர்பற்றவையாக இருக்கும் எனக் கூறமுடியாது. சில முதல்தொகைகள் மற்றவையோடு, மாறிலிகள் வழியாகத் தொடர்புபெற்றும் இருக்கலாம். ஆனால் ஒரு n வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்கு nக்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையுள்ள ஒன்றுக்கொன்று ஏதும் தொடர்பற்ற முதல்தொகைகள் இருகக்முடியாது. [ஆங்கிலத்தில் (If the equation is of the nth order, it cannot have more than n independent first integrals) என்பதாம்.]

எடுத்துக்காட்டு: பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0.$$

இதன் முதல் தொகைகள் பின்வருவனவென்று சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=A^2$ (*)

குறிப்பு (*)

1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=A^2,$

x ஒட்டிய வகைக்கெழு காண

$$2\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}+2y\,\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=0 \text{ அல்லது } \frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். $\frac{dy}{dx}=0$ ஆனால் $y=c$ (மாறிலி) என்ற ஒரு தீர்வு கிடைக்கும். அதை விட்டுவிடலாம்.

*2. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cos x+y\sin x=B$

3. $-\dfrac{dy}{dx}\sin x+y\cos x=C$

4. $\dfrac{dy}{dx}=y\cot(x+\alpha)$

ஆனல் இவை நான்கும் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்டதுபோலத் தோன் றினும் A, B, C, α என்ற நான்கு மாறிலிகளும் $B=A\cos\alpha$, $C=A\sin\alpha$, $B^2+C^2=A^2$ என்ற தொடர்புகளால் பிணைக்கப்பட்டிருப் பதைக் காணலாம்.

இவ்வாறாக 1–5·2இலுள்ள சமன்பாட்டிற்கு, தொடர்பற்ற n முதல் தொகைகள் கண்டுகொண்டால், அவற்றினை ஒருங்கமைச் சமன்பாடு களாகக் கொண்டு, வகைக்கெழுக்களை விலக்கி முதற் சார்பினைக் காண இயலும். எடுத்துக்காட்டாக

$$\frac{dy}{dx}\cos x+y\sin x=B$$

$$-\frac{dy}{dx}\sin x+y\cos x=C$$

என்ற இரண்டிலிருந்தும் $\dfrac{dy}{dx}$ஐ நீக்க

$$y\sin^2 x+y\cos^2 x=B\sin x+C\sin x$$

அல்லது

$$y = B\sin x+C\sin x$$

என்பதனை மேற் கூறிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் முதற் சார் பென்று காணலாம். மற்றும்

---

*2. $\dfrac{dy}{dx}\cos x+y\sin x=B$

x ஒட்டிய வகைக்கெழு காணின்

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cos x-\frac{dy}{dx}\sin x+\frac{dy}{dx}\sin x+y\cos x=0$$

$$\therefore\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}+y\right)\cos x=0$$

$\cos x=0$, என்பது $x=\dfrac{\pi}{2}$ என்ற ஒரு தீர்வைத் தரும். எனவே அதை விட்டு விடலாம். இவ்வாறே (3)ஐயும், (4)ஐயும் சரிபார்த்துக் கொள்க.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = A^2$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cot (x+\alpha)$$

என்ற இரண்டையும் கொண்டு, $\frac{dy}{dx}$ஐ நீக்க

$$y^2 \cot^2 (x+\alpha) + y^2 = A^2$$

அல்லது

$$y = A \sin (x+\alpha)$$

என்ற முதற் சார்பினைக் காணலாம். $B \sin x + C \sin x$ஐ $A \sin (x+\alpha)$ என்ற அமைப்பில் மாற்றலாம் எனக் கண்டு கொள்க.

1-5·3. n வரிசை பெற்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு nக்கு மேற்பட்ட ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்ற முதல் தொகைகள் இருக்க முடியாது.

இதன் தெரிப்பு இந்நூல் திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டதாகையின், நாம் இங்கு இதைச் சேர்க்கவில்லை. ஆனால் இதன் உண்மையை ஏற்றுக் கொள்வோம்.

1-5·4. மேலும் பின்வரும் உண்மையும் பல இடங்களில் பயன்படுமாதலின், அதனையும் தெரிப்பின்றி ஏற்றுக்கொள்வோம்.

தேற்றம் : X, Y என்பவை, x, y என்ற இரு சார்பில் மாறிகளின் சார்புகளெனக் கொள்வோம். அதாவது

$$X = F_1(x, y)$$

$$Y = F_2(x, y)$$

இங்கு Xஐ, Yஇன் சார்பாகவோ, அல்லது Yஐ Xஇன் சார்பாகவோ கொடுக்க முடியுமானால்

$$\frac{\partial X}{\partial x} \; \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \; \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \ldots\ldots (M)$$

என்பது உண்மையாகும். மறுதலையாக மேற்கூறிய தொடர்பு (M) X, Y என்ற இரு தொடர்புகளுக்குப் பொருந்துமாயின்

$$X = \Psi_1(Y) \text{ என்றோ}$$

$$Y = \Psi_2(X) \text{ என்றோ}$$

காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$$X = x^2+y^2 \text{ எனவும்}$$
$$Y = \sin(x^2+y^2)+\sqrt{x^2+y^2} \text{ எனவும்}$$

கொள்வோம்.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial X}{\partial y} = 2y;$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2)+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

எனவே

$$\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}$$
$$= 4xy\cos(x^2+y^2)+\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$-4xy\cos(x^2+y^2)-\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$= 0$ எனப் பெறப்படுகிறது.

இந்நிலையில்

$$Y = \sin X + \sqrt{X}$$

எனவும், மறுதலையும் உண்மையாவதைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$$X = x^2+y^2-1$$
$$Y = x\cos\alpha + y\sin\alpha-1$$

இரண்டும் $X = F_1(Y)$ அல்லது $Y = F_2(X)$ என்ற தொடர்புடையனவா எனக் காண்க.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2x;\quad \frac{\partial X}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \cos\alpha;\quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \sin\alpha$$
$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}$$
$$= 2x\sin\alpha-2y\cos\alpha$$
$$\neq 0$$

எனவே எவ்விதத் தொடர்புமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$X = x^2+y$$
$$Y = x^4+x^2(2y+1)+y^2+y+1$$

எனில் X, Y இரண்டும் தொடர்புடையனவா எனக் காண்க.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2x \; ; \; \frac{\partial X}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 4x^3+2x(2y+1)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 2x^2+2y+1$$

எனவே

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}$$
$$= 2x(2x^2+2y+1)-1(4x^3+4xy+2x)$$
$$= 4x^3+4xy+2x-(4x^3+4xy+2x) = 0$$

எனவே X, Y இரண்டும் தொடர்புடையன. அத்தொடர்பு

$$Y = x^2+x+1$$

எனக் காண்க.

பயிற்சி 1

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் படி, வரிசைகளை எழுதுக.

	விடை வரிசை	படி
1. $\frac{dy}{dx}+(xy-\sin x)=0$	1	1
2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dx}+y=0$	1	2
3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 4y^2$	2	2
4. $\frac{d^2v}{dx^2}\cdot\frac{dv}{dx}+x\left(\frac{dv}{dx}\right)^3+v=0$	2	1
5. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^n+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2n}+xy=0$	3	n

6. $\sqrt{r+\dfrac{dr}{d\theta}} = \sin\theta$ 1 1

7. $p = \dfrac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$ ஆனால்

$p+y\dfrac{dy}{dx} = x^2$ என்ற சமன்பாடு 2 2

8. $e^{\frac{d^3y}{dx^3}} + x\dfrac{d^2y}{dx^2}+y^2=0$ 3 இல்லை

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)^3}$ 1 4

10. $\dfrac{d^4y}{dx^4} \cdot \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+xy=e^x$ 4 1

11. பின்வரும் முதற்சார்புகளில் a, b, c என்பவை மாறிலிகள்; அவைகளை நீக்கி, உரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அறிக.

(i) $y = ae^x+bx$ (ii) $y = a\sin x$

(iii) $y = cx+c-c^2$ (iv) $y = c^2x^2+c^2-c^{2n}$

(v) $y = a\sin(nx+b)$ (vi) $y = ae^x+be^{-x}$

(vii) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$

(viii) $y = ae^{\sin^{-1}x}$ (ix) $a(y+a)^2=x^3$

(x) $e^{2y}+2axe^y+a^2=0$.

12. ஒரு வட்டக் குடும்பம், அச்சுகளைத் தொடு வரையாகக் கொண்டுள்ளது. அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு யாது?

13. ஒரு கூம்புவெட்டியின் (Conic section) சமன்பாடு $y=mx+n+\sqrt{px^2+qx+r}$ என்ற அமைப்பிலுள்ளதென ஏற்று, அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\dfrac{d^3}{dx^3}\left[\dfrac{1}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}\right]=0$ என நிறுவிக் காட்டுக.

(m, n, p, q, r மாறிலிகள்.)

14. ஒரு பரவளைவின் சமன்பாடு, $y=mx+n+\sqrt{bx+c}$ என்ற அமைப்பிலுள்ளதென ஏற்று, அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}\right]=0$$ என நிறுவுக.

15. நெஞ்சுவளைக் குடும்பம் (Cardioide) ஒன்றின் சமன்பாடு $r=a\ (1-\cos\theta)$ எனக்கொண்டு அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, $(1-\cos\theta)\dfrac{dr}{d\theta}=r\sin\theta$ என நிறுவுக.

16. இயல்வடிவ கணித முறைப்படி, ஒரு வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு, $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது. a, b, c,ஐ நீக்கிப் பெறப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0$$ என நிறுவுக.

17. சில வளைவரை பற்றிய தொடர்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவற்றினை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாக எழுதுக.

(i) (x, y) என்ற புள்ளியின்கண் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சாய்வு, அப்புள்ளியின் xஆயத் தொலையின் இருபடிக்கு (a) நேர் விகிதத்திலுள்ளது (b) எதிர்மாறு விகிதத்திலுள்ளது;

(ii) (x, y) என்ற புள்ளியில் வரையப்படக்கூடிய தொடுகோட்டடி நீளம் (sub-tangent) அப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்;

(iii) $P\ (x, y)$ என்ற புள்ளியில் உள்ள செங்குத்துக்கோடு (Normal) x அச்சை வெட்டும் புள்ளியையும் P என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்கோடு, yஅச்சால் இருசம கூறுக்கப்படுகிறது.

18. ஆய ஆதி வழியாகச் சென்று, xஅச்சின்மேல் மையங் கொண்டுள்ள வட்டக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

[சமன்பாடு: $(x-g)^2+y^2=g^2$]

19. yஅச்சுக்கு இணைகோடுகளில் அச்சுகளைப் பெற்ற பரவளைவுக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

20. $\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$ என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

21. 1-5·4இல் கொடுக்கப்பட்ட தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, பின் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் X, Y என்ற (x, y) ஆல் ஆன சார்புகளிடையே, $Y=F_1(x)$, $X=F_2(y)$ அல்லது $F(x, y)=0$ என்ற தொடர்புண்டா எனச் சோதனை செய்க. அவ்விதத் தொடர்பிருப்பின் அது என்ன தொடர்பெனக் காண்க.

(i) $Y=x^2+x+y$; $X=y^2+y+x$

(ii) $X=x+y$; $Y=x^2+y^2+(x+y)\cos(x+y)+2xy$

(iii) $X=y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}$
$Y=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy$

விடைகள்

பயிற்சி 1

11. (i) $\dfrac{d^2y}{dx^2}(1-x)+x\dfrac{dy}{dx}-y=0$

(ii) $\dfrac{dy}{dx}=y\cot x$

(iii) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-(x+1)\dfrac{dy}{dx}+y=0$

(iv) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^n\dfrac{1}{2^nx^n}-\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{x}{2}\right)+y=0$

(v) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0$

(vi) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}-xy=0$

(vii) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

(viii) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$

(ix) $12\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2y=x\left[8\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3-27\right]$

(x) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+\dfrac{1}{1-x^2}=0$

12. $\left(y-x\dfrac{dy}{dx}\right)^2=2xy\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]$

17. (i) (a) $\dfrac{dy}{dx}=kx^2$; (b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{k}{x^2}$

(ii) $y=\dfrac{dy}{dx}(x+y)$

(iii) $y\dfrac{dy}{dx}+2x=0$

18. $y^2=x^2+2xy\dfrac{dy}{dx}$

19. $\dfrac{d^3y}{dx^3}=0$

20. $xy\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=y\dfrac{dy}{dx}$

21. (i) இல்லை

(ii) உண்டு; $Y=X(X+\cos X)$

(iii) உண்டு; $X^2+Y^2=1$.

2. முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் சில திட்டமான அமைப்புகள்

(Differential Equations of the First order—some standard forms)

2-1. $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ என்ற அமைப்பில் உள்ள சமன்பாடு, முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பாகும். இங்கு $\dfrac{dy}{dx}$ ஐப் பொருத்தமட்டில், அதன் முழுப்படிகள் மட்டுமே தோன்றும். ஆனால், 1-3·3இல் கூறியபடி, இந்த அமைப்பிலுள்ள எல்லாச் சமன்பாடுகளுக்கும் 1-3·4இல் வரையறுத்தபடி, தீர்வுகள் காண முடியாது போகலாம். ஆனால் அச் சமன்பாடுகள் சில குறிப்பிட்ட திட்டமான அமைப்புகளில் (Standard form) இருக்குமானால், அல்லது அவற்றினைச் சில மாறுதல்கள் (Transformations) செய்தோ, சில ஈடுகள் (Substitutions) செய்தோ நாமறிந்த திட்டமான அமைப்புகளுக்குக் கொண்டுவர முடியுமானால் அச் சமன்பாடுகளுக்கு நாம் தீர்வுகள் காண முடியும்.

2-2. அவ்விதத் திட்டமான அமைப்புகளை நாம் அறியுமுன்னர், ஒரு முக்கியமான தேற்றத்தைப் பெறுவோம். (இது 1-5·3ல் கூறப்பட்ட தேற்றத்தின் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையைச்சாரும்.)

தேற்றம்: $M\dfrac{dy}{dx} = N$ என்ற அமைப்பில் ஒரு சமன்பாடு பெறப்படுமாயின் [M, N—x, yகளின் ஒரு மதிப்புச் சார்புகள் : (M and N are one valued functions of x and y)] அதற்கு ஒரே ஒரு முதற் சார்புதான் தீர்வாகப் பெறப்படும்.

தெரிப்பு : முடியுமானால்

$$F_1(x,y) = a \quad \text{எனவும்} \qquad (A)$$

$$F_2(x,y) = b \quad \text{எனவும்} \qquad (B)$$

இரு முதற் சார்புகள் பெறப்படுகின்றன எனக் கொள்வோம்.

(A)இலிருந்து

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ எனவும்} \qquad (C)$$

(B)இலிருந்து

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ எனவும்} \qquad (D)$$

பெறலாம். மேலும் (C)இலிருந்து

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial y}}$$

என்றும், (D) இலிருந்து

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial F_2}{\partial y}}$$

என்றும் பெறலாம். இவற்றினை

$$M \frac{dy}{dx} = N$$

என்ற சமன்பாட்டில் ஈடு செய்யின்

$$M \frac{\partial F_1}{\partial x} + N \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \qquad (E)$$

$$M \frac{\partial F_2}{\partial x} + N \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 \qquad (F)$$

எனப் பெறப்படுகின்றது. (E), (F) இலிருந்து M, N இரண்டையும் விலக்கினால்

$$\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial F_2}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial F_2}{\partial y}}$$

என்று பெறலாம்.

அதாவது

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\ \frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\ \frac{\partial F_2}{\partial x}=0$$

என்று கிட்டும். 1-5·4 இல் கண்ட தேற்றப்படி F_1, F_2களில் ஒன்று மற்றொன்றின் சார்பாகும்.

எனவே, ஒரு முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டின் முதற் சார்பு காணும் பொழுது ஒரு தீர்வு கிடைக்குமானால், அதுவே சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வெனக் கொள்ளலாம்.

2-3. திட்டமான அமைப்புகள் (Standard forms) :

2-3·1. அமைப்பு 1 : மாறிகள் $\frac{\text{பிரிபடக் கூடியவை}}{\text{பிராக்கப்படக் கூடியவை.}}$ (Variables separable).

$$M\,\frac{dy}{dx}=N \text{ என்ற சமன்பாட்டை}$$

$$M\,dy=N\,dx \text{ என எழுதலாம்.}$$

இங்கு இச் சமன்பாட்டை

$$f(x)\,dx=F(y)\,dy$$

என்ற அமைப்பில் பிரித்தெழுத முடியுமாயின்

$$\int f(x)dx=\int F(y)dy+A$$

என்ற முதற்சார்பு (சமன்பாட்டுத் தீர்வு) கிடைக்கும். இங்கு A ஏதாமொரு மாறிலி.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$x(1+y^2)^{\frac{1}{2}}+y(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\ \frac{dy}{dx}=0$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காண்க.

இச் சமன்பாட்டை

$$x(1+y^2)^{\frac{1}{2}}dx+y(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dy=0$$

என எழுதலாம். இரு பக்கங்களையும்

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\ (1+y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ ஆல் வகுத்தால்}$$

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}}=0$$

என நமக்கு வேண்டிய அமைப்பில் வரும்.

எனவே $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = A \quad \text{(மாறிலி)}$$

என்பது தீர்வாகும். அதாவது தொகைகாண

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = A$$

என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: $(x+y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இங்கு நேரடியாக, நமக்கு வேண்டிய அமைப்பில் இச் சமன்பாடு இல்லை. ஆனால் $x+y = z$ என ஈடு செய்வோம். இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக்கெழு கண்டால்,

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

என்று கிட்டும். எனவே

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

என்று கொடுத்த சமன்பாட்டில் ஈடு செய்யலாம். அவ்வாறு ஈடு செய்யின்

$$z^2 \left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = a^2$$

எனப் பெறலாம். அதாவது

$$\frac{z^2\,dz}{a^2+z^2} = dx$$

என்று கிடைக்கும்.

இருபக்கமும் தொகைப்படுத்த

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{z^2 dz}{z^2+a^2} \\ &= \int dz - a^2 \int \frac{dz}{z^2+a^2} \\ &= z - \frac{a^2}{a} \tan^{-1} \frac{z}{a} + C \end{aligned}$$

அதாவது $$(x+y) - a \tan^{-1} \frac{x+y}{a} = x + A$$

அல்லது $$y = a \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right) + A$$

என்பது தீர்வாகும்.

2-3·1.1. ஒரு வளைவரையின் சிறப்புப் பண்பினைத் தரும் வகையிலும் இவ்விதச் சமன்பாடுகள் தரப்படலாம். அப்பண்பினைச் சமன்பாடாக அமைத்து அதன் தீர்வு காணலாம். இங்கு வரும் மாறிலி ஒரு பொது மாறிலியாக முதலில் பெறப்படும்; வளைவரையைப் பற்றிய கட்டுப்பாடு ஏதாவது மேலும் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் அம் மாறிலியின் குறிப்பான மதிப்பைக் காண முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: ஒரு வளைவரையின் தொடுகோட்டடியின் நீளம் (length of the sub-tangent), அதன் y ஆயத் தொலைக்கு நேர்மாறு விகிதத்தில் உள்ளது. அவ் வளைவரை (1, 1), (2, 4) என்ற புள்ளிகள் வழி செல்லுகின்றதெனின் அவ் வளைவரை யாது?

$$\text{தொடுகோட்டடியின் நீளம்} = \frac{y}{\dfrac{dy}{dx}}$$

கொடுக்கப்பட்டிருப்பது

$$\frac{y}{\dfrac{dy}{dx}} \propto \frac{1}{y} \text{ என்பதாம்.}$$

அதாவது $$\frac{y}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{k}{y} \quad (k \text{ மாறிலி})$$

$$\therefore \quad k\frac{dy}{dx} = y^2$$

எனவே $$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{k}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{k}\int dx + C \quad (C \text{ மாறிலி})$$

தொகைகாண

$$-\frac{1}{y} = \frac{x}{k} + C$$

அதாவது பொதுத்தீர்வு

$$xy = Cky + k = 0$$

அல்லது $$y(x+Ck)+k = 0$$

இவ்வளைவரை (1, 1), (2, 4) வழியாகச் செல்வதால்

$$1(1+Ck)+k = 0$$

$$4(2+Ck)+k = 0$$

அதாவது

$$k(C+1) = -1$$

$$k(4C+1) = -8$$

$$\therefore \quad \frac{C+1}{4C+1} = \frac{1}{8}$$

எனவே $\quad C = -\frac{7}{4}$

எனவே $\quad k(-\frac{7}{4}+1) = -1$

$$\therefore \quad k = +\frac{4}{3}$$

எனவே குறிப்பிட்ட வளைவரை

$$xy-\tfrac{7}{3}y+\tfrac{4}{3} = 0$$

அதாவது $\quad 3xy-7y+4 = 0.$

பயிற்சி 2·1

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

2. $x^3\,dx+(y+1)^3\,dy = 0$

3. $x^2(y+1)\,dx+y^2\,(x+1)\,dy = 0$

4. $4y\,dx = x(y-3)\,dy$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y)$ [குறிப்பு: $x+y = z$ என ஈடு செய்க.]

6. $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$ [குறிப்பு: $x+y = z$ என ஈடு செய்க.]

7. $\dfrac{dy}{dx} = ax+by$ [குறிப்பு: $ax+by = z$ என ஈடு செய்க.]

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2y}{1+x^3}$; இங்கு $x = 1$, $y = 1$ என்ற கட்டுப்பாடு உண்டெனில் தீர்வு காண்க.

9. $xy+(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(\log x+1)}{\sin y+y\cos y}$

11. $\sec^2x\tan y\,dx+\sec^2y\tan x\,dy = 0$

12. $(e^x+1)y\,dy+(y+1)\,dx = 0$

விடைகள்

பயிற்சி 2·1

1. $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2} = C$
2. $x^4+(y+1)^4 = C$
3. $(x-1)^2+(y-1)^2+2\log(x+1)(y+1) = C$
4. $x^4y^3 = Ae^y$
5. $x+A = \tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$
6. $x+A = \tan^{-1}(x+y)$
7. $b(x+A) = \log\left\{ax+by+\dfrac{a}{b}\right\}$
8. $Ay = 1+x^3$
   $2y = 1+x^3$
9. $y^2(1+x^2)+C = 0$
10. $y\sin y = \dfrac{x^2}{4}(\log x^2+1)+C$
11. $\tan x = C\cot y$
12. $(y+1)(1+e^{-x}) = Ae^y$

2-3·2. அமைப்பு 2 : சமபடித்தான சமன்பாடுகள் (Homogeneous Equations) :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

M, N என்ற சார்புகள் x, y இல் ஒரே படித்தரமுள்ள சமபடித்தான சார்புகளாக இருக்குமானால் $y = vx$ என ஈடு செய்து, அமைப்பு 1க்கு மாற்ற முடியும். பின்னர்த் தீர்வு காணலாம். இங்கு

$$v=F(x,y)$$

எனக் கொள்ளலாம். M, N என்ற சார்புகள் r படித்தான சார்புகளாயின்

$$\left.\begin{aligned} M&=x^r f_1(v) \text{ எனவும்}\\ N&=x^r f_2(v) \text{ எனவும்}\end{aligned}\right\}\ (\because\ y=vx)$$

பெறப்படும். இங்கு நாம் ஈடுசெய்தபடி

$v = \dfrac{y}{x}$ ஆகும். எனவே

$$\frac{M}{N} = \frac{f_1(v)}{f_2(v)}$$

ஆகும். $y = vx$ என ஈடு செய்வதால்

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

என ஈடு செய்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{f_1(v)}{f_2(v)}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{f_1(v) - vf_2(v)}{f_2(v)}$$

$$\therefore \quad \frac{f_2(v)\,dv}{f_1(v) - vf_2(v)} = \frac{dx}{x}$$

எனப் பெறலாம். $f_1(v) \neq vf_2(v)$ எனில்

$$\int \frac{f_2(v)\,dv}{f_1(v) - vf_2(v)} = \int \frac{dx}{x} + A$$

என்ற அமைப்பில் நமக்குப் பொதுத் தீர்வு கிடைக்கும். இங்கு $v = \dfrac{y}{x}$ என ஈடு செய்து நாம் பொதுத் தீர்வினை அறியலாம்.

குறிப்பு : $f_1(v) = vf_2(v)$ என்றிருந்தால் வேறு முறைப்படி இச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவேண்டும். அப்போது சமன்பாட்டை

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^r f_1(v)}{x^r f_2(v)}$$

என எழுதி

$$x^r vf_2(v) + x^{r+1}f_2(v)\frac{dv}{dx} = x^r f_1(v)$$

என மாற்றி இரு பக்கங்களையும் x^r ஆல் வகுக்க

$$vf_2(v) + xf_2(v)\frac{dv}{dx} = f_1(v)$$

என்று கிட்டும். அப்போது இதை

$$[vf_2(v) - f_1(v)]\,dx + xf_2(v)\,dv = 0$$

என எழுதலாம்.

முதல் உறுப்பு பூச்சியமாதலாலும், $x \neq 0$ என்பதாலும்

$$xf_2(v)\, dv = 0$$

எனப் பெறலாம் எனவே இதன் தீர்வு

$$\int f_2(v) dv = C$$

என்றாகும். இத் தொகை கண்ட பின்னர் $v = \frac{y}{x}$ என ஈடு செய்ய நமக்கு வேண்டிய பொதுத் தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$x^2y\, dx - (x^3 + y^3)\, dy = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

சமன்பாட்டை

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$$

என எழுதலாம். பின்னர் $y = vx$ என ஈடு செய்ய, நமக்கு

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$$

எனக் கிட்டும். எனவே

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v$$

$$= \frac{-v^4}{1+v^3}$$

$$\therefore \quad \int \frac{1+v^3}{v^4}\, dv + \int \frac{dx}{x} = C$$

அதாவது

$$-\frac{1}{3v^3}\log v + \log x = C$$

எனவே

$$-\frac{x^3}{3y^3} + \log y = C$$

$$\therefore \quad y = e^{C + \frac{x^3}{3y^3}}$$

$$= A\, e^{\frac{x^3}{3y^3}}$$

என்ற பொதுத் தீர்வு கிட்டும். சிறப்பாக $x=0$, $y=1$ என்ற கட்டுப்பாடு கொடுக்கப்பட்டிருப்பின்

$$1 = Ae^0$$
$$= A$$

எனவே சிறப்புத் தீர்வு $y = e^{\frac{x^3}{3y^3}}$

பயிற்சி 2·2

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க :

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-y}{x+2y}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-2x}{x+y}$

2. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2-y^2}$

3. $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$

4. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x^2+3y^2}{3x^2+y^2} = 0$

5. $x(2y^4-x^4)\dfrac{dy}{dx}+y(x^4-y^4) = 0$

6. $2x\sinh\left(\dfrac{y}{x}\right) + 3y\cosh\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$= 3x\cosh\frac{y}{x}\,\frac{dy}{dx}$$

7. $x\sin\dfrac{y}{x} - y\cos\dfrac{y}{x}+x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

குறிப்பு : 6, 7 கணக்குகளில் $y = v\,x$ என ஈடு செய்க.

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-y}{3x+4y}$

9. $[(x-1)^2+(y-2)^2]\dfrac{dy}{dx} = (x-1)(y-2)$

[இங்கு $(x-1) = X$ எனவும், $(y-2) = Y$ எனவும் ஈடு செய்து $(X^2+Y^2)\dfrac{dY}{dX} = XY$ என்ற அமைப்பிற்குக் கொணர்ந்து தீர்வு காண்க.]

10. $(x-y+1)^2\dfrac{dy}{dx} = (x-y-2)^2$

[இங்கு $x-y = z$ என ஈடு செய்து தீர்வு காண்க.]

விடைகள்

பயிற்சி 2·2

1. (a) $2\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log(x^2+y^2)+C$

(b) $x^2-xy-y^2 = C$

(c) $\sqrt{2}\tan^{-1}\{\sqrt{2}y/2x\}+\log(2x^2+y^2) = C$

2. $Cx = e^{\sin^{-1}y/x}$

3. $y = Ae^{y/x}$

4. $\dfrac{2xy}{(x+y)^2}+\log(x+y) = C$

5. $4\log\left(\dfrac{y^2}{x}\right)+\dfrac{x^4}{y^4} = C$

6. $x^2 = C\sinh^3\left(\dfrac{y}{x}\right)$

7. $x\sin\dfrac{y}{x} = C$

8. $C(2y^2+2xy-x^2)^{2\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)x+2y}{(1-\sqrt{3})x+2y}$

9. $\log(y-2)-\dfrac{(x-1)^2}{2(y-2)^2} = A$

10. $24x = 2(x-y)(x-y+5)+9\log(2x-2y-1)+A$

2–3·2.1. அமைப்பு 2 (a):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{lx+my+n} \quad \left(\frac{a}{l} \neq \frac{b}{m}\right).$$

இந்த அமைப்பிலுள்ள சமன்பாடுகள் சமபடித்தான சமன்பாட்டு வகையில் இல்லாவிட்டாலும், ஒரு வசதியான ஈடுசெய்து அவ் வமைப்புக்குக் கொண்டுவர இயலும்.

$$x = X + \alpha$$
$$y = Y + \beta$$

என ஈடு செய்க ; இங்கு α, β பின் வருமாறு நிர்ணயிக்கப்படுகிறது.

$$a\alpha + b\beta + c = 0 \qquad \text{......(A)}$$
$$l\alpha + m\beta + n = 0 \qquad \text{......(B)}$$

என்ற இரு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் அடிப்படையில் α, β இன் மதிப்புகள் கண்டு பிடிக்கப்பட்டுப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இந்தக் கட்டுப்பாடுகளின் கீழ்

$$\frac{ax+by+c}{lx+my+n} = \frac{aX+bY+a\alpha+b\beta+c}{lX+mY+l\alpha+m\beta+n} = \frac{aX+bY}{lX+mY}.$$

மேலும் $$\frac{dY}{dX} = \frac{d(y-\beta)}{d(x-\alpha)} = \frac{dy}{dx}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY}{lX+mY}$$

என்று (2)ஆம் அமைப்புக்குக் கொண்டுவரப்படும். எனவே $Y = vX$ என ஈடு செய்து $f(X, Y) = C$ என்ற அமைப்பில் தீர்வு கண்டு, இச் சார்பில் $X = x - \alpha$, $Y = y - \beta$ என ஈடு செய்து, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு காணலாம்.

(A), (B) என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

$$\alpha = \frac{bn-cm}{am-bl}; \ \beta = \frac{cl-an}{am-bl}$$

எனக் காணலாம். இங்கு $am = bl$ ஆனுல் α, β க்கு நாம் திட்டமான மதிப்பு காண இயலாது. எனவே இம்முறை முதன் முதலில் குறிப் பிட்டபடி $\frac{a}{l} \neq \frac{b}{m}$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்குப் பொருத்தமானது.

2-3·2.2. அமைப்பு 2 (b) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{l(ax+by)+m}$$

முன் கூறியதையொட்டி நாம் α, β பெறுவதற்குரிய சமன்பாடுகள்

$$a\alpha + b\beta + c = 0 \qquad \text{......(C)}$$
$$la\alpha + lb\beta + m = 0 \qquad \text{......(D)}$$

என்பவையாகும்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் α, βக்குக் குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் தருவனவல்ல என்பதைக் கண்டுகொள்க.

எடுத்துக்காட்டாக $$2x+3y+4 = 0$$
$$8x+12y+10 = 0$$

என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளாகா. எனவே ஈண்டு 2-3·2.1இல் கூறியதுபோல் தீர்வு காணமுடியாது. ஆனால் $ax+by = z$, என ஈடு செய்யின்

$$\frac{ax+by+c}{l(ax+by)+m} = \frac{z+c}{lz+m}$$

என்று கிட்டும். மேலும்,

$$a+b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

என்றும் பெறப்படுவதால்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left\{\frac{dz}{dx} - a\right\}$$

என்றாகும். இவற்றினைக்கொண்டு, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$\frac{dz}{dx} = a + \frac{b(z+c)}{lz+m}$$

$$= \frac{alz+am+bz+cb}{lz+m}$$

என்று எழுதி, மாறிகளைப் பிரித்து

$$\int \frac{lz+m}{z(al+b)+(am+bc)}\,dz = \int dx + C$$

என்ற தீர்வு பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-2}{2x+3y-5}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$x = X+\alpha$, $y = Y+\beta$ என ஈடு செய்ய

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y+\alpha+\beta-2}{2X+3Y+2\alpha+3\beta-5}$$

என்று கிட்டும். இதில்

$$\alpha+\beta-2=0$$
$$2\alpha+3\beta-5=0$$

என்று கொண்டால் $\alpha=1$, $\beta=1$ என்று கிடைக்கும்.

இம் மதிப்புக்களுக்கு

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+Y}{2X+3Y}$$

என்ற சமன்பாடு கிட்டும். ஈண்டு $Y=vX$ என ஈடு செய்ய

$$\frac{dY}{dX}=v+X\frac{dv}{dX}=\frac{1+v}{2+3v}$$

என்றாகும். எனவே

$$X\frac{dv}{dX}=\frac{1+v}{2+3v}-v$$

$$=\frac{1-v-3v^2}{2+3v}$$

$$\therefore \quad \int\frac{3v+2}{1-v-3v^2}\,dv=\int\frac{dX}{X}$$ எனப் பெறலாம்.

தொகை காண

$$-\tfrac{1}{2}\log(1-v-3v^2)+\frac{3}{2\sqrt{13}}\log\left(\frac{\sqrt{13}+1+6v}{\sqrt{13}-1-6v}\right)=\log CX$$

என்ற தீர்வு கிட்டும். இங்கு $v=\dfrac{Y}{X}$ என ஈடு செய்ய

$$-\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{X^2-XY-3Y^2}{X^2}\right)+\frac{3}{2\sqrt{13}}\log\frac{(\sqrt{13}+1)X+6Y}{(\sqrt{13}-1)X-6Y}$$
$$=\log CX$$

இங்கு $X=x-1$, $Y=y-1$ என ஈடு செய்ய

$$-\tfrac{1}{2}\log\{(x-1)^2-(x-1)(y-1)+3(y-1)^2\}+\log(x-1)$$
$$+\frac{3}{2\sqrt{13}}\log\left\{\frac{\sqrt{13}+1)(x-1)+6(y-1)}{\sqrt{13}-1)(x-1)-6(y-1)}\right\}=\log C+\log(x-1)$$

அதாவது

$$C\{(x-1)^2-(x-1)(y-1)+3(y-1)^2\}$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{13}+1)(x-1)+6(y-1)}{\sqrt{13}-1)(x-1)-6(y-1)}\right\}^{\frac{3}{\sqrt{13}}}$$

என்பது பொதுத் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x+y)+5}{2(x+y)+1}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$x+y=z$ என ஈடுசெய்க.

எனவே $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\frac{dz}{dx}-1=\frac{z+5}{2z+1}$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx}=\frac{3(z+2)}{2z+1}$$

$$\therefore \int \frac{2z+1}{z+2}\,dz=3\int dx$$

அதாவது

$$\int\left(2-\frac{3}{z+2}\right)dz=3x+C$$

தொகை காண

$$2z-3\log(z+2)=3x+C$$

$$\therefore \quad 3\log(z+2)=2z-3x-C$$

இங்கு $z=x+y$ என ஈடு செய்ய

$$3\log(x+y+2)=2(x+y)-3x-C$$
$$=2y-x-C$$

என்பது தீர்வு.

பயிற்சி 2·3

தீர்வு காண்க :

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$

2. $(3x+y-5)\frac{dy}{dx}=2x+2y-2$

3. $(y-3x+3)\frac{dy}{dx}=2y-x-4$

4. $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0$

5. $(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+2y+1}{3x+2y-1}$.

விடைகள்

பயிற்சி 2·3

1. $(4y-x-3)(y+2x-3)^2 = C$
2. $(y-x+3)^4 = A(y+2x-3)$
3. $C(y^2-5xy+x^2+11x+4y-17)$

$$= \left[\frac{2y-(5+\sqrt{21})x+2(2+\sqrt{21})}{2y-(5-\sqrt{21})x+2(2-\sqrt{21})}\right]^{\frac{1}{\sqrt{21}}}$$

4. $(y-x+1)^2(y+x-1)^5 = C$
5. $x+3y+2\log(2-x-y) = C$
6. $\log(15x+10y-1)+\frac{5}{2}(x-y) = C$

2-3·3. அமைப்பு 3 : ஒருபடிச் சமன்பாடு (Linear Equation) :

முதல் வரிசை ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு $\frac{dy}{dx}+Py = Q$. இங்கு P, Q என்பவை xஇன் சார்புகள். அதாவது (P, Qஇல் y தோன்றாது). இப்போது

$$\frac{dy}{dx}+Py = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்போம்.

$$\frac{dy}{y}+P\,dx = 0$$

என மாறிகளைப் பிரித்தெழுதலாம். எனவே

$$\int\frac{dy}{y}+\int P\,dx = 0$$

∴ தொகை காண

$$\log y+\int P\,dx = C$$

என்பது தீர்வாகும். அதாவது

$$\log y = C-\int P\,dx$$

$$\therefore \quad y = e^c.e^{-\int P dx}$$

$$= A\,e^{-\int P dx} \qquad [e^c = A \text{ எனக்கொள்க.}]$$

இங்கு A ஒரு மாறிலி.

அடுத்தபடியாக, A என்பது x, y ஒட்டிய ஒரு சார்பெனக்கொண்டு

$$y = Ae^{-\int P dx}$$

என்பது

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வென வைத்து A என்ற சார்பைக் காண்போம். இவ்வாறு கொள்வதால்,

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dA}{dx} - PA\right) e^{-\int P dx}$$

எனப் பெறப்படும்.

$$\therefore \qquad \frac{dA}{dx} e^{-\int P dx} = Q \text{ எனப் பெறலாம்.}$$

$$\therefore \qquad A = \int Q e^{\int P dx} dx + C \text{ என வரும்.}$$

எனவே வேண்டிய தீர்வு

$$y = e^{-\int P dx} \left\{ \int Q e^{\int P dx} dx + C \right\}$$

அல்லது $$y e^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx} dx + C$$

என எழுதலாம்.

குறிப்பு 1 : $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற அமைப்பில் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வை ஒரு வாய்பாடாகவே ஞாபகத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

முதலில், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை இந்த அமைப்பில் P, Q என்பவை சார்பில் மாறி (இங்கு x)யின் கோவைகளாக இருக்கும் வகையில் அமைத்து, இரண்டாவது

$\int P dx$இன்

மதிப்பைக் கண்டு, தீர்வை

$$y e^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx} dx + C$$

என உடனே எழுதலாம். C என்ற மாறிலி கட்டாயமாக இருத்தல் வேண்டும்.

சில சமன்பாடுகளை

$$\frac{dx}{dy} + xP(y) = Q(y)$$

என்ற அமைப்பில் மாற்ற வேண்டியிருக்கலாம். அப்போது தீர்வு

$$x\, e^{\int P dy} = \int Q\, e^{\int P dy} dy + C$$

என முன் கூறியபடி பெறலாம்.

குறிப்பு 2 : $e^{\log_e f(x)} = f(x)$ என்று தெரிந்திருத்தல் நலம்.

குறிப்பு 3 : முதலில் $Q = 0$ எனக் கொண்டு தீர்வு கண்டு, பின்னர் அத்தீர்வில் A என்பது x, y ஒட்டிய சார்பெனக் கொண்டு

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணும் முறை ஒரு சிறப்பான முறையாகும். இது சாரா மாறி முறை (Variation of parameters) எனப்படும். இம்முறை மற்றும் பல இடங்களில் பயன்படுமாதலின் இது ஞாபகத்திற்குரியது.

2-3·3.1. தொகைகாண் காரணி (Integrating factor):

மேற்கூறிய முறையில் மற்றோர் நுணுக்கமான முறையும் பெறப்படுவது பற்றி அறிவது நலம்.

$$\frac{dy}{dx} + Py = \frac{dA}{dx} e^{-\int P dx}$$

என்ற அமைப்பை

$$e^{\int P dx} \left\{ \frac{dy}{dx} + Py \right\} = \frac{dA}{dx}$$

என எழுதினால் இடக் கைப்புறம் ஒரு தொகை காணற்குரிய சரியான வகைக்கெழு (perfect differential) என்பதைக் காணலாம். ஏனெனில்,

$$\frac{d}{dx}\left[y e^{\int P dx} \right] = \frac{dy}{dx} e^{\int P dx} + y . e^{\int P dx} . P$$

$$= e^{\int P dx} \left\{ \frac{dy}{dx} + Py \right\}.$$

எனவே $\frac{dy}{dx}+Py = Q$ என்ற சமன்பாட்டில் இரு பக்கங்களையும் $e^{\int Pdx}$ ஆல் பெருக்கினால்

$$e^{\int Pdx}\left[\frac{dy}{dx}+Py\right] = Q\,e^{\int Pdx}$$

எனப்பெறலாம். இடக் கைப்புறம்

$$= \frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int Pdx}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int Pdx}\right] = Q\,e^{\int Pdx}$$

$$\therefore \quad y\,e^{\int Pdx} = \int Q\,e^{\int Pdx}dx+C$$

எனத் தீர்வு காணலாம்.

இங்கு நாம் கவனிக்க வேண்டியது யாதெனில்,

$$\frac{dy}{dx}+Py$$

என்பதை $e^{\int Pdx}$ ஆல் பெருக்க இடக் கைப்புறம் ஒரு சரியான வகைக் கெழுவாகிறது. எனவே $e^{\int Pdx}$ ஒரு தொகைகாண் காரணி (An integrating factor) எனக் கூறுகிறோம். பொதுவாக இப்போது தொகை காண் காரணி என்றால் என்ன என்று வரையறுப்போம்.

2-3·3.2. தொகைகாண் காரணி: ஒரு குறிப்பிட்ட வகைக் கெழுச் சமன்பாடான $Mdx+Ndy = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இடக் கைப் புறத்தை $\mu(x, y)$ என்ற சார்பினால் பெருக்கினால்

$$\mu M\,dx+\mu N\,dy$$

என்பது $\frac{d}{dx}\,[F(x, y)]$ என்ற அமைப்பில் கிடைப்பதாகக் கொள்வோம். அப்போது $Mdx+Ndy = 0$ என்பதன் தீர்வு காணப் பயன்படும் $\mu(x, y)$ என்ற சார்பினை அச்சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தொகைகாண் காரணி எனக் கூறுவது மரபாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $x\,dx+y\,dy = d[\frac{1}{2}(x^2+y^2)]$ எனப் பார்த்த வுடன் அறியலாம். அதையே

$$\frac{d}{dx}\,[\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)] = x+y\,\frac{dy}{dx}$$

எனவும் எழுதலாம்.

எனவே,

$$x+y\frac{dy}{dx}=0 \text{ எனில்}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right]=0 \quad \text{என}$$

$$\text{எழுதி,} \quad x^2+y^2=A$$

எனத் தீர்வு காணலாம். இங்கு எவ்விதத் தொகைகாண் காரணியையும் பயன்படுத்தவில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 2 : $xdy-ydx=0$

இரு பக்கங்களையும் $\frac{1}{x^2}$ ஆல் பெருக்கினால்

$$\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$$

எனப் பெறலாம். எனவே

$$d\left[\frac{y}{x}\right]=0$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x}=C$$

என்ற தீர்வு கிட்டும். இங்கு $\frac{1}{x^2}$ என்பது ஒரு தொகைகாண் காரணியாய் அமைகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $\frac{dy}{dx}+y\tan x=\cos^3 x$

என்பதன் தீர்வு காண்க.

ஈண்டு $P=\tan x$; $Q=\cos^3 x$. எனவே

$$\int Pdx=\int \tan x\, dx=\log\sec x$$

எனவே $e^{\int Pdx}=e^{\log\sec x}=\sec x$

$\therefore$ தீர்வு, வாய்பாட்டின்படி

$$\begin{aligned} y\sec x &= \int \cos^3 x\sec x\, dx+C \\ &= \int \cos^2 x\, dx+C \\ &= \tfrac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]+C \end{aligned}$$

அதாவது, $4y\sec x=(2x+\sin 2x)+C_1$

எடுத்துக்காட்டு 4:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1+x^2}=\frac{1}{2x(1+x^2)}$$ இன் தீர்வு காண்க.

$$\int P dx = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$= \log(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad e^{\int P dx} = e^{\log(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

∴ தீர்வு, வாய்பாட்டின்படி

$$y(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \int \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{2x(1+x^2)}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{2x\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\tan\left\{\frac{\tan^{-1}x}{2}\right\}+C$$

என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{x-2xy+e^{-2y}}$$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-2xy+e^{-2y}}{y+1}$$

அதாவது, $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{x(1-2y)}{y+1}=\dfrac{e^{-2y}}{y+1}$

என்ற அமைப்பில் y சார்பில் மாறியாகவும், x சார்புடை மாறியாகவும் இருப்பது காண்க.

$$P = \frac{2y-1}{y+1}$$

$$= 2-\frac{3}{y+1}$$

$$e^{\int P dy} = e^{\int\left(2-\frac{3}{y+1}\right)dy}$$

$$= e^{2y-3\log(y+1)}$$

$$= \frac{e^{2y}}{(y+1)^3}$$

∴ தீர்வு, வாய்பாட்டின்படி

$$\frac{xe^{2y}}{(y+1)^3} = \int \frac{e^{2y}}{(y+1)^3} \cdot \frac{e^{-2y}}{(y+1)}\, dy + C$$

$$= \int \frac{dy}{(y+1)^4} + C$$

$$= -\frac{1}{3\,(y+1)^3} + C$$

அதாவது, $3xe^{2y} = A\,(y+1)^3 - 1$ என்பது தீர்வு.

2-3·4. அமைப்பு 4:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

என்பது 2-3·3இல் விளக்கப்பட்ட அமைப்பை ஒட்டியதோர் அமைப்பாகும்; P, Q என்பவை x ஒட்டிய சார்புகள். இது பெர்னோலிச் சமன்பாடு [Bernoulli's Equation] எனப்படும். இதன் தீர்வு காணும் முறை இரு பக்கங்களையும்

$\frac{1}{y^n}$ ஆல் பெருக்கினால் வரும்.

பெருக்கினால்,

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{P}{y^{n-1}} = Q$$

எனக் கிடைக்கும். இங்கு

$$\frac{1}{y^{n-1}} = v$$

எனக் கொண்டால்

$$\frac{-(n-1)}{y^n}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

எனப் பெறலாம்.

$$\therefore \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(n-1)}\frac{dv}{dx}$$

ஆகும். இவற்றினைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய

$$-\frac{1}{(n-1)}\frac{dv}{dx} + Pv = Q$$

எனக் கிடைக்கும். அதாவது

$$\frac{dv}{dx} - P(n-1)v = -Q(n-1)$$

இதை

$$\frac{dv}{dx} + P_1 v = Q_1$$

என எழுதினால் [P_1, Q_1, xஐ ஒட்டிய சார்புகளே ; ஏனெனில் $-(n-1)$ ஓர் எண்]. 2-3·3இல் கண்ட அமைப்புக்கு ஒத்திருப்பதால் (yக்குப் பதில் v இருக்கின்றது) இதன் தீர்வு

$$v\, e^{\int P_1 dx} = \int Q_1 e^{P_1 dx} dx + C$$

இங்கு $v = \frac{1}{y^{n-1}}$ என ஈடு செய்ய நமக்கு வேண்டிய தீர்வு கிட்டுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 1 : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2 y^6$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இரு பக்கங்களையும் y^6ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{1}{y^6} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^5} \cdot \frac{1}{x} = x^2$$

$\frac{1}{y^5} = v$ என ஈடு செய்க. எனவே

$-\frac{1}{5}\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = x^2$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது

$$\frac{dv}{dx} - \frac{5v}{x} = -5x^2$$

இங்கு $P = -\frac{5}{x}$, $Q = -5x^2$. எனவே

$$e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{5}{x} dx} = e^{-5 \log x} = x^{-5}$$

∴ தீர்வு

$$v x^{-5} = -\int 5x^2 x^{-5} dx + C$$

$$\therefore \frac{v}{x^5} = \frac{5}{2x^2} + C$$

அதாவது $v = \frac{1}{y^5}$ என ஈடு செய்ய

$$\frac{5}{x^5 y^5} = \frac{5}{2x^2} + C$$

அல்லது $\frac{1}{y^5} = \frac{5x^3}{2} + Cx^5$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : $xy-\frac{dy}{dx}=y^3e^{-x^2}$ இன் தீர்வு காண்க.

$\frac{dy}{dx}-xy=-e^{-x^2}y^3$ என இதை எழுதலாம். எனவே

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}-\frac{x}{y^2}=-e^{-x^2}.$$

$\frac{-1}{y^2}=v$ எனக் கொண்டால், $\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

எனவே இவற்றினை ஈடு செய்ய

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}+vx=-e^{-x^2}$$

அல்லது

$$\frac{dv}{dx}+2vx=-2e^{-x^2}$$

இங்கு $P=2x,\ Q=-2e^{-x^2}.$

எனவே $e^{\int Pdx}=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}.$

எனவே தீர்வு

$$ve^{x^2}=-\int 2e^{-x^2}.\,e^{x^2}dx+C$$
$$=-2x+C$$

$$\therefore\ -\frac{e^{+x^2}}{y^2}=-2x+C$$

அதாவது $e^{x^2}=2xy^2+Ay^2$ என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சி 2·4

தீர்வு காண்க :

1. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

2. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

3. $\frac{dy}{dx}+y=x\sin 2x$

4. $x(x-1)\frac{dy}{dx}+y=x(x-1)^2$

5. $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\sin 2x$ (கட்டுப்பாடு $x=0,\ y=0$)

6. $2x(x-1)\dfrac{dy}{dx}+(2x-1)\,y=1$

7. $\dfrac{dy}{dx}+y\cot x=\operatorname{cosec} x$

8. $2x\dfrac{dy}{dx}=y-4y^3$

9. $(1-3xy)\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$

$\left[\dfrac{dx}{dy}+xP(y)=Q(y)\right.$ என்ற அமைப்பு $\left.\right]$

10. $x(x-1)\cos y\dfrac{dy}{dx}+\sin y=x(x-1)^2$

[$z=\sin y$ என ஈடு செய்க]

11. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2-3x^2}{x^3}y=1$

12. $y\log y+(x-\log y)\dfrac{dy}{dx}=0$

13. $3x\dfrac{dy}{dx}-2y+e^xy^4=0$

14. $5\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{xy}{x^2+1}+xy^6=0$

15. $x\dfrac{dy}{dx}-\{y+xy^3(1+\log x)\}=0$

16. $\dfrac{dy}{dx}+Py=Q$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு u, v என்பவை இரு தீர்வுகள். $v=uz$ என இருப்பின்

$$z=1+ae^{-\int\frac{Q}{u}\cdot dx}$$ என நிறுவுக (a-யாதாமொரு மாறிலி)

17. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x^3e^x-2my^2}{2mxy}=0$

18. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{\tan y}{1+x}=(1+x)\,e^x\sec y$

[குறிப்பு: $\cos y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{\sin y}{1+x}=(1+x)e^x$ என எழுதி $z=\sin y$ என ஈடு செய்து தீர்வு காண்க.]

19. $\frac{dy}{dx}+y=\frac{x}{y^{n-1}}$

20. $\frac{dy}{dx}=1-x(y-x)-x^3(y-x)^2$

விடைகள்

பயிற்சி 2·4

1. $y(x+1)^2=\frac{1}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+C$
2. $2y=A(x+1)^2-2x-1$
3. $4xy=\sin 2x-2x\cos 2x+A$
4. $2y=\frac{1}{x-1}\quad[2x\log x-4x^2+x^3+Cx]$
5. $y=2\left[e^{-\sin x}+\sin x-1\right]$
6. $\sqrt{x(x-1)}\ y=\log[\sqrt{x}+\sqrt{x-1}]+C$
7. $y\sin x=A+x$
8. $y^2(4x+C)=x$
9. $4xy=1+Ay^4$
10. $2(x-1)\sin y=2x\log x-4x^2+x^3+Ax$
11. $2y=x^3+Ax^3e^{1/x^2}$
12. $2x\log y=\log.\log y+C$
13. $y^3[e^x(x-1)+A]=x^2$
14. $3\sqrt{1+x^2}=y^5[A+(1+x^2)^{3/2}]$
15. $x^2=y^2\left[C-\frac{2x^3}{3}(\log x+\frac{2}{3})\right]$
17. $y^2=x^2\left[C-\frac{e^x}{2m}\right]$
18. $\sin y=(1+x)(e^x+C)$
19. $y^n=x-\frac{1}{n}+Ce^{-nx}$
20. $(y-x)^2[Ce^{x^2}-x^2-1]=1.$

2-3·5. அமைப்பு 5 :

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$$

என்ற அமைப்பைப் பார்ப்போம். இங்கு $xy=z$ என ஈடு செய்தால்

$$x\frac{dy}{dx}+y=\frac{dz}{dx} \text{ என வரும்.}$$

இவற்றைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்தால்

$$yf(z)+xg(z)\left[\frac{\frac{dz}{dx}-y}{x}\right]=0$$

எனப்பெறலாம். அதாவது

$$xy\,f(z)+xg(z)\left\{\frac{dz}{dx}-y\right\}=0$$

அதாவது

$$z\,f(z)+xg(z)\,\frac{dz}{dx}-zg(z)=0$$

எனவே

$$z\,\{f(z)-g(z)\}\,dx+xg(z)dz=0$$

இது அமைப்பு (1)இல் உள்ளது. எனவே

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{g(z)}{z\{f(z)-g(z)\}}dz=C$$

என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : $y(1+2xy)dx+x(1-xy)dy=0$ என்பதின் தீர்வு காண்க.

$xy=z$ என ஈடு செய்ய

$$y+x\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\left[\frac{\frac{dz}{dx}-y}{x}\right]$$

இவற்றைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய

$$y(1+2z)+x(1-z)\left[\frac{\frac{dz}{dx}-y}{x}\right]=0$$

$$\therefore\quad xy(1+2z)+x(1-z)\frac{dz}{dx}-xy(1-z)=0$$

$$\therefore\quad z[(1+2z)-(1-z)]+x(1-z)\frac{dz}{dx}=0$$

$$\therefore \qquad 3z^2dx + x(1-z)dz = 0$$

$$\therefore \qquad \frac{dx}{x} + \frac{1-z}{3z^2}dz = 0$$

தொகை காண

$$\log x - \frac{1}{3z} - \frac{1}{3}\log z = C$$

$$\therefore \qquad \log\left\{\frac{x}{z^{1/3}}\right\} = \frac{1}{3z} + C$$

$$\therefore \qquad \frac{Ax}{z^{1/3}} = e^{1/3z}$$

அல்லது $\qquad Ax = e^{1/3z}z^{\frac{1}{3}}$

அல்லது $\qquad A^3x^3 = e^{1/z}.z$

அல்லது $\qquad Kx^2 = ye^{1/xy}$

என்பது பொதுத் தீர்வாகும். இங்கு $x = 1$, $y = 1$ என்ற கட்டுப்பாடு இருப்பின் ஒரு சிறப்புத் தீர்வு பெற

$$K\cdot 1^2 = 1\cdot e^{\frac{1}{1}} \text{ எனக் கிட்டும்.}$$

அதாவது

$$ex^2 = ye^{\frac{1}{xy}}$$

அல்லது $\qquad x^2 = ye^{\frac{1-xy}{xy}}$

என்ற சிறப்புத் தீர்வு கிட்டும்

பயிற்சி 2·5

தீர்வு காண்க:

1. $(xy^2+y)dx+(x^2y-x)dy = 0$
2. $(x^3y^3+x^2y^2+xy+1)ydx+(x^3y^3-x^2y^2-xy+1)xdx = 0$
3. $y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$
4. $(y-xy^2)dx-(x+x^2y)dy = 0$
5. $(1-xy+x^2y^2)dx+(x^3y-x^2)dy = 0$

விடைகள்

பயிற்சி 2·5

1. $y = Axe^{xy}$
2. $x^2y^2-2xy \log Cy = 1$
3. $2x^2y^2\log y-2xy-1 = Cx^2y^2$
4. $x = Cye^{xy}$
5. $\log x = xy-\frac{1}{2}x^2y^2+A$

பயிற்சி 2·6

பலவிதச் சமன்பாடுகள்

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வுகள் காண்க. ஏதாவது கட்டுப்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் சிறப்புத் தீர்வுகளையும் காண்க.

1. $xy\dfrac{dy}{dx}+(x^2+1)(y^2-1) = 0$
2. $xy(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}-y^2 = 0$
3. $\log y\dfrac{dy}{dx}+xy\log(1+x) = 0$
4. $\dfrac{dy}{dx}+2x\cosh x\cosh y = 0$
5. $x+y\dfrac{dy}{dx} = x^2+y^2$ ($z = x^2+y^2$ என ஈடு செய்க)
6. $\sqrt{1+x^2}\dfrac{dy}{dx} = xe^y$ (கட்டுப்பாடு $x = 0$, $y = 0$)
7. $y-x\dfrac{dy}{dx} = x+y\dfrac{dy}{dx}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$
9. $(x^2+2xy)dy+(2xy+y^2+3x^2)dx = 0$
10. $\left(x\cos\dfrac{y}{x}+y\sin\dfrac{y}{x}\right)y-\left(y\sin\dfrac{y}{x}-x\cos\dfrac{y}{x}\right)x\dfrac{dy}{dx} = 0$

[குறிப்பு: $\frac{y}{x} = v$ என ஈடு செய்க]

11. $(x+y)(dx-dy) = dx+dy$

12. $x\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = y$

13. $3x^2y^2+\cos(xy)-xy\sin(xy)$
$$+\frac{dy}{dx}\{2x^3y-x^2\sin(xy)\} = 0$$

[குறிப்பு: $xy = z$ என ஈடு செய்க.]

14. $\frac{dy}{dx} = 2y\tan x+y^2\tan^2 x$

15. $\left(\frac{x+y-a}{x+y-b}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+a}{x+y+b}$

16. $(1+y^2)+\left(x-^{e-\tan^{-1}y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$

17. $\frac{dy}{dx}+y\cos x = y^n\sin 2x$

18. $(x+y+1)\frac{dy}{dx} = 1$

19. $2\int v\,dx = v-\log(1+v)+A$ என்ற சமன்பாட்டில் v என்பது x இன் சார்பு, A ஒரு மாறிலி; மேலும் $x=0$, $v=0$ என்ற கட்டுப்பாடு பொருத்தம் உடையதாயின், $v=2e^x\sinh x$ என நிறுவுக.

20. $\cot\theta\,d\rho+\rho\,d\theta = 0$

21. $xy\,dy=(y+1)(1-x)dx$

22. $dx+(1-x^2)\cot y\;dy=0$

23. $dr+(2r\cot\theta+\sin 2\theta)d\theta=0$

24. $\frac{di}{dt}-6i=10\sin 2t$

25. $(4x^2y-6)+x^3\frac{dy}{dx} = 0$ [$xy=z$ என ஈடு செய்க]

26. $\dfrac{dy}{dx}+2xy+xy^4=0$

27. $(2x^2+3y^2-7)x\,dx-(3x^2+2y^2-8)y\,dy=0$

[$u = x^2$, $v = y^2$ என ஈடு செய்க]

விடைகள்

பயிற்சி 2·6

1. $(y^2-1)x^2 e^{x^2}= C$
2. $y^2 = \dfrac{Ax^2}{x^2+1} - 1$
3. $(\log y)^2+(x^2-1)\log(1+x)-x-\frac{1}{2}x^2 = A$
4. $y=\log\tan\{\cosh x-x\sinh x+A\}$
5. $y^2 = A e^{2x}-x^2$
6. $\sqrt{1+x^2}+e^{-y} = C$ (பொது)
   $\sqrt{1+x^2}+e^{-y} = 2$ (சிறப்பு)
7. $e^{\tan^{-1}(y/x)} = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}$
8. $Cx^2=y+\sqrt{x^2+y^2}$
9. $x(y^2+xy+x^2) = C$
10. $xy\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)= C$
11. $x+y=C\,e^{(x-y)}$
12. $Cx = e^{x/y}$
13. $x(x^2y^2+\cos xy)=C$
14. $\sec^2 x=y(C-\frac{1}{3}\tan^3 x)$
15. $(b-a)\log[(x+y)^2-ab]=2(x-y)+C$
16. $x\,e^{\tan^{-1}y}=\tan^{-1}y+C$
17. $\dfrac{1}{y^{(n-1)}}=C\,e^{(n-1)\sin x}+2\sin x+\dfrac{2}{n-1}$

18. $x = C\,e^{y} - y - 2$

20. $\rho = C \cos\theta$

21. $x + y = \log Ax(y+1)$

22. $\sin^2 y = C\,\dfrac{1-x}{1+x}$

23. $2r\sin^2\theta + \sin^4\theta = C$

24. $i = -\frac{1}{2}(3\sin 2t + \cos 2t) + C\,e^{6t}$

25. $y = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{C}{x^4}$

26. $\dfrac{1}{y^3} = -\frac{1}{2} + A\,e^{3x^2}$

27. $(x^2 - y^2 - 1)^5 = C(x^2 + y^2 - 3)$.

3. முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் பொருந்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(Differential Equations of the First order Exact Differential Equations)

3-1. $F(x,y) = C$ என்ற சமன்பாட்டில் முதல் வகைக்கெழு வான $\dfrac{dy}{dx}$ கண்டு, அதையொட்டி அமைக்கப்பட்ட முதல் வரிசைச் சமன்பாடு முதல் வரிசைப் பொருந்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக

$$x^3-y^3+x^2y-xy^2+xy = C$$

என்ற சமன்பாட்டில் $\dfrac{dy}{dx}$ கண்டால்

$$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}+2xy+x^2\frac{dy}{dx}-y^2$$

$$-2xy\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}+y = 0$$

எனப் பெறப்படும். இதை மாற்றி எழுதினால்

$$\frac{dy}{dx}(x^2-2xy-3y^2+x)+(3x^2+2xy-y^2+y) = 0$$

என்ற முதல் வரிசைச் சமன்பாடு கிடைக்கும். இதையே

$$(3x^2+2xy-y^2+y)dx+(x^2-2xy-3y^2+x)dy = 0$$

என எழுதலாம். இது ஒரு பொருந்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும். இதன் தீர்வு

$$x^3-y^3+x^2y-xy^2+xy = C.$$

இவ்விதமாக அமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரு முதல் வரிசைப் பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும். இதன் பொது அமைப்பு

$$Mdx+Ndy = 0$$

எனவிருக்கும்.

3-1·1. ஆனால், $Mdx+Ndy=0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடெனக் கண்டு கொள்வது எப்படி? அப்படிக் கொண்டபின் அதன் தீர்வு காணும் முறை என்ன? இவைகளைப்பற்றி ஈண்டுக் காண்போம்.

$Mdx+Ndy$ என்ற சமன்பாடு ஒரு பொருத்தமான (வகைக்கெழு) சமன்பாடாக இருக்க வேண்டுமென்றால், $Mdx+Ndy$ என்பது ஒரு சரியான வகையீட்டுக்குரிய நுண்ணெண் (Perfect Differential) ஆக இருத்தல் வேண்டும். அப்படியிருக்க வேண்டுமென்றால், $F(x,y)$ என்ற ஓர் சார்பின் மேல் "வகைக்கெழுச் செயல்" செய்து மட்டுமே $Mdx+Ndy$ என்பது பெறப்பட்டிருக்க வேண்டும். அப்போது

$$dF = Mdx+Ndy \text{ ஆகும்.}$$

ஆனால் $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$ என நமக்குத் தெரியும். எனவே மேலிரண்டு தொடர்களையும் ஒப்பிட்டால்

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M ; \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

என்ற இரு கட்டுப்பாடுகள் கிட்டும். இவ்விரு கட்டுப்பாடுகளிலிருந்து

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

என்றும்

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

எனவும் பெறலாம்.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

என்பதால் நமக்கு

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{......}(A)$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் M, N இரண்டும் அமைவது புலப்படுகின்றது. எனவே

$$Mdx+Ndy = 0$$

என்பது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடெனில் (A) என்ற தொடர்பு

உண்மையாகும். இது வேண்டிய கட்டுப்பாடு (Necessary condition) எனப்படும்.

மறுதலையாக

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ஆனால் $Mdx+Ndy$ என்பது ஒரு 'பொருத்தமான வகையீட்டுக்குரிய நுண்ணெண்ணாகும் என்று நிறுவலாம்.

$$\int Mdx = V$$

எனக் கொள்வோம். அப்போது

$$\frac{\partial V}{\partial x} = M;$$

எனவே

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ [கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.]}$$

ஆகவே

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

எனவே

$$N = \frac{\partial V}{\partial y} + \phi'(y);$$

இங்கு $\phi'(y)$ என்பது y மட்டிலுமே சார்ந்த சார்பின் வகைக்கெழு.

எனவே

$$\begin{aligned} Mdx+Ndy &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \phi'(y)dy \\ &= d[V+\phi(y)] \\ &= \text{வகையீட்டுக்குரிய நுண்ணெண்} \end{aligned}$$

ஆகவே $Mdx+Ndy = 0$ என்பதின் தீர்வு

$$= V+\phi(y) = C$$

என்பதாகும். எனவே $Mdx+Ndy = 0$ என்பது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாக இருப்பதற்கு

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

என்ற கட்டுப்பாடு தேவையானதும் போதுமானதும் ஆகும். இதை ஒரு தேற்றமாகக் கொள்ளலாம்.

3–1·2. பொருத்தமான சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்:

$Mdx+Ndy = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ என்பது பொருத்தமாகி, அது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடு என்று முடிவு கட்டப்பட்ட பின்பு செயல்முறையில் பின் கூறப்படும் வழியில் தீர்வு காணலாம். முதலில் y ஒரு மாறிலியெனக்கொண்டு $\int Mdx$இன் மதிப்பறிக. இப்படிப் பெறப்பட்ட உறுப்புகள் அல்லாது $\int Ndy$இல் தோன்றும் உறுப்புகளோடு முதற்கண்ட உறுப்புகளைக் கூட்டி C என்ற மாறிலிக்குச் சமம் செய்க. மாறாக

x ஒரு மாறிலியெனக் கொண்டு $\int Ndy$இன் மதிப்பறிக. இப்படிப் பெறப்பட்ட உறுப்புகள் அல்லாது $\int Mdx$இல் தோன்றும் உறுப்புகளோடு முதற்கண்ட உறுப்புகளைக் கூட்டி C என்ற மாறிலிக்குச் சமம் செய்க. இதில் எந்த முறையிலும்

$$Mdx+Ndy = 0$$

என்ற பொருத்தமான சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காணலாம். ஒரு முறைப்படி கண்ட தீர்வும் மற்றொரு முறைப்படி கண்ட தீர்வும் செய்முறையைச் சரிபார்க்கப் பயன்படும்.

குறிப்பு: மேற்கூறிய வழியைப் பின்வருமாறும் கூறலாம்.

(i) yஐ மாறிலியாகக் கொண்டு

$\int Mdx$ மதிப்பைக் காண்க.

(ii) Ndyஇல் x அற்ற உறுப்புக்களை yஐப் பொருத்து தொகை காண்க.

(iii) (i), (ii) இரண்டிலும் வரும் உறுப்புகளைக் கூட்டி C என்ற மாறிலிக்கு ஈடு செய்க.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$x(x^2+y^2-a^2)dx+y(x^2+y^2+a^2)dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இங்கு $M = x(x^2+y^2-a^2)$; $N = y(x^2+y^2+a^2)$

மேலும் $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy$. எனவே இது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடு. yஐ ஒரு மாறிலியெனக் கொள்க. அதையொட்டி

$$\int Mdx = \int (x^3+xy^2-xa^2)dx$$
$$= \frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{a^2x^2}{2}$$

இதைப்போல்

$$\int N dy = \int (yx^2+y^3+a^2y)dy$$
$$= \frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^2a^2}{2}$$

எனவே தீர்வு

$$\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{a^2x^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{a^2y^2}{2}=C$$

அதாவது, $2x^2y^2+x^4-2x^2a^2+y^4+2a^2y^2 = C'$ (C' ஒரு மாறிலி.)

எடுத்துக்காட்டு 2 : தீர்வு காண்க.

$$(5x^4+3x^2y^2-2xy^3)dx+(2x^3y-3x^2y^2-5y^4)dy = 0$$

ஈண்டு
$$M = 5x^4+3x^2y^2-2xy^3$$
$$N = 2x^3y-3x^2y^2-5y^4$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y}= 6x^2y-6xy$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y-6xy$$

எனவே $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$\int M dx = \int (5x^4+3x^2y^2-2xy^3)dx$$
$$= x^5+x^3y^2-x^2y^3$$

Ndyஇல் x அற்ற உறுப்பு $-5y^4$. இதை yஐப் பொருத்துத் தொகைப்படுத்தினால்

$$\int -5y^4dy = -y^5$$

எனவே தீர்வு

$$x^5+x^3y^2-x^2y^3-y^5=C$$

குறிப்பு : எடுத்துக்காட்டு (1)ஐப் பின்வருமாறும் தீர்க்கலாம். கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$x^3dx+(xy^2dx+x^2ydy)-a^2xdx+y^3dy+a^2ydy=0$$

என எழுதலாம். இதில்

$$xy^2dx+x^2ydy = \frac{d(x^2y^2)}{2}$$

என்று பார்த்தவுடன் விளங்கும். எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை உறுப்புறுப்பாகத் தொகை காணின்

$$\int x^3dx+\tfrac{1}{2}\int d(x^2y^2)-\int a^2xdx+\int y^3dy+a^2\int ydy=C$$

அதாவது, $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{a^2x^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{a^2y^2}{2}=C$

அதாவது, $x^4+y^4+2x^2y^2-2a^2x^2+2a^2y^2=C'$

பயிற்சி 3·1

பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமான சமன்பாடுகளாவெனச் சோதித்துப் பின்னர் அவற்றின் தீர்வுகளைக் காண்க.

1. $(x^2-yx^2)\frac{dy}{dx}+(y^2+x^2y^2)=0$
2. $(x^2-x+y^2)dx-(ye^y-2xy)dy=0$
3. $ydx-xdy-3x^2y^2e^{x^3}dx=0$
4. $(2xy+y-\tan y)dx+(x^2-x\tan^2y+\sec^3y)dy=0$
5. $(2y\sin x-\cos y)dx+(x\sin y-2\cos x)dy=0$
6. $(e^y+1)\cos x\, dx+e^y\sin x\, dy=0$
7. $(x^2+y^2)^n(xy^2dx-x^2ydy)=0$ என்பது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடானுல், nஇன் மதிப்பென்ன? கண்டபின் தீர்வு காண்க.

விடைகள்

பயிற்சி 3·1

1. $\frac{x+y}{xy}+\log y=x+C$
2. $2x^3-3x^2+6xy^2=6e^y(y-1)+C$
3. $ye^{x^3}=x+C$
4. $x^2y+xy+(1-x)\tan y=C$
5. $x\cos y+2y\cos x=C$
6. $(e^y+1)\sin x=C$
7. $n=-2$; $y^2=Ax^2$.

3-2. முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் :

உரிய தொகைகாண் காரணிகள்—பொருத்தமான சமன்பாடுகளாக மாற்றக் கூடியவை (Integrating factors—Equations that can be transformed into exact differential equations).

$Mdx+Ndy=0$ என்ற சமன்பாடு நேரடியாக ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாக இல்லாமல் இருக்கலாம் $\left(\text{அதாவது } \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right)$. ஆனல் இடப் புறத்திலுள்ள $(Mdx+Ndy)$ஐ $F(x, y)$ என்ற ஒரு கோவையால் பெருக்கினல் சில சமயம்

$$F(x, y)\,Mdx+F(x, y)\,Ndy=0$$

என்ற சமன்பாடு ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாக வரலாம். அதாவது

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F(x, y)M\} = \frac{\partial}{\partial x}\{F(x, y)N\}$$

என்பது உண்மையாகலாம். அப்போது

$$F(x, y)Mdx+F(x, y)Ndy=0$$

என்பதின் தீர்வை

$$Mdx+Ndy=0$$

என்பதின் தீர்வாகக் கொள்ளலாம்.

3-3. தொகைகாண் காரணி :

வரையறை : நேரடியாக ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாயில்லாத ஒரு வகைக்கெழுச்சமன்பாட்டை ஒரு குறிப்பிட்ட சார்பினல் இரு பக்கமும் பெருக்கும் போது, பெறப்படும் புதுச் சமன்பாடு ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாக அமையுமானல் அப்பெருக்கும் சார்பைத் தொகை காண் காரணி எனக் கூறுவது மரபு.

3-2 இல் கூறியபடி $F(x, y)$ என்பது $Mdx + Ndy = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய ஒரு தொகைகாண் காரணியாகும். முன்பு 2-3·3.1இல் $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $e^{\int P dx}$ என்பது ஒரு தொகைகாண் காரணியாகும் என்று கூறப்பட்டதை மறுபடியும் ஒரு முறை இப்பின்னணியில் பார்க்கவும்.

இந்நிலையில்

$$F(x,y)\,Mdx + F(x,y)\,Ndy = 0$$

என்பதை,

$$d[\Psi(x, y)] = 0$$

என எழுதி

$$\Psi(x, y) = C$$

என்ற தீர்வு காணலாம். இதுவே

$$Mdx + Ndy = 0$$

என்பதின் தீர்வு.

எடுத்துக்காட்டு :

$$ydx - xdy = 0$$

என்ற சமன்பாட்டில்

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

ஆனால் $\frac{1}{y^2}$ ஆல் $(ydx-xdy)$ஐப் பெருக்கினால்

$$\frac{ydx-xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

எனக் கிட்டும்.

$$\therefore \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = C$$

என்பது தீர்வாகும்

3-4. தேற்றம் : தொகைகாண் காரணிகள் எண்ணிலடங்கா.

தெரிப்பு : $Mdx + Ndy = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய தொகைக் காரணி μ என்ற ஒரு சார்பெனக் கொள்வோம். அப்போது

$$\mu(Mdx + Ndy) = du$$

என்று கிட்டும். எனவே

$$u = C$$

என்பது ஒரு தீர்வாகும்.

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0$$

என்பதை இரு பக்கங்களிலும் $f(u)$ ஆல் பெருக்க

$$\mu f(u)(Mdx + Ndy) = 0$$

எனக் கிட்டும். ஆகவே

$$\mu f(u)(Mdx + Ndy) = f(u)du$$

எனவே $\mu f(u)$ என்பதும் $Mdx + Ndy = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தொகைகாண் காரணியாகும். $f(u)$ என்பது எண்ணிலடங்கா அமைப்புகளில் வரலாமாதலின்

$$Mdx + Ndy = 0$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு எண்ணிலடங்காத தொகைகாண் காரணிகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு :

முன் 3-3 இல்

$$ydx - xdy = 0$$

என்பதற்கு $\frac{1}{y^2}$ ஒரு தொகைகாண் காரணி எனக் கண்டோம். ஈண்டு $\cos\left(\frac{x}{y}\right)$. $\frac{1}{y^2}$ என்பதும் ஒரு தொகைகாண் காரணி என நிறுவுவோம்.

$$\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y^2}\left(ydx - xdy\right)$$

$$= \cos\frac{x}{y}\ d\left(\frac{x}{y}\right)$$

எனவே

$$\cos\frac{x}{y}\ d\left(\frac{x}{y}\right)=0$$

அதாவது, $\sin\frac{x}{y}=C_1$

என்பதும் ஒரு தீர்வாகும். இது புதியதொரு தீர்வல்ல; ஏனெனில் $\frac{x}{y}$ மாறிலியானல், $\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ உம் ஒரு மாறிலியாகத்தானிருக்க வேண்டும். இத்தீர்வு $ydx-xdy=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுதான் என்பதைப் பின்வருமாறும் காணலாம். தீர்விற்கு இருபக்கமும் xஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காணின்,

$$0=\frac{d}{dx}\left[\sin\frac{x}{y}\right]$$

$$=\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

எனவே, நமக்கு $y-x\frac{dy}{dx}=0$

என்று கிட்டும். அதாவது

$$y\,dx-x\,dy=0$$

என்றுகின்றது. எனவே $y\,dx-x\,dy=0$ க்கு $\sin\left(\frac{x}{y}\right)=C_1$ என்பது ஒரு பொருத்தமான தீர்வாகின்றது.

3–5. சில தொகைக் காரணிகள் :

$Mdx+Ndy=0$ என்பது சமன்பாடு :

(i) $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)$ எனில்

$e^{\int f(x)dx}$ ஒரு தொகைக் காரணியாகும்.

சமன்பாட்டை $e^{\int f(x)dx}$ ஆல் இருபுறமும் பெருக்க,

$$e^{\int f(x)dx}M\,dx+e^{\int f(x)dx}Ndy=0$$

என்றாகின்றது. இதை $M_1dx+N_1dy=0$ என எழுதலாம்.

மேலும் $$\frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{e^{\int f(x)dx}M\right\}$$

$$=e^{\int f(x)dx}\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{e^{\int f(x)dx}N\right\}$$

$$=f(x)\,e^{\int f(x)dx}N+e^{\int f(x)dx}\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$=e^{\int f(x)dx}\left\{f(x)N+\frac{\partial N}{\partial x}\right\}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial M_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$$=e^{\int f(x)dx}\left\{\frac{\partial M}{\partial y}-Nf(x)-\frac{\partial N}{\partial x}\right\}$$

$$=0\left[\text{ஏனெனில் }\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf(x)\right]$$

எனவே $Mdx+Ndy=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $e^{\int f(x)dx}$ என்பது ஒரு தொகைகாண் காரணியாகும்.

(ii) $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=\phi(y)$ ஆனால்

$e^{\int\phi(y)dy}$ என்பது ஒரு தொகைகாண் காரணியாகும்.

(முன் மாதிரியே நிறுவலாம்).

(iii) (a) $Mdx+Ndy=0$ என்பது சமபடித்தான வகையீட்டுச் சமன்பாடாக இருந்து $Mx+Ny \neq 0$ ஆனால் $\dfrac{1}{Mx+Ny}$ என்பது ஒரு தொகைகாண் காரணியாகும்.

$\dfrac{1}{Mx+Ny}$ ஆல் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினை இருபுறமும்

பெருக்க $$\frac{M}{Mx+Ny}dx+\frac{N}{Mx+Ny}dy=0$$

என்று கிட்டும். $\dfrac{M}{Mx+Ny}=M_1$ எனவும் $\dfrac{N}{Mx+Ny}=N_1$ எனவும் கொண்டு $\dfrac{\partial M_1}{\partial y}=\dfrac{\partial N_1}{\partial x}$ என நிறுவித் தெரிப்புக் காண்க.

(b) $Mx+Ny=0$ எனின் $\dfrac{M}{N}=-\dfrac{y}{x}$.

இதை $Mdx+Ndy=0$ இல் ஈடு செய்ய

$$-\frac{Ny}{x}dx+Ndy=0$$

என்று கிட்டும். $N-0$ ஆதலால்

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

எனவே $x=Cy$ என்பது தீர்வாகும்.

(iv) (a) $Mdx+Ndy=0$ என்பதை

$$y\,f(xy)dx+xg(x,y)dy=0$$

என்ற அமைப்பில் மாற்றி அமைக்க முடியுமென்றால், $Mx-Ny \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டின்கண் $\dfrac{1}{Mx-Ny}$ என்பது ஒரு தொகைகாண் காரணியாகும்.

$$\frac{yf(xy)}{Mx-Ny}dx+\frac{xg(xy)}{Mx-Ny}dy$$

என்பது ஒரு நிறை நுண்ணெண்ணாகும். அதாவது

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{yf(xy)}{Mx-Ny}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{xg(xy)}{Mx-Ny}\right]$$

என நிறுவலாம். இதைப் பயிற்சியாகக் கொள்க.

(b) $Mx-Ny=0$ எனில் $Mx=Ny$.

எனவே $Mdx+Ndy=0$ என்ற சமன்பாடு

$$N\frac{ydx}{x}+Ndy=0$$

என்றாகும். எனவே

$$N\{ydx+xdy\}=0$$

என்று கிட்டும். $N \neq 0$ ஆதலின்

$$ydx+xdy=0$$

என்றாகின்றது. எனவே இதன் தீர்வு

$$xy=C$$

என்று பெறலாம்.

(v) மேலும் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சில தொகைக் காரணிகளை வசதிக்கேற்பப் பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம்.

உறுப்பு	தொகைக் காரணி	நிறை நுண்ணெண்
(a) $xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$
(b) $xdy-ydx$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{-(ydx-xdy)}{y^2}=d\left(\frac{-x}{y}\right)$
(c) $xdy-ydx$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=d\left(\log\frac{y}{x}\right)$
(d) $xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

$$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=d\left[\tan^{-1}\frac{y}{x}\right]$$

(e) $xdy+ydx$ $\qquad \dfrac{1}{(xy)^n}$ $\qquad \dfrac{xdy+ydx}{(xy)^n}$ $(n \neq 1)$

$$= d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right];$$

$\dfrac{1}{xy}$ $\qquad \dfrac{xdy+ydx}{xy}$ $(n=1)$

$$= d\log(xy)$$

(f) $xdx+ydy$ $\qquad \dfrac{1}{(x^2+y^2)^n}$ $\qquad \dfrac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^n}$ $(n \neq 1)$

$$= d\left\{\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right\}$$

$\dfrac{1}{x^2+y^2}$ $\qquad \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ $(n=1)$

$$= d\left\{\tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right\}$$

பயிற்சி 3·2

1. $(2x-y)\,dx+(2y+x)dy = 0$ என்பதற்கு $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ ஒரு தொகைக் காரணி என நிறுவித் தீர்வு காண்க.

2. $\cos x \cos y$ என்பது ஒரு தொகைக் காரணியெனக்கொண்டு $\tan y\, dx+\tan x\, dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

3. $(2y-x^2)dx+xdy = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $f(x)$ என்ற சார்பு ஒரு தொகைக் காரணி. தொகைக் காரணி கண்டு தீர்வு காண்க.

4. $y(1-x)dx-xdy = 0$ என்பதற்குக் கேள்வி (3) போல் தீர்வு காண்க.

5. $ydx-xdy = 0$ என்பதற்கு, $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{1}{(x-y)^2}$ என்பவை தொகைக் காரணிகள் என நிறுவி, தீர்வுகள் கண்டு அவை யாவும் ஒன்றே எனக் காண்க.

6. $(x^2-2xy-y^2)dx+(x^2+2xy-y^2)dy=0$ என்பதற்கு $\dfrac{1}{(x-y)^2}$ ஒரு தொகைக் காரணி என நிறுவித் தீர்வு காண்க.

7. $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$ என்பதற்கு $\dfrac{1}{(x+y)^2}$ ஒரு தொகைக் காரணியென நிறுவித் தீர்வு காண்க.

8. $xdx+ydy+4y^3(x^2+y^2)dy = 0$ என்பதற்கு $\frac{1}{x^2+y^2}$ ஒரு தொகைக் காரணியென நிறுவித் தீர்வு காண்க.

பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க:

9. $(x^2+y^2+x)dx+xy\,dy = 0$

10. $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy = 0$

11. $(x^4+y^4)dx-xy^3dy = 0$

12. $y^2dx+(x^2-xy-y^2)dy = 0$

13. $y(x^2y^2+2)dx+x(2-2x^2y^2)dy = 0$

14. $ydx+x(1-3x^2y^2)dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $\frac{1}{(xy)^k}$ ஒரு தொகைக் காரணியெனில் k கண்டு, தீர்வு காண்க.

15. $xdx+ydy+(x^2+y^2)^2dx = 0$ என்பதற்கு $\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ ஒரு தொகைக் காரணியெனக் கண்டு தீர்வு காண்க.

16. $xdy-ydx+y(x^2+y^2)dy+x(x^2+y^2)\,dx = 0$ என்பதற்கு $\frac{1}{x^2+y^2}$ ஒரு தொகைக் காரணியெனில் தீர்வு காண்க.

பின் வருவனவற்றிற்குத் தொகைக் காரணி கண்டு தீர்வு காண்க.

17. $ydx+x(x^2y-1)dy = 0$

18. $ydx-xdy+\log x\,dx = 0$

19. $(3x^2+y^2)dx-2xydy = 0$

20. $(x+y)dx-(x-y)dy = 0$

21. $xdy-ydx = 0$ என்பதற்கு $\frac{1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)$ என்பது ஒரு தொகைக் காரணியென நிறுவுக.

22. $\{y+xf(x^2+y^2)\}dx+\{yf(x^2+y^2)-x\}dy = 0$ என்பது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடல்ல என்று நிறுவுக. மேலும் $\frac{1}{x^2+y^2}$ அதற்கு ஒரு தொகைக் காரணியென நிறுவி

(i) $\{y+x(x^2+y^2)^2\}dx+\{y(x^2+y^2)^2-x\}dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வையும்,

(ii) $\{y+x\cos(x^2+y^2)\}dx+\{y\cos(x^2+y^2)-x\}dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வையும் காண்க.

குறிப்பு: இந்த விதத்தில் பல வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைக்கலாமென்பதைக் கண்டு கொண்டு நான்கைந்து சமன்பாடுகள் [$f(x^2+y^2)$ = ஓரோர் அமைப்பு] அமைத்து அவற்றின் தீர்வுகளைக் காண்க.

விடைகள்

பயிற்சி 3·2

1. $\log(x^2+y^2)+\tan^{-1}\dfrac{y}{x} = A$
2. $\sin x \sin y = A$
3. $f(x) = x\,;\ x^4-4x^2y = A$
4. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}\,;\ y = Axe^{-x}$
5. $y = Ax$
6. $x^2+y^2 = A(x-y)$
7. $x^2+y^2 = A(x+y)$
8. $(x^2+y^2)e^{2y^4} = C$
9. $3x^4+4x^3+6x^2y^2 = C$
10. $y^3x^2e^y+x^2y^2+x = Cy^3$
11. $y^4 = 4x^4\log x+Cx^4$
12. $\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)y^2 = C$
13. $x = Cy^2\,e^{\frac{1}{x^2y^2}}$
14. $y^6e^{\frac{1}{x^2y^2}} = C\,;\ h = 3$
15. $(A+2x) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$
16. $x^2+y^2+2\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = C$

17. $\frac{y}{x^3}$; $3y^2-2x^2y^3 = Cx^2$

18. $\frac{1}{x^2}$; $y+\log x = Cx-1$

19. $\frac{1}{x^2}$; $3x^2-y^2 = Cx$

20. $\frac{1}{x^2+y^2}$; $\sqrt{x^4+y^2} = C\, e^{\tan^{-1}(y/x)}$

22. (i) $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 = C$

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\sin(x^2+y^2) = C.$

3-6. சில சிறப்பு முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் :

முன் பகுதிகளில் முதல் வரிசை, முதற்படிச் சமன்பாடுகள் குறிப்பிட்ட திட்ட அமைப்புகளில் இருக்கும்போது அவற்றின் தீர்வு காணும் முறைகளைக் கண்டோம். இப்பகுதியில் மற்ற வேறு அமைப்புகளில் தோன்றக்கூடிய முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறைகளை ஒவ்வொன்றாகப் பார்ப்போம்.

இப்பகுதியில் p என்பது $\frac{dy}{dx}$ ஐக் குறிக்கும்.

3–6·1. அமைப்பு 1: $f(x, y, p)=0$ என்ற அமைப்பு

அதாவது, $p^n+Z_1p^{n-1}+Z_2p^{n-2}+\dots+Z_n=0 \dots\dots (A)$

எனக் கொள்ளலாம். இதில் $Z_1, Z_2, \dots\dots, Z_n$ என்பவை x, y சார்ந்த சார்புகளாகக் கொள்ளலாம்.

இவ்விதச் சமன்பாடுகள் பின் கூறப்படும் மூன்று வழிகளில் தீர்க்கப்படலாம்.

1. p இன் மதிப்பு கண்டு தீர்வுகாணல்
2. x இன் மதிப்பு கண்டு தீர்வுகாணல்
3. y இன் மதிப்பு கண்டு தீர்வுகாணல்.

இம்மூன்று வழிகளில் எம்முறையில் தீர்வு காண இயலும் என்பது சமன்பாட்டின் தன்மையைப் பொருத்துத்தான் கூற முடியும்.

3-6·1 (a). (A) என்ற சமன்பாட்டை, pஇல் ஒரு nபடிச் சமன்பாடாகக் கொண்டு, இதை pஇல் ஒன்றும்படிச் சினைகளின் பெருக்கலாக அமைக்க முடிந்தால்—அதாவது

$$\{p-f_1(x, y)\}\{p-f_2(x, y)\}\cdots\{p-f_n(x, y)\}=0$$

என்று பிரிக்க முடிவதாகக் கொள்வோம். அப்போது

$$\begin{aligned} p &= f_1(x, y) \\ p &= f_2(x, y) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p &= f_n(x, y) \end{aligned}$$

என்ற n தீர்வுகள் pக்குக் கிட்டும். இதில்

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y)$$

என்று ஒவ்வொரு சமன்பாட்டினையும் எழுதி, முற்பகுதிகளில் கூறப்பட்ட ஏதாமொரு அமைப்புக்கு மாற்றி

$$F_i(x, y, C_i) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

என்ற n தீர்வுகள் கிட்டும். இத்தீர்வுகள் யாவும் (A)இன் தீர்வுகளாகும். மேலும் இத்தீர்வுகளில் $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$க்குப் பதில் C என்ற மாறிலியைக் கொண்டாலும் தீர்வுகளின் பொதுத்தன்மை மாறாது. இவ்வாறு கொண்டால் (A)இன் பொதுத் தீர்வு.

$$F_i(x, y, C) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

என்ற n சமன்பாடுகளின் பெருக்குத் தொகையாகும். அதாவது,

$$F_1(x, y, C) \cdot F_2(x, y, C) \ldots\ldots F_n(x, y, C) = 0$$

என்பதாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$(p-xy)(p-x^2)(p-xy-x)=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$p = \frac{dy}{dx} = xy \qquad (1)$$

$$p = \frac{dy}{dx} = x^2 \qquad (2)$$

$$p = \frac{dy}{dx} = xy+x \qquad (3)$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகள் நமக்குக் கிட்டும்.

(1)இன் தீர்வு

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx + C_1$$

$$\therefore \quad \log y = \frac{x^2}{2} + C_1$$

அல்லது $\quad y = Ae^{\frac{x^2}{2}} \qquad (4)$

(2)இன் தீர்வு

$$\int dy = \int x^2 dx + C_2$$

$$\therefore \qquad A + y = \frac{x^3}{3} \qquad (5)$$

(3)இன் தீர்வு

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int x\,dx + C_3$$

அல்லது $\quad \log (y+1) = \frac{x^2}{2} + C_3$

அல்லது $y+1 = Ae^{\frac{x^2}{2}} \qquad (6)$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$\left[y - Ae^{\frac{x^2}{2}}\right]\left[y - \frac{x^3}{3} + A\right]\left[y - Ae^{\frac{x^2}{2}} + 1\right] = 0$$

என்பதாம்.

3-6·1 (b). (A) என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x = F(y, p) \qquad \text{......(B)}$$

என்ற ஒரு தொடர்பு கிடைக்கலாம். அப்போது இரு பக்கங்களுக்கும் y ஒட்டிய வகைக்கெழு காண

$$\frac{dx}{dy} = \phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$$

என்ற ஒரு தொடர்பு கிட்டும்.

அதாவது

$$\frac{1}{p} = \phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$$

என்ற தொடர்பு கிட்டும். இச்சமன்பாடு y, p என்ற இரு மாறிகளையும்

$\frac{dp}{dy}$ ஐயும் கொண்டது. இது நாம் முன்னறிந்த முறைகளில் ஏதாவது அமைப்பில் அமைந்தால் இதன் தீர்வு

$$\Psi(y, p) = C \qquad \ldots\ldots(C)$$

எனக் கிடைக்கலாம். இப்போது (B), (C) என்ற சமன்பாடுகள் கொண்டு pஐ நீக்க முடியுமானல் நீக்குறு (eliminant)

$$K(x, y) = D \text{ (மாறிலி)} \qquad \ldots\ldots(D)$$

எனவரும். இதுவே (A)இன் தீர்வாகும். அவ்வாறு (B), (C) கொண்டு pஐ நீக்கி நீக்குறு காண இயலாவிட்டால் (B), (C) இரண்டிலும் தீர்வு அடங்கியுள்ளது எனக் கூறினாலே தீர்வு கண்டதற்கு ஒப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$x = \frac{y}{p^2} - \frac{1}{p}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இரு பக்கங்களுக்கும் y ஒட்டிய வகைக்கெழு காண

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} - \frac{2y}{p^3}\frac{dp}{dy} + \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

கிட்டும். இதை

$$\frac{dy}{dp} + \frac{2}{p(p-1)}\, y = \frac{1}{p-1}$$

என எழுதி $\left[\left(\frac{dy}{dx} + py = Q\right)\right.$ என்ற அமைப்பினை மனதிற் கொண்டு $\left.\right]$ தீர்வு காணலாம்.

இதன் தீர்வு

$$y\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 = \log p + \frac{1}{p} + C \qquad \ldots\ldots(E)$$

என்பதாம். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டையும், (E)ஐயும் கொண்டு pஐ நீக்கச் சமன்பாட்டின் தீர்வு பெறப்படும். அல்லது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் yக்கு ஈடுசெய்து

$$x = \frac{1}{p^2}\left[\frac{p^2}{(p-1)^2}\left\{\log p + \frac{1}{p} + C\right\}\right] - \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1}{(p-1)^2}\left\{\log p + \frac{1}{p} + C\right\} - \frac{1}{p} \qquad \ldots\ldots(F)$$

எனப் பெறலாம். பின்னர் (E), (F) இரண்டும் சமன்பாட்டின்

தீர்வுகள் என்றும் கூறலாம் ; அல்லது (E), (F) இரண்டிலிருந்தும் pஐ நீக்கினால் பெறப்படும்

$$K(x, y, C) = 0$$

என்பது தீர்வாகும். (நீக்குவது எளிதாயில்லாதிருக்கலாம்).

3-6·1(C). (A) என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து

$$y = F(x,p) \qquad \ldots\ldots(G)$$

என்ற ஒரு தொடர்பு கிடைக்கலாம். அப்போது இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக்கெழு காண

$$p = \frac{dy}{dx} = \phi\left(x,\ p,\ \frac{dp}{dx}\right)$$

என்ற ஒரு தொடர்பு கிடைக்கும். இச்சமன்பாடு x, p என்ற இரு மாறிகளையும், $\frac{dp}{dx}$ ஐயும் கொண்டது. இது நாம் முன்னறிந்த அமைப்புகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் அமைந்தால், இதன் தீர்வு

$$\Psi(x,p) = C \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(H)$$

என்று கிட்டும். இப்போது (G), (H) என்ற தொடர்புகளைக்கொண்டு pஐ நீக்க முடியுமானால் நீக்குறு (Eliminant)

$$K(x,y) = D \qquad \ldots\ldots(L)$$

எனக் கிட்டும். இதுவே (A)இன் தீர்வாகும். அவ்வாறு (G), (H) கொண்டு pஐ நீக்கி நீக்குறு காண இயலாவிடின் (G), (H) என்ற இரண்டிலும் தீர்வு அடங்கியுள்ளது எனக் கூறினாலே போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$y = 2px + p^4x^2$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$y = 2px + p^4x^2 \qquad \ldots\ldots(\mathrm{I})$$

இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக்கெழு காண

$$p = \frac{dy}{dx} = 2p + 2x\,\frac{dp}{dx} + 2p^4x + 4x^2p^3\,\frac{dp}{dx}$$

$$= (2p + 2p^4x) + 2\,\frac{dp}{dx}\,(x + 2p^3x^2)$$

$$\therefore \qquad 2\,\frac{dp}{dx}\,(x + 2p^3x^2) + p + 2p^4x = 0$$

இதை

$$\left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right)(1 + 2p^3x) = 0$$

என எழுத

$$p+2x\frac{dp}{dx} = 0$$

அதாவது, $$\frac{dp}{p} + \frac{dx}{2x} = 0$$

அதாவது, $$\log p+\tfrac{1}{2}\log x = C_1$$

$$\therefore \quad p\sqrt{x} = C_2$$

$$\therefore \quad p = \frac{C_2}{\sqrt{x}} \qquad \ldots\ldots(II)$$

I, II இரண்டையும் கொண்டு pஐ நீக்கினால்

$$y = 2x\frac{C_2}{\sqrt{x}} + \frac{C_2^4}{x^4}.x^2$$

$$\therefore \quad y\sqrt{x} = 2xC_2+C_2^4\sqrt{x}$$

அல்லது $$y^2x = [2xC_2+C_2^4\sqrt{x}]^2$$

என்பது ஒரு தீர்வாகும். அடுத்தபடியாக

$$1+2p^3x = 0$$

என்பதில் $\frac{dp}{dx}$ இல்லையாதலின் இதனை விட்டுவிடலாம்.

3·6·2. கிளெய்ராட் அமைப்பு (Clairaut's form):

$$y = px+f(p)$$

இதன் தீர்வு

$$y = Cx+f(C)$$

எனப் பெறலாம். இங்கு C ஒரு மாறிலி. இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக்கெழு காண

$$p = \frac{dy}{dx} = p+x\frac{dp}{dx} +f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\therefore \quad x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{dx}\{x+f'(p)\} = 0$$

அதாவது, $$\frac{dp}{dx} = 0$$

எனவே $$p = C$$

எனக் கிட்டுகின்றது. இதைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்து pஐ நீக்கினால்

$$y = Cx+f(C)$$

என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

மேலும்

$$x+f'(p) = 0$$

என்ற சமன்பாட்டில் $\dfrac{dp}{dx}$ தோன்றவில்லையாதலால் இதை விட்டுவிடலாம். ஆனால் இது பற்றிப் பின்னர்க் காணலாம்.

பயிற்சி 3·3

பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க. இவை இப்பகுதியி லுள்ள நான்கு அமைப்பு களின்பாற்படும்.

1. $p^4-p^3(2y+3)+2p^2(1+3y)-4py=0.$

(குறிப்பு : இதை $f(p)=0$ எனக்கொண்டால் $f(0)=f(1)=f(2)=f(2y)=0$. எனவே இதைக் காரணிகளாகப் பிரிக்கலாம்.)

2. $(xp+x+y)(xp+x)(yp+x)=0$
3. $p^3-4p^2+4p-1=0$
4. $[y-p(x+1)][y-x(p+1)]=0$
5. $x=p^2+py$
6. $3p^4-py+1=0$
7. $y=4p^3+4p$
8. $x+y=p^3$
9. $p^2+2px-8x^2=0$
10. $y=px+p^3$
11. $y=px+\sqrt{a^2+p^2}$
12. $y=2px+2yp^2$
    [$y^2=u$ என ஈடு செய்க. கிளெய்ராட் அமைப்பு]
13. $p^2\sin^2 y+\cos x\sin x\sin y\, p-\cos y\sin^2 x=0$
    [$\cos y=u$; $\cos x=v$ என ஈடு செய்க, கிளெய்ராட் அமைப்பு]
14. $y=2p+\sqrt{1+p^2}$
15. $y=2px+y^2p^3$ [$y^2=z$ என ஈடு செய்க]

விடைகள்

பயிற்சி 3·4

1. $(y-c)(y-x-c)(y-2x-c)(y-ce^{2x})=0$

2. $(2xy+x^2-c)(x+y-c)(x^2+y^2-c)=0$

3. $(y-x-c)(2y-\overline{3-\sqrt{5}}x-2c)(2y-\overline{3-\sqrt{5}}x-2c)=0$

4. $[y-c(x+1)][y+x\log cx]=0$

5. $x=\dfrac{-p}{\sqrt{p^2-1}}\log\{p+\sqrt{p^2-1}\}+\dfrac{cp}{\sqrt{p^2-1}}$

   $y=-p-\dfrac{1}{\sqrt{p^2-1}}\log(p+\sqrt{p^2-1})+\dfrac{c}{\sqrt{p^2-1}}$

6. $2x=\dfrac{9p^4+1}{p^2}+A\,;\ y=\dfrac{3p^4+1}{p}$

7. $x=6p^2+4\log p+A$

   $y=4p+4p^3$

8. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடும்

   $x=\dfrac{3p^2}{2}-3p+3\log(1+p)+c$

9. $(x^2-y+c)(2x^2+y+c)=0$

10. $y=cx+c^3$

11. $y=cx+\sqrt{c^2+a^2}$

12. $y^2=cx+\dfrac{c^2}{2}$

13. $\cos y=c\cos x+c^2$

14. $x=2\log p+\log(p+\sqrt{1+p^2})+$

    $y=2p+\sqrt{1+p^2}$

15. $y^2=2cx+c^3$.

4. n–வரிசை, முதற்படிச் சமன்பாடுகள்
(n^{th} - order - First degree differential Equations)

4-1. $\dfrac{d^n y}{dx^n}+P_1\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\dfrac{d^{n-2}y}{dx^n}+\dots+P_n y = X \dots(A)$

என்பது ஒரு n வரிசை முதற்படிச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பாகும். இதில் $P_1, P_2, \dots, P_n$, X யாவும் மாறிலிகளாகவோ அல்லது x சார்ந்த சார்புகளாகவோ இருக்கலாம். இந்த அமைப்பில் உள்ள சமன்பாடு ஓர் ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (Linear equation) எனப்படும். இதில் எல்லா வரிசையிலுள்ள வகைக்கெழுக்களும் முதற்படியில் மட்டுமே இருக்கும்; மேலும் ஒரு வகைக்கெழுவுடன் மற்ருெரு வகைக்கெழு பெருக்கல் பலனில் தோன்ருது.

$\dfrac{d^n y}{dx^n}$ இன் கெழு ஒன்று என்றே கொள்ளலாம். அவ்வாறு இல்லாமல் அக்கெழு M எனின் Mஆல் முழுவதையும் வகுத்து $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ இன் கெழுவை ஒன்று என்று இருக்கும்படிச் செய்து கொள்ளலாம்.

முதல் வரிசை, முதற்படிச் சமன்பாடு

$\dfrac{dy}{dx}+Py = Q$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும் சமன்பாட்டை நாம் 2-3 3இல் பார்த்தோம். இதற்குத் தீர்வு காணும் முறை நமக்குத் தெரியும்.

4-2. துணைத் தீர்வு (Complementary function), சிறப்புத் தீர்வு (Particular integral), முழுத் தீர்வு (Complete integral).

முதலில் (A) என்ற சமன்பாட்டிற்கு முழுத் தீர்வானது

$$\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+P_n y = 0 \qquad \dots\dots(B)$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வினை ஒரு பகுதியாகக் கொண்டிருக்கும் என

நிறுவுவோம். (B)இன் ஒரு தீர்வு $y = y_1$ எனக் கொண்டால், $y = C_1 y_1$ (C_1 ஒரு மாறிலி) என்பதும் (B)இன் ஒரு தீர்வாயிருக்கும் என்பது பார்த்தாலே தெரியும். அவ்வாறு $y = y_2, y = y_3 \cdots, y = y_n$ என்பவை (B)இன் தீர்வுகளானுல்

$$y = C_2 y_2,\ y = C_3 y_3, \ldots,\ y = C_n y_n$$

என்பவையும் (B)இன் தீர்வுகளாயிருக்கும் (C_2, C_3 ..., C_n எல்லாம் மாறிலிகள்). அதுமட்டுமின்றி

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \qquad \ldots\ldots(C)$$

என்பது (B)இன் தீர்வாக இருக்கும் என்பதும் விளங்கும். $y_1, y_2, \ldots, y_n$ என்பவை நேரிய தொடர்பற்றவையாயிருப்பின் (linearly independent) $(C$ என்பது Bஇன் முழுத் தீர்வாகும்; ஏனெனில் n வரிசைச் சமன்பாட்டுக்குத் தேவையான n மாறிலிகள் தீர்வில் தோன்றுகின்றன. (B)க்கும் (A)க்கும் உள்ள வேறுபாட்டினைக் கண்டு கொள்க.

இப்போது (A)இன் ஒரு தீர்வு $y = u$ எனக் கொள்வோம். அப்போது

$$y = \sum_1^n C_r y_r + u$$

என்பதும் (A)இன் ஒரு தீர்வாக இருக்கும் எனக் காட்டலாம்.

$$y = Y + u \text{ எனக் கொள்க.} \ldots\ldots(D)$$

அதாவது இங்கு $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ எனக் கொள்ளப்படுகிறது. $y = Y + u$ஐ (A)இல் ஈடு செய்தால் அச்சமன்பாடு சரியாகின்றது. ஏனெனில்

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n(Y+u)}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}(Y+u)}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(Y+u) \\
= \quad &\frac{d^n Y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n Y \\
&+ \frac{d^n u}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n u \\
= \quad &E + F \text{ எனக் கொள்ளலாம்.}
\end{aligned}$$

$E = 0$ என்று (C) வழிப் புலப்படும். $F = X$ என்ற பகுதியைப் பொருத்தமட்டில் மேற்கூறியபடி (A)இன் ஒரு தீர்வு $y = u$ எனக் கொள்ளப்பட்டது. எனவே $y = Y + u$ என்பது (A)இன் ஒரு தீர்வு. இதுவே (A)இன் முழுத் தீர்வு எனப்படும். அதில்

Y என்ற பகுதி துணைத்தீர்வு எனப்படும்;

u என்ற பகுதி சிறப்புத் தீர்வு எனப்படும்.

அதாவது $y =$ துணைத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு என்பது முழுத்தீர்வாகும்.

4-3. முதலில் (B) இன் தீர்வுகள் பற்றிச் சற்றுக் குறிப்பாகவும் விரிவாகவும் பார்ப்போம். பின்னர் செயலிகள் என்ற தலைப்பின் கீழ் (A) இன் தீர்வுகள் காணும் முறைகளை ஆய்வோம். ஆனால், இனி இப்பகுதி முழுவதும் $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ என்பவை மாறிலிகள் எனக் கொள்ளப்பட்டுச் செய்முறைகள் விளக்கப்படும்.

4-3·1. முதலில் $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ என்பவை மாறிலிகள் எனக் கொண்டு

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + P_n y = 0 \qquad \ldots\ldots(G)$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்போம். $y = e^{mx}$ என்பது ஒரு தீர்வெனக் கொண்டால் (G)இன் இடப்புறத்தில் $y = e^{mx}$ எனவும் அதன் காரணமாக

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}, \ \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}, \ldots\ldots, \ \frac{d^n y}{dx^n} = m^n e^{mx}$$

என்று ஈடு செய்யும் போது

$$e^{mx}\{m^n + P_1 m^{n-1} + \ldots\ldots + P_n\} = 0$$

எனக் கிடைக்கின்றது. $e^{mx} \neq 0$, எனவே, m என்பது

$$m^n + P_1 m^{n-1} + \ldots\ldots + P_n = 0 \qquad \ldots\ldots(H)$$

என்ற சாதாரண இயற்கணிதச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகிறதெனத் தெரிகின்றது. ஆகவே (H) என்ற n படிச்சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு m_1 ஆனால் $y = e^{m_1 x}$ என்பது (G)இன் ஒரு தீர்வாகின்றது. ஏனெனில் இத் தீர்வினைச் சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்யச் சமன்பாட்டுக்குப் பொருத்தமாகின்றது. எனவே முன்னர் 4-2. இல் கூறியபடி $y = C_1 e^{m_1 x}$ என்பதை ஒரு தீர்வாகக் கொள்ளலாம். (C_1 மாறிலி). (H)க்கு மொத்தம் n தீர்வுகள் இருப்பதால் (மெய்யெண் தீர்வுகள், கற்பனையெண் தீர்வுகள்) அவற்றினை $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ எனக் குறிப்பிட்டால்

$$y = C_1 e^{m_1 x}; \ y = C_2 e^{m_2 x}; \ldots\ldots; \ C_n e^{m_n x}$$

என n தீர்வுகள் கிடைக்கும். மறுபடியும் முன்னர் 4-1·இல் கூறியபடி

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots\ldots + C_n e^{m_n x}$$

என்பது (G)இன் முழுத்தீர்வு. ஏனெனில் தேவைப்படும் n மாறிலிகள் உள்ளன.

4-3·2. D என்ற செயலியை முறைப்படி பயன்படுத்தி, (G) என்ற சமன்பாட்டினை,

$$(D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + \ldots\ldots + P_n)\, y = 0 \qquad \ldots\ldots(K)$$

எனவும் எழுதலாம்.

இங்கு

Dy என்பது $\dfrac{dy}{dx}$ ஐயும்

D^2y என்பது $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஐயும்

... ...

... ...

... ...

D^ny என்பது $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ ஐயும்

குறிக்கும். வகை நுண்கணிதப் பகுதியில் இக்குறியீடுகள் எடுத்துரைக்கப்பட்டிருக்கும். இனி (G) என்ற முறையிலோ (K) என்ற முறையிலோ பின்னர் தேவைக்குத் தகுந்தபடி இச்சமன்பாடுகள் குறிக்கப்படும்; இரண்டும் ஒன்றே என மனதில் கொள்ள வேண்டும்.

இப்போது (K)இல் Dக்குப் பதிலாக mஐ ஈடுசெய்தால் (H) என்ற சமன்பாடு கிட்டும் என்பதை நடைமுறைக்குப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். (G) இலிருந்தோ, (K) இலிருந்தோ இவ்வகையில் பெறப்படும் (H) என்ற சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன் பாட்டிற்குரிய துணைச் சமன்பாடு எனக் கூறப்படுவதுண்டு. இத் துணைச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ என்பவை

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + \ldots\ldots + C_ne^{m_nx}$$

என்ற தீர்வு காணப் பயன்படுகின்றன.

4-3·2·1. 4-2.இல் (A) என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய முழுத்தீர்வின் ஒரு பகுதியான

$$Y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + \ldots + C_ne^{m_nx}$$

என்ற துணைத்தீர்வினைக் கண்டோம். இப்போது இன்னும் சற்று விரிவாக

$$m^n + P_1m^{n-1} + P_2m^{n-2} + \ldots + P_n = 0 \qquad \ldots\ldots\text{(H)}$$

என்ற இயற்கணிதச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் தன்மைகளையொட்டி எப்படியெப்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் துணைத்தீர்வு அமைகிற தென்பதை விரிவாகப் பார்ப்போம். (H) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் பல விதங்களில் அமையலாம்.

1. வெவ்வேறு மெய்யெண் தீர்வுகள் (எண்ணிக்கை n).

2. சில மெய்யெண் தீர்வுகள்; சில கற்பனைத் தீர்வுகள் $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ என இரட்டை இரட்டையாக வரும்.

3. சில மெய்யெண் தீர்வுகள் மடங்குத் தீர்வுகளாக வரும் (அதாவது ஒரே தீர்வு, இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தீர்வுகள் சமமாயிருக்கும்).

4. சில கற்பனையெண் தீர்வுகள் இரட்டை, இரட்டையாகி மடங்குத் தீர்வுகளாகவும் வரும்.

துணைச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் வெவ்வேறு மெய்யெண்களாக $m_1, m_2, \ldots, m_n$ என இருப்பின்

$$Y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$$

என உடனடியாக எழுதிவிடலாம்.

4-3·2·2. துணைச் சமன்பாட்டில் $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ என்ற இரு கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளனவெனக் கொள்வோம். இந்த இரு m மதிப்புக்களுக்குரிய தீர்வுப் பகுதி

$$= Ae^{(\alpha + i\beta)x} + Be^{(\alpha - i\beta)x}$$

என்பதாம். (A, B மாறிலிகள்). கோண கணித அடிப்படையில்

$$\begin{aligned} Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x} &= e^{\alpha x}\{Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}\} \\ &= e^{\alpha x}\{A(\cos\beta x + i \sin\beta x) \\ &\qquad + B(\cos\beta x - i\sin\beta x)\} \\ &= e^{\alpha x}\{C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\} \end{aligned}$$

என எழுதலாம். C_1, C_2 வேறு வேறு மாறிலிகள். எனவே $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ என்ற துணைத் தீர்வுகளுக்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வுப் பகுதி $= e^{\alpha x}[C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x]$.

4-3·2·3. துணைச் சமன்பாட்டில் α, α என இரு மெய்யெண் சமத் தீர்வுகள் உள்ளன எனக் கொள்வோம்.

அதாவது துணைச்சமன் தீர்வுகள் $m_1, m_2, \ldots, m_{n-2}$ என $(n-2)$ வெவ்வேறு தீர்வுகளும், α, α என மற்றிரண்டு தீர்வுகளும் சேர்ந்து n தீர்வுகளாகும். எனவே வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$Y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_{n-2} e^{m_{n-2} x} + C_{n-1} e^{\alpha x} + C_n e^{\alpha x}$$

$$= \sum_{r=1}^{n-2} C_r e^{m_r x} + (C_{n-1} + C_n) e^{\alpha x}$$

$(C_{n-1} + C_n)$ என்பதும் ஒரு மாறிலி ஆனபடியால் அதை ஒரே ஒரு மாறிலி எனக் கொள்வதில் தவறேதுமில்லை; கொள்ளத்தான் வேண்டும். எனவே Yஇல் $(n-1)$ மாறிலிகளேயிருக்கும். ஆனால் n வரிசைச் சமன்பாட்டில் n மாறிலிகள் இருக்க வேண்டும். எனவே $(n-1)$ மாறிலிகள் கொண்ட தீர்வு ஒரு n வரிசைச் சமன்பாட்டின் முழுத்

தீர்வாக இருக்க இயலாது. இந்த நிலையை எவ்வாறு பொருந்தும்படிச் செய்வது?

இப்போது

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\alpha\frac{dy}{dx} + \alpha^2 y = 0 \qquad \text{......(M)}$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இதற்குரிய துணைச் சமன்பாடு

$$m^2 - 2\alpha m + \alpha^2 = 0$$

இதன் தீர்வுகள் α, α. எனவே (M) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$\begin{aligned} y &= Ae^{\alpha x} + Be^{\alpha x} \\ &= (A+B)e^{\alpha x} \\ &= Ce^{\alpha x} \end{aligned}$$

என ஒரே ஒரு மாறிலி உள்ள தீர்வு கிடைக்கிறது; ஆனால் இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டின் தீர்வில் இரண்டு மாறிலிகள் தோன்ற வேண்டும். இதை எவ்வாறு பொருந்த மாற்றியமைப்பது என்று கண்டுகொண்டால் பொதுவாக இரு சமத்தீர்வுகள், துணைச் சமன்பாட்டில் தோன்றும் போது, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தீர்வு எப்படி அமையும் எனத் தெரிந்து கொள்ளலாம். அடுத்த பகுதியில் விளக்கப்பட்டிருக்கும் செயலிகளைப்பற்றிக் கொஞ்சம் அறிந்து கொண்டபின், பின்வரும் பகுதியை நன்கு விளங்கிக் கொள்ளலாம். எனினும் தொடர்ச்சிக்காக இங்கேயே ஓரளவு விளக்கம் கூறப்பட்டுள்ளது. முடிந்தவரை அறிந்து கொள்க. அடுத்த பகுதியைப் படித்த பின்னர் மீண்டும் இதைப் படிப்பது பயன்தரும். (M) என்ற சமன்பாட்டை

$$(D-\alpha)\,(D-\alpha)\,y = 0$$

என எழுதலாம். இதில் $(D-\alpha)\,y = u$ எனக் கொண்டால்

$$(D-\alpha)\,u = 0$$

எனக் கிட்டும்.

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} - \alpha u = 0$$

$$\therefore \quad u = Ae^{ax}$$

எனக் கிட்டும். இதைக்கொண்டு

$$(D-\alpha)\,y = u = Ae^{ax}$$

என்பதைத் தீர்க்கலாம். அதாவது

$$\frac{dy}{dx} - \alpha y = Ae^{ax}$$ என்பதைத் தீர்க்கலாம்.

இதன் தீர்வு 2-3·3·இல் கூறியபடி

$$ye^{-\alpha x} = \int Ae^{\alpha x} \cdot e^{-\alpha x}\, dx + B$$
$$= Ax + B$$

என்று கிட்டும். எனவே $y = (Ax+B)\, e^{\alpha x}$

என்பது

$$(D-\alpha)\,(D-\alpha)\, y = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வாகும். இத்தீர்வில் A, B என்ற இரு மாறிலிகள் இருப்பதால் இரண்டாம் வரிசைத் தீர்வுக்குரிய இரண்டு மாறிலிகள் நமக்குக் கிடைத்து விடுகின்றன. இவ்வாறே மூன்று தீர்வுகள் சமமாக வரின்

$$(D-\alpha)\,(D-\alpha)\,(D-\alpha)\, y = 0$$

முன்பு கூறியதுபோல் படிப்படியாகக் குறைத்து வர

$$(D-\alpha)\, y = (Ax+B)\, e^{\alpha x}$$

என்ற அமைப்பு கிட்டும். இவ்வமைப்பும் 2-3·3· என்ற அமைப்பின்கண் உள்ளதால், தீர்வு

$$y = \left(\frac{Ax^2}{2} + Bx + C\right) e^{\alpha x}$$

என்று கிட்டும். இதை

$$y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)\, e^{\alpha x}$$

என்று எழுதித் தீர்வாகக் கொள்ளலாம் (ஈண்டு C_1, C_2, C_3 என்ற வெவ்வேறு மாறிலிகள் இருப்பதைக் காண்க). பொதுவாகக் கூறின்

$$(D-\alpha)^r y = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வில் r மாறிலிகள் உள்ள வகையில்

$$y = (C_1 x^r + C_2 x^{r-1} + \dots\dots + C_r)\, e^{\alpha x}$$

என்ற தீர்வு கிட்டும். எனவே

$$m^n + P_1 m^{n-1} + P_2 m^{n-2} + \dots\dots + P_n = 0$$

என்ற சமன்பாட்டில் α என்பது α முறை மடங்கி வருவதாகவும் மற்ற $(n-r)$ தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots, \alpha_{n-r}$ என்றும் இருப்பின் (G) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு,

$$y = (A_1 x^{r-1} + A_2 x^{r-2} + \dots\dots + Ar)\, e^{\alpha x}$$
$$+ B_1 e^{\alpha_1 x} + B_2 e^{\alpha_2 x} + \dots\dots + B_{n-r} e^{\alpha_{n-r} x}$$

என்ற அமைப்பில் வரும்.

4·3·2·4. இப்போது $(\alpha+i\beta)$, $(\alpha-i\beta)$ என்ற இரட்டைக் கற்பனைத் தீர்வுகள் மடங்கிவரின் 4-3·2·3.இல் கண்டபடி

$$\{D-(\alpha+i\beta)\}^2\,\{D-(\alpha-i\beta)\}^2 y=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$y=e^{\alpha x}\{(Ax+B)\cos\beta x+(Cx+D)\sin\beta x\}$$

எனப் பெறப்படும். இதை வேண்டிய அளவு விரிவுபடுத்திக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{d^4y}{dx^4}-5\frac{d^3y}{dx^3}+5\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-6y=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வினைக் காண்க.

துணைச்சமன்பாடு

$m^4-5m^3+5m^2+5m-6=0$ ......(L) $(m+1)$, $\alpha\,(m-1)$ என்பவை இடப்பக்கக் கோவைக்குச் சினைகளென மீதித் தேற்றத்தால் அறியலாம். எனவே (L)ஐ

$$(m+1)\,(m-1)\,(m^2-5m+6)=0$$

என்று எழுதி $-1, 1, 2, 3$ என்பவை இதன் தீர்வுகள் என நிறுவலாம். எனவே தீர்வு

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{2x}+C_4e^{3x}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$[D^3-(a+b+c)D^2+(ab+bc+ca)D-abc]\,y=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைச் சமன்பாடு

$$m^3-m^2(a+b+c)+m(ab+bc+ca)-abc=0$$

இதை $(m-a)\,(m-b)\,(m-c)=0$

என்று எழுதி $m=a$, $m=b$, $m=c$ என்ற தீர்வுகளை அடையலாம். எனவே தீர்வு

$$Y=C_1e^{ax}+C_2e^{bx}+C_3e^{cx}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$(D^3-1)\,(D^2-1)\,y=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$(m^2-1)\,(m^3-1)=0$$

என்ற துணைச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$m=1,\ -1,\ 1,\ -\tfrac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

என்பவை. எனவே வேண்டிய தீர்வு

$$y=(Ax+B)e^{x}+Ce^{-x}+e^{-x/2}\left\{E\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+F\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$(D^2+9)y=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$m^2+9=0$ என்ற துணைச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m=\pm 3i$

$$\therefore\quad y = A\cos 3x+B\sin 3x$$
$$= C\cos(3x+E)$$

இங்கு A, B, C, E என்பவை மாறிலிகள்.

பயிற்சி 4

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க :

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}-6y=0$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}-21y=0$

3. $4\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+5y=0$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+13y=0$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+10\dfrac{dy}{dx}+25y=0$

6. $\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+y=0$

7. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2k\dfrac{dx}{dt}+(k^2+p^2)x=0$;

   $t=0$ எனில் $x=a,\ \dfrac{dx}{dt}=v$

8. $L\dfrac{d^2q}{dt^2}+R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{q}{c}=0$;

$t=0$ எனில் $CR^2=4L$, $q=Q, \frac{dq}{dt}=0$;

L, R, C மாறிலிகள்

9. $(D^2+4)y=0$; $D\equiv\frac{d}{dx}$

10. $(D^4+6D^2+25)y=0$; $D\equiv\frac{d}{dx}$

11. $(D^4+4aD^3+6a^2D^2+4a^3D+a^4)y=0$; $D\equiv\frac{d}{dx}$

12. $(D^3+8a^3)y=0$; $D\equiv\frac{d}{dx}$.

விடைகள்

பயிற்சி 4

1. $y = Ae^{x}+Be^{-6x}$
2. $y = Ae^{3x}+Be^{-7x}$
3. $y = e^{-x/2}\{A\cos x+B\sin x\}$
4. $y = e^{-2x}\{A\cos 3x+B\sin 3x\}$
5. $y = e^{-5x}(A+Bx)$
6. $y = Ae^{-x}+B\cos x+C\sin x$
7. $x = e^{-kt}\left\{a\cos pt+\frac{v+ka}{p}\sin pt\right\}$
8. $q = Qe^{-\frac{Rt}{2L}}\left\{1+\frac{Rt}{2L}\right\}$
9. $y = A\cos 2x+B\sin 2x$
10. $y = e^{x}\{A\cos 2x+B\sin 2x\}$
    $+e^{-x}\{E\cos 2x+F\sin 2x\}$
11. $y = e^{-ax}\{A+Bx+kx^2+Lx^3\}$
12. $y = Ae^{-2ax}+e^{ax}\{B\cos(a\sqrt{3}x)+C\sin(a\sqrt{3})x\}$.

5. செயலிகளின் பண்புகள்-தலைகீழ்ச் செயலிகள்
[Properties of Operators–Inverse Operators]

5-1. D—என்ற செயலி :

$y = f(x)$ என்ற மெய்ச்சார்பினை எடுத்துக்கொள்வோம். $D \equiv \frac{d}{dx}$ என எடுத்துக் கொள்வோம். Dy என்பதன் பொருள் $\frac{dy}{dx}$ என்பது நமக்குத் தெரியும். மேலும் $\frac{dy}{dx}$ என்பதும் ஒரு xஐப் பொருத்த சார்பாகின்றது. மேலும் கொடுக்கப்பட்ட $f(x)$ என்ற சார்புக்கு $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு ஒன்றே ஒன்று. எனவே, $\frac{dy}{dx}$ என்பதை மெய்யெண் கணத்தை அரங்கமாகவும் (domain) மெய்யெண் கணத்தை வீச்சாகவும் (Range) கொண்ட ஒரு சார்பு என அறியலாம். எனினும் $\frac{d}{dx}$ என்பதை ஒரு செயலி என்றுதான் நாம் கொள்வோம். பொதுவாக $D^n \equiv \frac{d^n}{dx^n}$ என்பதன் பொருள், $D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$ என்பதாகும். அதாவது D அல்லது D^n க்குத் தனியாக எத்தகைய பொருளும் இல்லை. ஆனால் அவை ஒரு சார்பின் மீது செயற்படின், பொருள் உண்டு என்பது தெரிகின்றது. Dy எனில், y என்ற இராசியின் கெழு D என்றோ, yஐ Dஆல் பெருக்குகின்றோம் என்றோ பொருள் கிடையாது என்று அறிந்து கொள்ளுதல் வேண்டும். ஆகவே $D^n e^{mx}$ எனில் e^{mx} மேல் D என்ற செயலி அடுத்தடுத்து n முறை செயற்படுகிறது என்பது பொருள். அதாவது

$$D^n e^{mx} = \frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx}$$

5-1·1. $(D-\alpha)y$இல் D ஒரு செயலி, α என்பது ஓர் இயற்கணித மாறிலி இராசி எனக் கொண்டால்

$$(D-\alpha)y = Dy - \alpha y$$

என்று பொருள் கொள்வோம். αy என்பது α, y இரண்டின் பெருக்கல் என்றும் Dy என்பது $\dfrac{dy}{dx}$ என்றும் கொள்ள வேண்டும்.

$(D-\alpha)(D-\beta)y$ எனில் (α, β மாறிலிகள்) முதலில் y மேல் $D-\beta$ செயற்பட்டுப் பெறப்படும் சார்பின்மீது பின்னர் $D-\alpha$ செயற்படும் என்பதாம். அதாவது

$$\begin{aligned}
&(D-\alpha)\{(D-\beta)y\}\\
&= (D-\alpha)\{Dy-\beta y\}\\
&= D(Dy-\beta y)-\alpha(Dy-\beta y)\\
&= D^2y-\beta(Dy)-\alpha(Dy)+\alpha\beta y\\
&= D^2y-(\alpha+\beta)Dy+\alpha\beta y.
\end{aligned}$$

மேலே கொடுக்கப்பட்ட பெருக்கு வழிமுறையிலிருந்து α, β என்ற மாறிலிகள் y என்ற மாறு இராசியுடன் சேர்ந்து இருக்கும்பொழுது D என்ற செயலி செயற்பட்டால் அம்மாறிலிகளைச் செயலிகளுக்கு வெளி எடுக்கலாம் என்று உணருகின்றோம். அதாவது

$$D(\alpha y) = \alpha(Dy)$$
$$D(\beta y) = \beta(Dy)$$

என்பதாம். மேலும் α, β என்பவை இயற்கணித இராசிகள் ஆதலால் $\alpha\beta=\beta\alpha$ (மாற்று விதிக்கு உட்பட்டது). மேலும்

$$(\alpha+\beta)(Dy) = \alpha(Dy)+\beta(Dy)$$

என்றும்,

$$(-\alpha)Dy = -\alpha(Dy)$$

என்றும் அறிகின்றோம். எனவே இவற்றையெல்லாம் மனத்திற் கொண்டு

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+P_ny$$
$$= (D^n+P_1D^{n-1}+\dots+P_n)y \qquad \dots\dots\dots(L)$$

என எழுதலாம். $D^n+P_1D^{n-1}+\dots+P_n$ என்பதை Dஇன் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகக்கொண்டு அக் கோவையை $f(D)$ எனக் கொண்டால் (L) என்பதை $f(D)y$ என எழுதலாம். ஈண்டும் $f(D)$ என்பது yஇன் மீது செயற்படுகின்றது என்று கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$(D^3-3D^2+5D+4)y$ எனில்

$$\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y$$

என்பது பொருள்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$(D^3-1)\sin x$ எனில்

$$D^3\sin x-\sin x$$
$$=-\cos x-\sin x$$

என்பது விளை பயன்

எடுத்துக்காட்டு 3:

$$(2D^3-4D^2+1)\,e^{-mx}$$
$$=2D^3e^{-mx}-4D^2e^{-mx}+e^{-mx}$$
$$=(-2m^3-4m^2+1)e^{-mx}$$

எனக் கிட்டும். எனவே பொதுவாக

$$(D^m+D^n)y = D^my+D^ny$$

என்றும்

$$\begin{aligned}(D^m\,.\,D^n)y &= D^m\{D^ny\}\\ &= D^{m+n}y\\ &= (D^m\,.\,D^n)y\\ &= (D^n\,.\,D^m)y\end{aligned}$$ எனவும் காண்கிறோம்.

இவைகளிலிருந்து $f(D)y$இன் பொருள் நன்கு விளங்கும்.

5-2. தலைகீழ்ச் செயலிகள் :

இப்போது D^{-1}இன் பொருளை விளக்குவோம்.

$Dy = u$ எனக் கொண்டால்

$\frac{dy}{dx} = u$ என்றாகின்றது.

ஆகவே $y = \int u\,dx$ என்றாகும்.

இப்போது $y = \frac{1}{D}u = D^{-1}u$ என எழுதுவதாக முதலில் கொள்வோம்.

எனவே $D^{-1}u = \int u dx$ என்று கிட்டும். ஆகவே $\frac{1}{D}u$ என்பதற்கு நேரான பொருள் கூறுமல் $Dy = u$ எனில் $y = \int u dx$ எனக் கொள்ளலாம். இதைப் போல்,

$$D^2y = u$$

எனில்,
$$y = \frac{1}{D^2}u$$
$$= \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D}u$$
$$= \frac{1}{D}\int u dx$$
$$= \int\{\int u dx\}\, dx$$
$$= \int\int u dx \cdot dx.$$

என்றாகும். எடுத்துக்காட்டாக

$$D^2y = \cos x$$

எனில்,
$$y = \frac{1}{D}\int \cos x\, dx$$
$$= \frac{1}{D}\sin x$$
$$= \int \sin x\, dx$$
$$= -\cos x$$

எனப் பெறுவோம். அதாவது $\frac{1}{D^2}$ எனில் கொடுத்துள்ள சார்பை இருமுறை தொகை காணல் எனக் கொள்ளலாம். பொதுவாக

$$f(D)y = u$$

எனில்
$$y = \frac{1}{f(D)}u$$

இதன் பொருள் : எந்த முதற் சார்பின் மேல் $f(D)$ செயற்பட்டால் u கிடைக்குமோ அம்முதற் சார்பே $\frac{1}{f(D)}u$ எனப் பொருள்படும். எனவே $\frac{1}{f(D)}u$ என்று கூறும்பொழுது இதற்கு நேரடியாகப் பொருள் ஏதும் இல்லை.

5·2·2. இப்போது $f(D)\left\{\frac{1}{f(D)}u\right\}$ என்பதன் பொருள் யாதெனில், அது u என்பதேயாம். $f(D)$ என்பதும் $\frac{1}{f(D)}$ என்பதும் தலைகீழ் மாற்றுச் செயலிகள் என்று கூறலாம்.

ஏனெனில் ஒரு சார்பின் வகைக்கெழு காண்பதும் பின்னர் அவ் வகைக் கெழுவின் தொகை காண்பதும் முறையே செயலும், தலைகீழ்ச் செயலுமாகும். அதாவது D என்ற செயலும், $\int\to$ என்ற செயலும் முறையே செயல், தலைகீழ்ச்செயல் எனலாம். மாறுக $\int$ என்ற செயலும், D என்ற செயலும் முறையே செயல், தலைகீழ்ச் செயல் எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு : $D\,[\int f(x)\,dx] = \int [Df(x)] = f(x)$

எடுத்துக்காட்டாக $f(x) = 4x^3$ எனக்கொண்டு, இதை எளிதாகச் சரி பார்க்கலாம்.

குறிப்பு (1) : ஓரிரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளால், செயலி, தலைகீழ்ச் செயலி என்பதை விளக்குவோம். ஒரு செயல் என்பது மூடியிருக்கும் ஒரு கதவைத் திறப்பது எனக் கொண்டால், அதற்குரிய தலைகீழ்ச் செயல் திறந்திருக்கும் கதவை மூடுவது எனக் கொள்ளலாம். ஒரு கதவு மூடியிருக்கிறது எனக் கொள்வோம். "செயல்" செயற்படும்போது அது திறக்கப்படுகிறது. இப்போது "செயல்" செயற்பட்ட பின்பு, "தலைகீழ்ச் செயல்" செயற்படுமானால், திறக்கப்பட்ட கதவு மூடப்படும் —அதாவது முதலில் இருந்த நிலைக்கே திரும்பிவிடுகிறது. எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையிலுள்ள ஒரு பொருளின் மேல், ஒரு செயல் முதலில் செயற்பட்டு, அதன் விளை பயனின் மேல், தலைகீழ்ச் செயல் செயற்பட்டால், அப்பொருள் முதலிருந்த நிலைக்கு வந்து விடுகிறது.

(2) கூட்டலும் கழித்தலும் செயலும், தலைகீழ்ச் செயலுமாகும் :

$$(a+b)-b = a.$$

பெருக்கலும் வகுத்தலும் செயலும், தலைகீழ்ச் செயலுமாகும் :

$$(a\times b) \div b = a.$$

(3) இதே முறையில், ஒரு சார்பின் வகைக்கெழு காண்பதும், பின்னர் அவ்வகைக் கெழுவின் தொகை காண்பதும், முறையே செயல், தலைகீழ்ச் செயல் எனக் காணலாம். மாற்று முறையும் பொருத்தமானதே.

5-3·0. சில சிறப்புச் சார்புகள்.

5-3·1. தேற்றம் : $f(D)\, e^{ax} = f(a)\, e^{ax}$.

தெரிப்பு :
$$De^{ax} = ae^{ax}$$
$$D^2e^{ax} = a^2e^{ax}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D^ne^{ax} = a^ne^{ax}$$

மேலும்
$$(PD^n)e^{ax} = P(D^ne^{ax}) = Pa^ne^{ax}$$

ஆகவே
$$f(D)e^{ax} = (D^n + P_1D^{n-1} + \cdots\cdots + P_n)e^{ax}$$
$$= (a^n + P_1a^{n-1} + \cdots\cdots + P_n)e^{ax}$$
$$= f(a)e^{ax} \qquad \cdots\cdots(M)$$

கிளைத்தேற்றம் :
$$\frac{1}{f(D)}\{f(D)e^{ax}\} = e^{ax}$$

எனவே
$$e^{ax} = \frac{1}{f(D)}\{f(D)e^{ax}\}$$
$$= \frac{1}{f(D)}\cdot f(a)e^{ax} = f(a)\left\{\frac{1}{f(D)}e^{ax}\right\}$$

எனவே
$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{f(D)}\, e^{ax} \qquad \cdots\cdots(N)$$

5-3·2. தேற்றம் : $\Psi(D) = f(D^2)$ என்ற அமைப்பில் ஒரு இரட்டைப்படைச் சார்பு இருக்கிறதெனக் கொள்வோம், அப்போது

$$(i)\ f(D^2) \sin ax = f(-a^2) \sin ax$$
$$(ii)\ f(D^2) \cos ax = f(-a^2) \cos ax$$

தெரிப்பு :
$$D\,(\sin ax) = a \cos ax$$
$$D^2\,(\sin ax) = (-a^2) \sin ax = (-a^2)^1 \sin ax$$
$$D^3\,(\sin ax) = -a^3 \cos ax$$
$$D^4\,(\sin ax) = +a^4 \sin ax = (-a^2)^2 \sin ax$$

எனவே $D^6 (\sin ax) = (-a^2)^3 \sin ax$

ஆகவே $f(D^2)\sin ax = f(-a^2) \sin ax$ ......(P)

இதைப்போல்

$$f(D^2)\cos ax = f(-a^2) \cos ax \qquad \text{......(Q)}$$

கிளைத்தேற்றம் 1 :

$$\frac{1}{f(D^2)} f(D^2) \sin ax = \sin ax$$

ஆகவே
$$\sin ax = \frac{1}{f(D^2)} \{f(-a^2)\sin ax\}$$

ஆகவே
$$\frac{\sin ax}{f(-a^2)} = \frac{\sin ax}{f(D^2)} \qquad \text{......(R)}$$

அவ்வாறே
$$\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cos ax \qquad \text{......(S)}$$

5-3·2·1. $\Psi(D)$ என்பது ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பாக இல்லாதிருந்தால் $\Psi(D) \sin ax$, $\Psi(D) \cos ax$ இவைகளின் மதிப்புகளைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

$\Psi(D)$ என்பது இரட்டைப்படைச் சார்பாக இல்லாதிருப்பதால்

$$\Psi(D) = f(D^2) + D\phi(D^2) \text{ என எழுதலாம்.}$$

ஆகவே
$$\Psi(D)[\sin ax] = \{f(D^2) + D\phi(D^2)\}\sin ax$$
$$= f(-a^2)\sin ax + a\phi(-a^2)\cos ax$$

என்ற தொடர்பு கிடைக்கும்.

இரு புறமும் $\frac{1}{\Psi(D)}$ என்ற செயலியால் செயற்படுத்த

$$\sin ax = f(-a^2)\left\{\frac{1}{\Psi(D)} \sin ax\right\}$$
$$+ a\phi(-a^2)\left\{\frac{1}{\Psi(D)} \cos ax\right\}$$

என்று பெறப்படும். இவ்வாறே

$$\cos ax = f(-a^2)\left\{\frac{1}{\Psi(D)} \cos ax\right\}$$
$$- a\phi(-a^2)\left\{\frac{1}{\Psi(D)} \sin ax\right\}$$

என்று கிடைக்கும்.

$$\frac{1}{\Psi(D)}\sin ax = U \text{ என்றும்}$$

$$\frac{1}{\Psi(D)}\cos ax = V \text{ என்றும்}$$

கொண்டால்

$$Uf(-a^2)+a\phi(-a^2)V = \sin ax$$

$$-a\phi(-a^2)U+f(-a^2)V = \cos ax$$

என்ற இரு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் U, Vஇல் கிட்டும். $f(-a^2)$, $\phi(-a^2)$இன் மதிப்புகள் நமக்குத் தெரியுமாதலால் U, Vஇன் மதிப்புகளைச் சுலபமாக அறியலாம்.

மாற்றுமுறை :

மேற்கூறியதில்

$$V+iU = \frac{1}{\Psi(D)}\{\cos ax+i\sin ax\}$$

$$= \frac{1}{\Psi(D)}e^{iax}$$

$$= \frac{1}{\Psi(ia)}[\cos ax+i\sin ax]$$

$$= A+iB \text{ என வரும்.}$$

$$V = A,\ U = B \text{ எனப் பெறலாம்.}$$

குறிப்பு: இம் முறையைப் பயன்படுத்தும்பொழுது $\Psi(D)$ என்பது ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பாக இருப்பின் சில சமயம் $\Psi(ia)=0$ என்றாகும். எனவே அப்பொழுது இம் முறையை மிகக் கவனமாகக் கையாளுதல் வேண்டும்.

5–3·3. தேற்றம் 3 : U என்பது xஇன் சார்பானால்

$$f(D)\{e^{ax}u\} = e^{ax}f(D+a)U$$

தெரிப்பு : இப்போது

$$D(e^{ax}u) = ae^{ax}u+e^{ax}Du$$

$$= e^{ax}(D+a)u$$

மேலும்

$$D^2(e^{ax}u) = D[e^{ax}(D+a)u]$$

$$= D[e^{ax}(Du)+ae^{ax}u]$$

$$= ae^{ax}Du + e^{ax}D^2u + a^2e^{ax}u + ae^{ax}Du$$
$$= e^{ax}[D^2 + 2aD + a^2]u$$
$$= e^{ax}(D+a)^2u$$

எனக் கிட்டும். தொடர்ந்து Dஆல் செயற்படுத்திக்கொண்டே சென்றால்

$$D^n(e^{ax}u) = e^{ax}(D+a)^n u$$

எனத் தொகுத்தறி முறையால் பெறலாம். மேலும் $f(D)$ என்ற Dஇன் பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக்கொண்டால் நமக்கு

$$f(D)(e^{ax}u) = e^{ax}f(D+a)u \qquad \ldots\ldots\ldots(T)$$

என்று கிட்டும்.

5–3·3·1. கிளைத்தேற்றம் :

$$\frac{1}{f(D)}[e^{ax}u] = e^{ax}\left[\frac{1}{f(D+a)}u\right]$$

(T) என்ற சமன்பாடு u என்ற எந்தச் சார்புக்கும் உண்மை.

எனவே $f(D+a)u = u_1$

எனக் கொண்டால்

$$u = \frac{u_1}{f(D+a)}$$

இம் மதிப்பை (T)இல் ஈடு செய்ய

$$f(D)\left\{e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}u_1\right\} = e^{ax}u_1$$

என்று கிட்டும். ஆகவே

$$e^{ax}\left\{\frac{1}{f(D+a)}u_1\right\} = \frac{1}{f(D)}\{e^{ax}u_1\}$$

என்று கிட்டும். u_1ஐ, uஎன்ற சார்பாக எண்ணி,

$$e^{ax}\left\{\frac{1}{f(D+a)}u\right\} = \frac{1}{f(D)}\{e^{ax}u\}$$

என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$(D^2+3)y = x^2e^{2x}$ எனக் கொண்டால்

$$y = \frac{1}{D^2+3}\left\{x^2e^{2x}\right\}$$

$$= e^{2x}\left\{\frac{x^2}{(D+2)^2+3}\right\}$$

$$= e^{2x}\left\{\frac{x^2}{D^2+4D+7}\right\}$$

$$= \frac{e^{2x}}{7}\left\{\frac{x^2}{\left(1+\frac{D^2+4D}{7}\right)}\right\}$$

$$= \frac{e^{2x}}{7}\left\{\left(1+\frac{D^2+4D}{7}\right)^{-1} x^2\right\}^*$$

$$= \frac{e^{2x}}{7}\left\{\left(1-\frac{4D}{7}-\frac{D^2}{7}+\frac{16D^2}{49}\right)x^2\right\}$$

$$= \frac{e^{2x}}{7}\left\{x^2-\frac{8x}{7}+\frac{18}{49}\right\}$$

5–3·4. தேற்றம் : u என்பது ஒரு xஇன் சார்பு (கோண கணித, மடக்கை, படிக்குறிச் சார்புகள் உட்பட) அப்போது

$$f(D)[xu] = x\{f(D)u\} + f'(D)u$$

தெரிப்பு :

$$D(xu) = u + xDu$$

$$D^2(xu) = Du + Du + xD^2u$$

$$= xD^2u + 2Du$$

... ...

... ...

... ...

எனவே தொகுத்தறி முறையைக் கொண்டு

$$D^n(xu) = xD^nu + nD^{n-1}u$$

$$= xD^nu + \left(\frac{d}{dD}D^n\right)u$$

குறிப்பு (*)

$\{1+f(D)\}^{-1}$இன் மதிப்பை விரித்தெழுதும்பொழுது, x^nஇன் மீது $\{1+f(D)\}^{-1}$ செயற்பட்டால் D^n அடுக்கு வரும் வரை விரிவை எழுதி, அதற்குப் பின் வரும் Dஇன் அடுக்குகளை விட்டுவிடுவோம். ஏனெனில் $D^n x^n = n!$ என்றும் $D^{n+1} x^n = 0$ என்றும் பெறப்படும். மற்றும் 6.3 (b) காண்க.

என்று பெறலாம். மேலும் $f(D)$ என்பது Dஇல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருப்பின், சற்று முன்பு கண்டதையொட்டி

$$f(D)\,(xu) = xf(D)u + \left[\frac{d}{dD}\,f(D)\right]u$$
$$= xf(D)u + f'(D)\,u \qquad \ldots\ldots(\alpha)$$

என்று காணலாம்.

கிளைத்தேற்றம் :

$$\frac{1}{f(D)}(xu) = \left\{x - \frac{f'(D)}{f(D)}\right\}\frac{1}{f(D)}\,u$$

(α) என்பது u என்ற எந்த xஇன் சார்புக்கும் பொருந்தும்.

(α) என்ற சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் $\dfrac{1}{f(D)}$ ஆல் செயற்படுத்த,

$$xu = \frac{1}{f(D)}\,xf(D)u + \frac{1}{f(D)}\left\{f'(D)u\right\} \qquad \ldots\ldots(\beta)$$

என்று பெறப்படும். $f(D)u = u_1$ எனக் கொண்டால், u, u_1 இரண்டும் xஇன் சார்புகளாக இருக்கும். எனவே

$$u = \frac{u_1}{f(D)}$$

என்று கிட்டும். இதை (β)இல் ஈடு செய்ய

$$x\left\{\frac{1}{f(D)}\,u_1\right\} = \frac{1}{f(D)}(x\,u_1) + \frac{1}{f(D)}\left\{f'(D)\,\frac{1}{f(D)}\,u_1\right\}$$

என்றாகும். அதாவது

$$\frac{1}{f(D)}\left[xu_1\right] = x\left\{\frac{1}{f(D)}\,u_1\right\} - \frac{1}{f(D)}\left\{\frac{f'(D)}{f(D)}\,u_1\right\}$$
$$= \left\{x - \frac{f'(D)}{f(D)}\right\}\frac{1}{f(D)}\,u_1$$

என்ற முடிவு கிட்டும். $u = u_1$ என ஈடு செய்ய, நாம் வேண்டிய முடிவு பெறப்படும்.

குறிப்பு : இந்தத் தெரிப்பில் செயலிகளை முன் பின்னாக மாற்றிச் செயற்படுத்தினாலும், மதிப்பு மாறாது என்ற உண்மை கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

5–3·5. தேற்றம் :

$$f(D)(uv) = uf(D)v + (Du)\left[f'(D)v\right] + \frac{(D^2u)}{2!}\left[f''(D)v\right] + \frac{(D^3u)}{3!}\left[f'''(D)v\right] + \dots \qquad \dots\dots(\Upsilon)$$

($f'(D), f''(D), \dots$ என்பவை மரபுப்படி $f(D)$ க்கு, Dஒட்டிய முதல், இரண்டாம் வகைக்கெழுக்கள்.)

தெரிப்பு: இதன் தெரிப்பு லைப்னிட்ஸ் தேற்றம் (Leibnitz Theorem) என்பதைச் சார்ந்தது. முன் கூறிய தெரிப்பு முறைகளையே பயன்படுத்தலாம். லைப்னிட்ஸ் தேற்றப்படி

$$D^n(uv) = u(D^n v) + n\,(Du)\,D^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2!}(D^2u)(D^{n-2}v) + \dots\dots$$

இதை

$$D^n(uv) = u(D^n v) + (Du)\left[\frac{d}{dD}D^n\right]v + \frac{D^2u}{2!}\left[\frac{d^2}{dD^2}D^n\right]v + \dots$$

என எழுதலாமென்பதைக் காண்க. இது எல்லாக் கூட்டு முழு எண் nக்கும் பொருந்துமாதலின்

$$f(D) = D^n + A_1D^{n-1} + A_2D^{n-2} + \dots + A_n$$

என இருப்பின்

$$[f(D)uv] = u[f(D)v] + [Du][f'(D)v] + \frac{[D^2u]}{2!}[f''(D)v] + \dots$$

என்று பெறப்படும். இது ஒரு பொதுத்தேற்றம்.

குறிப்பு: இத் தேற்றத்தின் ஒரு சிறப்பான முடிவாகத் தேற்றம் 5.3·4. வருவதைக் காண்க.

$u = x$ எனக் கொண்டால், $Dx = 1$, $D^2x = 0 = D^3x \dots\dots$

என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore [f(D)uv] = [f(D)\, xv]$$
$$= x[f(D)v]+[Dx]\,[f'(D)v]$$
$$= x[f(D)v]+f'(D)v$$

எனப் பெறுகிறோம் ; இதுவே தேற்றம் 5–3·4.

5–4. $\theta \equiv x\dfrac{d}{dx} \equiv xD$ என்ற மற்றொரு செயலியை இப்போது எடுத்துக் கொள்வோம். இதைப்பற்றிய சில உண்மைகள், சில குறிப்பிட்ட அமைப்புகளில் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க உதவும். இதன் விளக்கம் பின் வருமாறு :

$$F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots\dots + A_n$$

என்ற அமைப்பைக் கொள்க. அப்போது,

$$F(xD) \equiv (xD)^n + A_1(xD)^{n-1} + \dots\dots + A_n$$

என்பதாகும்.

$(xD)^n$ என்ற செயலியின் பொருள் ($x^n \dfrac{d^n}{dx^n}$ என்பதல்ல) $x\dfrac{d}{dx}, x\dfrac{d}{dx}, \dots$ மடங்கி மடங்கி n முறை செயற்படுவது என்பதாம். இதைப்பற்றிப் பின் வரும் இரு தேற்றங்கள் விரிவாகக் கூறும்.

5–4·1. தேற்றம் :

m ஒரு கூட்டு முழு எண் எனில்
$F(xD)x^m = F(m)x^m$ என்பதாம்.

தெரிப்பு :

$$(xD)x^m = xmx^{m-1}$$
$$= mx^m$$
$$(xD)^2x^m = (xD)[(xD)x^m]$$
$$= (xD)mx^m$$
$$= m[(xD)x^m]$$
$$= m(mx^m)$$
$$= m^2x^m$$

இதைப்போல் தொகுத்தறி முறையால்

$$(xD)^m x^m = m^m x^m$$

எனக் கிடைக்கும். மேலும் $F(xD)$ என்ற செயலியை x^mஇன் மீது செயற்படுத்த

$$F(xD)x^m = F(m)x^m$$

என்று பெறப்படும்.

குறிப்பு 1: m ஒரு குறை முழு எண்ணாக இருப்பினும் இத் தேற்றம் பொருந்துவதைக் காண்க.

குறிப்பு 2:

மேற்கூறிய தேற்றத்தின் அடிப்படையில் $\frac{1}{F(xD)}x^m$ அல்லது $\frac{1}{F(\theta)}x^m$ என்பதற்கு என்ன பொருள் என்று காணலாம்.

$$F(xD)x^m = F(m)x^m$$

என நிறுவப்பட்டது. இரு பக்கங்களையும் $\frac{1}{F(xD)}$ என்ற செயலியால் செயற்படுத்தினால்

$$\frac{1}{F(xD)}[F(xD)x^m] = \frac{1}{F(xD)}[F(m)x^m]$$

$$= F(m)\left\{\frac{1}{F(xD)}x^m\right\}$$ என வரும்.

அதாவது

$$x^m = F(m)\left\{\frac{1}{F(xD)}x^m\right\}$$

எனவே

$$\left\{\frac{1}{F(xD)}x^m\right\} = \frac{x^m}{F(m)}$$

எனப் பெறுகிறோம். இதையே

$$\frac{1}{F(\theta)}x^m = \frac{x^m}{F(m)}$$

என எழுதலாம்.

குறிப்பு 3: குறிப்பு 2இல் $F(m) \neq 0$ என்பது வெளிப்படையாகக் கையாளப்பட்டுள்ளது. $F(m) = 0$ என இருப்பின், அதாவது $F(\theta) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு m ஒரு தீர்வானால் (மடங்காத்தீர்வு)

$$F(\theta) = (\theta - m)\,\phi(\theta) \quad [\phi(m) \neq 0]$$

என்று பெறலாம். அப்போது

$$\frac{1}{F(\theta)}x^m = \frac{1}{(\theta-m)\phi(\theta)}x^m$$

என வரும். இதை

$$u = \frac{1}{(\theta-m)\phi(\theta)}x^m$$

என எழுதினால்

$$x\frac{du}{dx} - mu = \frac{x^m}{\phi(m)}$$

என்று பெறுவோம். எனவே,

$$\frac{du}{dx} - \frac{mu}{x} = \frac{x^{m-1}}{\phi(m)}$$

என்றாகும். இதன் தீர்வு

$$u = \frac{x^m}{\phi(m)}\log x$$

எனப் பெறலாம். மற்றும் $F(\theta) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு m இரு முறை மடங்கி வரும் தீர்வெனில், அப்போது,

$$F(\theta) = (\theta - m)^2\,\Psi(\theta), \quad (\Psi(m) \neq 0)$$

என்றாகும். அப்போது

$$\frac{1}{F(\theta)}x^m = \frac{x^m}{(\theta-m)^2\Psi(\theta)}$$

$$\text{இதை } v = \frac{1}{\theta - m}\left\{\frac{x^m}{(\theta-m)\Psi(\theta)}\right\}$$

என எழுத

$$x\frac{dv}{dx} - mv = \frac{1}{\theta-m}\,\frac{1}{\Psi(\theta)}\,x^m$$

$$= \frac{x^m}{\Psi(m)}\log x$$

என்றாகும். அதாவது

$$\frac{dv}{dx} - \frac{mv}{x} = \frac{x^{m-1}}{\Psi(m)}\log x$$

எனவே

$$v = x^m \int \frac{x^{-m}\,x^{m-1}\log x}{\Psi(m)}\,dx$$

$$= \frac{x^m}{\Psi(m)}\int \frac{\log x}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^m}{\Psi(m)}\,\frac{(\log x)^2}{2}$$

அதாவது

$$\frac{1}{F(\theta)}x^m = \frac{x^m}{\Psi(m)}\,\frac{(\log x)^2}{2!}$$

பொதுவாக

$$F(\theta) = (\theta - m)^r \, \Psi(\theta)\,; \quad \Psi(m) \neq 0$$

என்றிருந்தால்,

$$\frac{1}{F(\theta)} x^m = \frac{x^m}{\Psi(m)} \frac{(\log x)^r}{r!}$$

என்றும்,

$$F(\theta) = (\theta - m)^n$$

எனில்

$$\frac{1}{F(\theta)} x^m = \frac{x^m}{n!} (\log x)^n$$

என்றும் பெறப்படும்.

இக்குறிப்புகளில் கண்ட எல்லா முடிவுகளும் பின்னர் பகுதி VIIஇல் நாம் காணவிருக்கும் சமன்பாடுகளின் சிறப்புத்தீர்வுகள் காணப் பயன்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$V = A + Bx + Cx^2 + \dots + kx^n + \dots$$

ஆனால்

$$\frac{1}{F(xD)} V = \frac{A}{F(0)} + \frac{B}{F(1)} x + \dots + \frac{K}{F(n)} x^n + \dots\dots$$

என நிறுவுக.

தெரிப்பு : $u = A$ (மாறிலி) எனக் கொண்டால்

$$F(xD)\, A = F(xD)\, x^\circ A$$
$$= F(0)\, A$$

எனவே

$$\frac{1}{F(xD)} [F(xD)A] = \frac{1}{F(xD)} [F(0)A]$$

$$\therefore \frac{A}{F(0)} = \frac{A}{F(xD)} \qquad \dots\dots(1)$$

மேலும் $v = Bx$ எனக் கொண்டால்

$$F(xD)\, Bx = BF(1)x$$

ஆகவே

$$\frac{Bx}{F(1)} = \frac{Bx}{F(xD)} \qquad \dots\dots(2)$$

இதைப்போல்

$$w = kx^n$$

எனில்

$$\frac{kx^n}{F(n)} = \frac{kx^n}{F(xD)} \qquad \ldots\ldots(3)$$

(1), (2), ..., (3), ... முதலியவற்றையெல்லாம் கூட்ட

$$\frac{A}{F(0)} + \frac{Bx}{F(1)} + \frac{Cx^2}{F(2)} + \ldots + \frac{kx^n}{F(n)} + \ldots$$
$$= \frac{1}{F(xD)} \, [A + Bx + Cx^2 + \ldots + kx^n + \ldots]$$
$$= \frac{1}{F(xD)} \, V$$

தேற்றம் 2 : V என்பது எந்த அமைப்பிலுள்ள xஇன் சார்பாக இருப்பினும்

$$F(xD) \, x^m \, V = x^m \, F(xD+m)V$$

தெரிப்பு :

$$(xD)\,(x^m V) = x\,\{V m x^{m-1} + x^m D V\}$$
$$= V m x^m + x^{m+1} D V$$
$$= x^m (xD+m) V$$

அதாவது

$$\{x^{-m} \, . \, (xD)x^m\} V = (xD+m) V$$

அதாவது V என்பது ஏதாமொரு சார்பானல் $\{x^{-m} \, . \, (xD)x^m\}$ என்ற செயலியின் விளைபயனும் $(xD+m)$ என்ற செயலியின் விளைபயனும் ஒன்றே எனத் தெரிகின்றது. எனவே

$$x^{-m}(xD)x^m \equiv (xD+m)$$

எனக் கொள்ளலாம். இதைப்போல்

$$\{x^{-m}(xD)x^m\}\,\{x^{-m}\,(xD)x^m\}u = (xD+m)\,(xD+m)u$$

அதாவது

$$[x^{-m}(xD)^2 x^m]u = (xD+m)^2 u$$

எனவே

$$[(xD)^2 x^m]u = x^m[(xD+m)^2 u]$$

எனவே தொகுத்தறி முறையால்

$$(xD)^n \, (x^m u) = x^m (xD+m)^n u$$

என நிறுவலாம். மேலும் $f(D)$ என்ற Dஇன் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும்

$$f(xD)\,[x^m u] = x^m f(xD+m)u$$

என நிறுவலாம்.

5-4·2. தேற்றம் :

$$x^n D^n \equiv (xD)(xD-1)(xD-2)\ldots(xD-n+1)$$

என நிறுவலாம்.

தெரிப்பு : இதன் தெரிப்பைத் தொகுத்தறி முறையில் காணலாம். அதாவது

$$(x^n D^n)u = [(xD)(xD-1)\ldots\ldots(xD-n+1)]u$$

என்ற n மதிப்புக்கு உண்மை எனக்கொண்டு (u எந்தச் சார்பாகினும் இது உண்மை என்பது கொள்கை)

$$(x^{n+1} D^{n+1})u=[(xD-1)\ldots(xD-n+1)(xD-n)]u$$

என்பது உண்மை என நிறுவவேண்டும்.

$$u = (xD-n)v$$

எனக் கொள்க. அப்போது,

$$\begin{aligned} D^n u &= D^n[(xD-n)v] \\ &= D^n[x(Dv)-nv] \\ &= xD^{n+1}v+nD^n v-nD^n v \text{ (லைப்னிட்ஸ் தேற்றம்)} \\ &= xD^{n+1}v \end{aligned}$$

அதாவது

$$xD^{n+1}v = D^n u$$

இருபக்கங்களையும் x^n ஆல் பெருக்க

$$\begin{aligned} x^{n+1} D^{n+1}v &= x^n D^n u \\ &= x^n D^n\{(xD-n)v\} \\ &= \{(xD)(xD-1)\ldots(xD-n+1)\}(xD-n)v \end{aligned}$$

[ஈண்டு $u=(xD-n)v$ என்று கொண்டு, தேற்றம், n என்ற முழு எண்ணுக்கு உண்மை என்பதும் பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளது.] எனவே தேற்றம் v என்ற சார்பிற்கு n என்ற முழு எண்ணுக்கு உண்மையானல் $n+1$ என்ற முழு எண்ணுக்கு உண்மை என நிறுவப்பட்டுள்ளது. மேலும் $n = 1$ எனில்

$$(xD)u = x(Du)$$

$n = 2$ எனில்

$$\begin{aligned} (xD)(xD-1)u &= xD[xDu-u] \\ &= x[Du+xD^2u-Du] \\ &= x^2D^2u \end{aligned}$$

எனவே $$(x^2D^2)u = (xD)(xD-1)u$$

என்பது பொருந்திய உண்மையாவதைப் பார்க்கின்றோம். எனவே இத்தேற்றம் n இன் எல்லா முழு எண் மதிப்புக்கும் உண்மை எனப் பெறப்படும்.

குறிப்பு : 5-4. இல் குறிப்பிட்ட θ என்ற செயலின் அடிப்படையில்

$$x^n D^n = \theta(\theta-1)(\theta-2)\ldots(\theta-n+1)$$

என நாம் இப்போது ஏற்கலாம்.

பயிற்சி 5

1. $f(D^2)\cosh ax = f(a^2)\cosh ax$ எனவும்
$f(D^2)\sinh ax = f(a^2)\sinh ax$ எனவும் நிறுவி,
$\frac{1}{f(D^2)}\cosh ax = \frac{1}{f(a^2)}\cosh ax$ எனவும்
$\frac{1}{f(D^2)}\sinh ax = \frac{1}{f(a^2)}\sinh ax$ எனவும் நிறுவுக.

2. $y = \frac{\cosh ax}{D^2-a^2}$ எனில்

$y = \frac{x}{2a}\sinh ax$ என்றும்

$y = \frac{\sinh ax}{D^2-a^2}$ எனில்

$y = \frac{x}{2a}\cosh ax$ எனவும் நிறுவுக.

3. $f(D) \equiv \Psi(D^2) + D\phi(D^2)$ எனில்
$f(D)\cosh ax$; $f(D)\sinh ax$ என்பவற்றின் மதிப்புகள் முறையே

$\Psi(a^2)\cosh ax + a\phi(a^2)\sinh ax$ எனவும்
$\Psi(a^2)\sinh ax + a\phi(a^2)\cosh ax$ எனவும் நிறுவுக.

4. $\cos ax = \cosh iax$ என்ற சமன்பாட்டின் அடிப்படையில், கணக்கு (1) இல் நிறுவப்பட்ட உண்மைகளையொட்டி,
$f(D^2, \cos ax = f(-a^2)\cos ax$ எனவும்,
$i\sin ax = \sinh(i\,ax)$ என்ற அடிப்படையில்
$f(D^2)\sin ax = f(-a^2)\sin ax$ எனவும் நிறுவுக.

5. $x^n(D^n x^n)$ க்கும் $(xD)^n x^n$ க்கும் உள்ள வேறுபாட்டை விளக்கிக் காட்டுக.

6. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் சிறப்புத் தீர்வுகளும் முழுத் தீர்வுகளும்

(Particular Integrals and Complete Integrals of Differential Equations)

6-1. முன்னுரை: செயலிகள், தலைகீழ்ச் செயலிகள் என்பவை பற்றி நாம் சென்ற பகுதியில் அறிந்து கொண்டதையொட்டி

$$f(D)y = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^n} + \ldots\ldots + P_n y = X$$

(P_1, $P_2, \ldots\ldots P_n$ மாறிலிகள்) என்ற சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வைக் காண்போம். 5-2. இல் கூறியபடி இதன் முழுத் தீர்வானது $y=$ துணைத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு எனப் பெறப்படும். துணைத்தீர்வு பொதுவாக

$$Y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$$

எனவும், சிற்சில குறிப்பிட்ட மாறுதல்களோடும் n மாறிலிகள் கொண்ட ஒரு கோவையாகும். (பகுதி IV முழுவதும் இது விளக்கப்பட்டுள்ளது காண்க).

$f(D)y = X$ என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு $y = \dfrac{1}{f(D)} X$ என்று அதற்குரிய பொருளில் [V காண்க] பெறப்படும்.

6-2. சிறப்புத் தீர்வு காணும் முறைகள்: ஈண்டு X என்பது x இன் கோவை எனக் கொள்கின்றோம்.

6-2·1. $y = \dfrac{1}{f(D)} X$ என்பதின் மதிப்பு.

முதல் முறை: $f(D) \equiv (D-a)(D-b)\ldots\ldots(D-l)$ எனச் சினைகளாகப் பிரித்தெழுதினால்,

$$y = \frac{1}{D-a} \cdot \frac{1}{D-b} \cdots\cdots \frac{1}{D-k} \cdot \frac{1}{D-l} X$$

என எழுதலாம். இதை

$$(D-a)(D-b)\cdots\cdots(D-k)\, y = \frac{1}{D-l} X$$

என்று எழுதி இடப் புறத்தை u என ஈடு செய்ய, $u = \frac{x}{D-l}$ என்ற சமன்பாடு பெறப்படும்.

அதாவது $\frac{du}{dx} - lu = X$ என்றாகும்.

ஆகவே, $u = e^{lx} \int e^{-lx} X\, dx$

அதாவது $(D-a)(D-b)\cdots\cdots(D-k)y = u = e^{lx} \int e^{-lx} X\, dx$

என்று கிட்டும். இதை மறுபடியும்

$$(D-a)(D-b)\cdots(D-j)y = \frac{1}{D-k} u$$

என எழுதி, இடப்புறத்தை v எனக் கொண்டால்

$$(D-k)v = u = e^{lx} \int e^{-lx} X dx$$

என்று கிட்டும். இதை மறுபடியும் தீர்க்க

$$ve^{-kx} = \int [e^{lx-kx} \int e^{-lx} X dx] dx$$
$$= \int e^{(l-k)x} \int e^{-lx} X (dx)^2$$

எனப் பெறுவோம்.

[வலப் புறத்தில் இருப்பது ஒரு குறியீட்டு முறை என்பதை அறிக]

அதாவது

$$v = e^{kx} \int e^{(l-k)x} \int e^{-lx} X (dx)^2$$

எனக் கிட்டும். இவ்வாறே ஒவ்வொரு சினையாக நீக்கிக்கொண்டே போனால், சிறப்புத் தீர்வு

$$y = e^{ax} \int e^{bx-ax} \int \cdots \int e^{-lx} X (dx)^n$$

எனப் பெறலாம்.

6·2·2. இரண்டாவது முறை :

$$\frac{1}{f(D)} \equiv \frac{A}{D-a} + \frac{B}{D-b} + \cdots + \frac{K}{D-k} + \frac{L}{D-l}$$

(A, B, C, ..., K, L யாவும் மாறிலிகள்) எனப் பகுதி பின்னங்களாக எழுதினால்,

$$y = \frac{1}{f(D)} X$$
$$= \left\{ \frac{A}{D-a} + \frac{B}{D-b} + \cdots + \frac{K}{D-k} + \frac{L}{D-l} \right\} X$$

என்று கிட்டும். இதில் ஒவ்வொரு சினைக்கும் தனித்தனித் தீர்வுகள் கண்டு கூட்டினால் வேண்டிய தீர்வு கிடைக்கும். எடுத்துக்காட்டாக

$$u = \frac{I}{D-i} X$$

என்ற உறுப்பை எடுத்துக்கொள்க.

$$Du - iu = IX$$

என்றாகும். அதாவது

$$\frac{du}{dx} - iu = IX$$

எனக் கிட்டும். இதன் தீர்வு

$$u = I e^{ix} \int e^{-ix} X dx$$

என்பதாம். எனவே

$$y = Ae^{ax} \int e^{-ax} X dx + Be^{bx} \int e^{-bx} X dx$$
$$+ \cdots + Ke^{kx} \int e^{-kx} X dx + Le^{lx} \int e^{-lx} X dx$$

எனப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$(D^2 - 3D + 2)y = x$ என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு காண்க.

முதல் முறை :

$$y = \frac{1}{(D-2)} \left\{ \frac{1}{D-1} x \right\}$$

எனவே $(D-2)\, y = u$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{du}{dx} - u = x$$

என்றாகும். இதன் தீர்வு

$$u = -(x+1)$$

எனவே

$$\frac{dy}{dx} - 2y = -(x+1)$$

எனக் கிட்டும். இதைத் தீர்க்க

$$y = \tfrac{1}{2} x + \tfrac{3}{4}$$

என வேண்டிய தீர்வு கிடைக்கும்.

இரண்டாம் முறை :

$$y = \left\{\frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1}\right\} x$$

எனவே

$$u = \frac{x}{D-2} \text{ என்றும் } v = \frac{x}{D-1}$$

என்றும் கொள்ள

$$u = -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4} \text{ என்றும்}$$
$$v = -x \ \ -1 \text{ என்றும்}$$

கிட்டும். எனவே

$$y = u - v$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

என்றாகும்.

குறிப்பு :

இச் சமன்பாட்டிற்கு முழுத் தீர்வு

$$y = Ae^{x} + Be^{2x} + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}$$

துணைத் தீர்வு $= Ae^{x} + Be^{2x}$

சிறப்புத் தீர்வு $= \frac{x}{2} + \frac{3}{4}.$

பயிற்சி 6·1

பின் வரும் சமன்பாடுகளின் முழுத் தீர்வு காண்க.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 2e^{2x}$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 8y = 8e^{-2x}$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 12e^{2x}$

விடைகள்

பயிற்சி 6·1

1. $y = (A+Bx)e^{-x} + \frac{2e^{2x}}{9}$
2. $y = Ae^{-2x} + Be^{-4x} + 4xe^{-2x}$
3. $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} + 3xe^{2x}.$

6–3. மேற்கூறிய இரு முறைகளும் பொதுவாகச் சிறப்புத் தீர்வுகள் காணும் முறைகளாகும். ஆனல் வலப் புறம் தோன்றும் X என்பது

(a) e^{ax}—a ஒரு மாறிலி

(b) x^m—m ஒரு கூட்டு முழு எண்

(c) $\sin ax$, $\cos ax$—a ஒரு மாறிலி

(d) $e^{ax}V$—V ஒரு xஇன் சார்பு

(e) xV—V ஒரு xஇன் சார்பு

என்ற அமைப்புகளில் இருப்பின் சில சுருக்கமான முறைகளைக் (சில வாய்பாடுகள் வழியாக) கையாண்டு நாம் சிறப்புத் தீர்வுகளைக் காணலாம்.

6-3 (a). $X = e^{ax}$; a ஒரு மாறிலி : சிறப்புத் தீர்வு காணல் :

$$f(D)y = e^{ax}$$

என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு. எனவே

$$y = \frac{e^{ax}}{f(D)}$$

5–3·1. இல் நிறுவிய (N)படி

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{f(a)}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு

$$y = \frac{e^{ax}}{f(a)}$$

துணைத்தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு கண்டு முழுத் தீர்வை எழுதிவிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$(D^2-4D+3)\,y = e^{-5x}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க. துணைச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் 1, 3 என்று வரும். ஆகவே துணைத் தீர்வு

$$= Ae^x + Be^{3x}$$

சிறப்புத் தீர்வு

$$y = \frac{e^{-5x}}{D^2-4D+3} = \frac{e^{-5x}}{25+20+3}$$

$$= \frac{e^{-5x}}{48}$$

எனவே முழுத் தீர்வு

$$y = Ae^{x} + Be^{3x} + \frac{e^{-5x}}{48}$$

6–3·1 (a). 6–3·1·இல் $f(a) \neq 0$ எனில்தான் மேற்கூறிய முறையைக் கையாள முடியும். $f(a) = 0$ எனில் பின்வரும் முறையைக் கையாளுவோம்.

$f(a) = 0$ எனில் $f(D)$க்கு $(D-a)$ ஒரு காரணியாக இருக்கும். எனவே

$$f(D) = (D-a)\Psi(D); \quad \Psi(a) \neq 0$$

எனவே

$$y = \frac{e^{ax}}{(D-a)\Psi(D)}$$

என்ற சமன்பாட்டில் பூச்சியமாகாதவைகளுக்குமட்டும் Dக்கு aஐ ஈடு செய்வோம். அதாவது

$$y = \frac{e^{ax}}{(D-a)\Psi(a)}$$

என எழுதலாம். பின்னர்

$$(D-a)y = \frac{e^{ax}}{\Psi(a)}$$

என்று எழுதி

$$y = \frac{xe^{ax}}{\Psi(a)}$$

என்ற தீர்வினை அடையலாம்.

மேலும் a என்பது $f(D) = 0$இன் இருமுறை மடங்கு தீர்வாயின்

$$f(D) = (D-a)^2 \phi(D), \quad \phi(a) \neq 0$$

என்றவாறு அமைக்கலாம். ஆகவே

$$y = \frac{e^{ax}}{(D-a)^2\phi(a)}$$

என்றாகும். அதாவது

$$(D-a)(D-a)y = \frac{e^{ax}}{\phi(a)}$$

இச் சமன்பாட்டில் $(D-a)y = u$ எனக் கொள்ள

$$(D-a)u = \frac{e^{ax}}{\phi(a)}$$

என்றாகும்.

அதாவது

$$u = \frac{xe^{ax}}{\phi(a)}$$

எனவே

$$(D-a)y = \frac{xe^{ax}}{\phi(a)}$$

அதாவது

$$y = \frac{e^{ax}\int xe^{ax}e^{-ax}dx}{\phi(a)}$$

$$= \frac{x^2}{2!}\;\frac{e^{ax}}{\phi(a)}$$

என்றுகின்றது. பொதுவாக

$$f(D) = (D-a)^r\Psi(D)\,; \quad \Psi(a)\neq 0$$

என்றிருப்பின் தொகுத்தறி முறையைப் பின்பற்றிச் சிறப்புத் தீர்வை

$$y = \frac{x^r}{r!}\;\frac{e^{ax}}{\Psi(a)}$$

என்று பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$(D-2)^3(D+2)y = e^{2x}+e^{-2x}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைத்தீர்வு

$$y = (A+Bx+Cx^2)e^{2x}+Ke^{-2x}$$

எனத் தெரியும். சிறப்புத் தீர்வு

$$y = \frac{e^{2x}}{(D-2)^3(D+2)} + \frac{e^{-2x}}{(D-2)^3(D+2)}$$

$$= \frac{x^3}{3!}\;\frac{e^{2x}}{4} + \frac{xe^{-2x}}{-64}$$

எனவே முழுத்தீர்வு

$$y = (A+Bx+Cx^2)e^{2x}+Ke^{-2x} + \frac{x^3}{24}e^{2x} - \frac{xe^{-2x}}{64}$$

6–3 (b). $X = x^m$; m கூட்டு முழு எண் ; சிறப்புத் தீர்வு காணல் :

$y = \dfrac{1}{f(D)}x^m$ என்பது சிறப்புத் தீர்வாகும். $[f(D)]^{-1}$ ஐ, D இன் படிகளாக, ஈருறுப்புத் தேற்றம் கொண்டு விரித்தெழுதி, அவற்றினை

x^m இல் செயற்படுத்தவேண்டும். D இன்படி, m க்குமேல் எடுத்துச் செல்லப்படவேண்டியதில்லையெனக் காணலாம். ஏனெனில்,

$$D^m \cdot x^m = \angle m; \quad D^{m+1}x^m = 0.$$

5–3·3·1. இன் கீழ் உள்ள எடுத்துக்காட்டினையும், அதற்குப் பின்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ள குறிப்பினையும் பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$(D^3+2D^2-D-2)\,y=3x^2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைத் தீர்வு $Ae^{-2x}+Be^{-x}+Ce^x$

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு} = \frac{3x^2}{-2\left(1+\frac{D}{2}-D^2-\frac{D^3}{2}\right)}$$

$$= -\frac{3}{2}\left(1+\frac{D-2D^2-D^3}{2}\right)^{-1} x^2$$

$$= -\frac{3}{2}\left(1-\frac{D}{2}+D^2+\frac{D^3}{2}+\frac{D^2}{4}+D \text{ இன் மேற்படிகள்}\right)x^2$$

$$= -\tfrac{3}{2}\,(x^2-x+\tfrac{5}{2})$$

$$= -\frac{3x^2}{2}+\frac{3x}{2}-\frac{15}{4}$$

எனவே முழுத் தீர்வு

$$y=Ae^{-2x}+Be^{-x}+Ce^x-\frac{3x^2}{2}+\frac{3x}{2}-\frac{15}{4}$$

குறிப்பு : கிடைக்கப்பெற்ற சிறப்புத் தீர்வு சரியா என்று பின் வருமாறு சரிபார்க்கலாம்.

$$(D^3+2D^2-D-2)\left(-\frac{3x^2}{2}+\frac{3x}{2}-\frac{15}{4}\right)$$

$$= -6+3x+3x^2-3x+\tfrac{15}{2}-\tfrac{3}{2}$$

$$= 3x^2.$$

6-3 (c). $X=\sin ax$; $f(-a^2) \neq 0$: சிறப்புத் தீர்வு காணல் :

$$f(D)y=\sin ax$$

என்பது சமன்பாடு எனில்

$$y=\frac{\sin ax}{f(D)}$$

$f(D)$ என்பது $f(D) = \Psi(D^2)$ என்ற அமைப்பில் இருக்குமெனில்

$$y = \frac{\sin ax}{\Psi(-a^2)}$$

என்பது தீர்வாகும். [5-3·2 (R) காண்க]. அதுவல்லாமல்,

$$f(D) = \Psi(D^2)+D\phi(D^2)$$

என்று மாற்றியமைக்கக் கூடிய சார்பாயின் 5-3·2. கிளைத் தேற்றத்தில் குறிப்பிட்டிருக்கும் முறையைக் கையாளவேண்டும். ஆனால் நடைமுறையில் பின்வரும் ஏதாமொரு முறையைக் கையாளலாம். அம் முறைகள் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகளால் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு : $(D^2-2D-1)y = \sin 3x$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைச் சமன்பாட்டினைக் கொண்டு துணைத் தீர்வினை

$$y = e^x[A \cosh \sqrt{2}x+B \sinh \sqrt{2}x]$$

என்று பெறலாம்.

சிறப்புத் தீர்வு

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin 3x}{D^2-2D-1} \\ &= \frac{\sin 3x}{-9-2D-1} \\ &= -\frac{\sin 3x}{2D+10} \\ &= -\frac{(2D-10)}{(2D+10)(2D-10)}\sin 3x \\ &= +\frac{(2D-10)\sin 3x}{100+36} \\ &= \frac{6\cos 3x-10\sin 3x}{136} \end{aligned}$$

எனவே முழுத்தீர்வு

$$y = e^x[A \cosh \sqrt{2}x+B \sinh \sqrt{2}x]+\frac{6\cos 3x-10\sin 3x}{136}$$

மாற்று முறை :

$$(D^2-2D-1)y = \sin 3x \qquad \text{......(A)}$$

உதவியாக $$(D^2-2D-1)y = \cos 3x \qquad \text{......(B)}$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இச்சமன்பாடுகளின்

வலப்புறத்தில் உள்ளவை e^{3ix} என்ற சார்பின் முறையே கற்பனைப் பகுதியும், மெய்ப் பகுதியுமாகும். எனவே

$$y = \frac{e^{3ix}}{D^2-2D-1}$$

என்பதின் சிறப்புத் தீர்வினைக் கண்டு, அதிலுள்ள கற்பனைப் பகுதியை நமக்கு வேண்டிய தீர்வாகப் பெறலாம். எனவே

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^{3ix}}{D^2-2D-1} \\ &= \frac{e^{3ix}}{(3i)^2-2(3i)-1} \\ &= \frac{e^{3ix}}{-10-6i} \\ &= -\frac{e^{3ix}(10-6i)}{100+36} \\ &= \frac{(\cos 3x+i\sin 3x)(10-6i)}{-136} \end{aligned}$$

எனவே

$$\text{கற்பனைப்பகுதி} = \frac{10\sin 3x-6\cos 3x}{-136}$$

$$\text{மெய்ப்பகுதி} = \frac{10\cos 3x+6\sin 3x}{-136}$$

எனவே வேண்டிய சிறப்புத் தீர்வு

$$y = \frac{10\sin 3x-6\cos 3x}{-136}$$

குறிப்பு : முதல் முறையிலும், இரண்டாவது முறையிலும்

$$y = \frac{\cos ax}{D^2+a^2}$$

என்ற சமன்பாடு இருந்தால்

$$y = \frac{\cos ax}{-a^2+a^2}$$

என்ற சமன்பாடு கிட்டுகின்றது. அதாவது yஇன் மதிப்பு கந்தழியாகும். இது ஒவ்வாத ஒரு கோட்பாடு. அதாவது எந்த ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கும் தீர்வுகள் இருக்கும் (இருக்கும் என்ற வாய்பாடு, Existence Theorem) என்பதைப் பொய்க்கின்றது. ஆகவே இத்தகைய சமயங்களில்

$$y=\frac{1}{2\,ia}\left[\frac{1}{D-ai}-\frac{1}{D+ia}\right]\cos ax$$

எனப் பிரித்தெழுதித் தீர்வு காணலாம்.

மாற்று முறை :

துணைத்தீர்வு

$$y=A\cos ax+B\sin ax$$

என்பதாகும். பின்னர்

$$u=\frac{\cos ax}{D^2+a^2}$$

என்றும்

$$v=\frac{\sin ax}{D^2+a^2}$$

என்றும் கொண்டால்

$$z=u+iv=\frac{e^{iax}}{D^2+a^2}$$

$$=\frac{e^{iax}}{(D+ia)(D-ia)}$$

$$=\frac{e^{iax}}{2\,ia\,(D-ia)}$$

அதாவது

$$\frac{dz}{dx}-iaz=\frac{e^{iax}}{2ia}$$

என்றாகும். எனவே

$$z=e^{iax}\int\frac{e^{-iax}\;e^{iax}}{2\,ia}\,dx$$

$$=\frac{xe^{iax}}{2\,ia}$$

$$=\frac{-iax\,(\cos ax+i\sin ax)}{2a^2}$$

எனவே

$$u=\frac{x\sin ax}{2a}$$

$$v=-\frac{x\cos ax}{2a}$$

ஆகவே

$$(D^2+a^2)y=\cos ax$$

என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு

$$y=A\cos ax+B\sin ax+\frac{x\sin ax}{2a}$$

மேலும்

$$(D^2+a^2)y=\sin ax$$

என்ற சமன்பட்டின் முழுத் தீர்வு

$$y=A\cos ax+B\sin ax-\frac{x\cos ax}{2a}$$

6-3 (d). $X=e^{ax}V$; a மாறிலி, V ஏதாமொரு xஇன் சார்பு; சிறப்புத் தீர்வு காணல் :

$$f(D)y=e^{ax}V$$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடாக இருப்பின்

$$y=\frac{e^{ax}V}{f(D)}$$

ஆகவே 5-3·3.இல் நிறுவப்பட்டபடி

$$\frac{1}{f(D)}\left\{e^{ax}V\right\}=e^{ax}\frac{V}{f(D+a)}$$

என்பதாகும். தீர்வு Vஐப் பொருத்துக் காணப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$(D^2-4D-5)y=e^{3x}\cos x+e^{-2x}x^2$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இச் சமன்பாட்டின் துணைத் தீர்வு

$$y=Ae^{5x}+Be^{-x}$$

மேலும் சிறப்புத் தீர்வு

$$y=\frac{e^{3x}\cos x}{D^2-4D-5}+\frac{e^{-2x}x^2}{D^2-4D-5}$$

முதலில்

$$\frac{e^{3x}\cos x}{D^2-4D-5}$$

என்ற சார்பினை எடுத்துக்கொண்டால்

$$\frac{e^{3x}\cos x}{D^2-4D-5}=e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2-4(D+3)-5}$$

$$= e^{3x} \frac{\cos x}{D^2+2D+8}$$

$$= e^{3x} \frac{\cos x}{2D-9}$$

$$= e^{3x} \frac{(2D+9) \cos x}{4D^2-81}$$

$$= \frac{e^{3x} (2 \sin x - 9 \cos x)}{85}$$

மேலும்

$$\frac{e^{-2x} x^2}{D^2-4D-5} = e^{-2x} \left\{\frac{1}{(D-2)^2-4(D-2)-5} (x^2)\right\}$$

$$= \frac{e^{-2x}}{7} \left(1+\frac{D^2-8D}{7}\right)^{-1} x^2$$

$$= \frac{e^{-2x}}{7} \left(1-\frac{D^2-8D}{7}+\frac{64D^2}{7^2}\right) x^2$$

$$= \frac{e^{-2x}}{7} \left(x^2+\frac{16x}{7}+\frac{114}{49}\right)$$

எனவே முழுத்தீர்வு

$$y = Ae^{5x}+Be^{-x}+\frac{e^{3x}}{85} (2 \sin x - 9 \cos x)$$

$$+ \frac{e^{-2x}}{7} \left(x^2+\frac{16x}{7}+\frac{114}{49}\right)$$

எனப் பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$(D^2-a^2)y = e^{ax} \sin ax$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வினைக் காண்க.

துணைத்தீர்வு

$$y = Ae^{ax}+Be^{-ax}$$

சிறப்புத்தீர்வு

$$y = \frac{e^{ax} \sin ax}{D^2-a^2}$$

$$= e^{ax} \frac{\sin ax}{(D+a)^2-a^2}$$

$$= e^{ax}\frac{\sin ax}{D^2+2aD}$$

$$= e^{ax}\frac{\sin ax}{2aD-a^2}$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\frac{(2D+a)\sin ax}{4D^2-a^2}$$

$$= \frac{e^{ax}}{-5a^3}[2a\cos ax+a\sin ax]$$

எனவே முழுத்தீர்வு

$$y = Ae^{ax}+Be^{-ax}-\frac{e^{ax}}{5a^3}(2a\cos ax+a\sin ax)$$

6-3.(e) $X=xV$; V ஒரு xஇன் சார்பு; சிறப்புத் தீர்வு காணல்:

$f(D)\,y = xV$ என்பது சமன்பாடு

$$\therefore\quad y = \frac{xV}{f(D)}$$

எனவே 5-3.4. தேற்றத்தில் நிறுவியபடி

$$\frac{1}{f(D)}xV = \left[x-\frac{f'(D)}{f(D)}\right]\frac{1}{f(D)}V$$

என்ற வாய்பாடு கொண்டு சிறப்புத் தீர்வு காணப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$(D^2+4)y = x\sin 2x$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைத்தீர்வு

$$y = A\cos 2x+B\sin 2x$$

சிறப்புத்தீர்வு

$$y = \frac{x\sin 2x}{D^2+4}$$

$$= \left(x-\frac{2D}{D^2+4}\right)\frac{\sin 2x}{D^2+4}$$

$$= \left(x-\frac{2D}{D^2+4}\right)\left(-\frac{x\cos 2x}{4}\right)$$

[6-3 (C). குறிப்பு (1) காண்க]

$$= -\frac{x^2 \cos 2x}{4} + \frac{2D(x \cos 2x)}{4(D^2+4)}$$

$$= -\frac{x^2 \cos 2x}{4} + \frac{\cos 2x - 2x \sin 2x}{2(D^2+4)}$$

$$y = -\frac{x^2 \cos 2x}{4} + \frac{x \sin 2x}{8} - \frac{x \sin 2x}{D^2+4}$$

ஆனல் $y = \frac{x \sin 2x}{D^2+4}$ என்பதே யாதலால், $\left(\frac{-x \sin 2x}{D^2+4}\right)$ ஐ வலப்புறமிருந்து இடப்புறம் கொணர்ந்தால்,

$$2y = -\frac{x^2 \cos 2x}{4} + \frac{x \sin 2x}{8}$$

ஆகவே சிறப்புத்தீர்வு

$$y = -\frac{x^2 \cos 2x}{8} + \frac{x \sin 2x}{16}$$

என்று பெறப்படும். எனவே முழுத்தீர்வு

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x - \frac{x^2 \cos 2x}{8} + \frac{x \sin 2x}{16}$$

என்பதாம்.

பயிற்சி 6·2

1. $\cos ax = \frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$

$= \cosh (iax)$ என்ற தொடர்பையொட்டி,

$y = \frac{1}{D^2+a^2} \cos ax$ எனில்

$y = \frac{x}{2a} \sin ax$ எனவும்

$\sin ax = \frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}$

$= \frac{1}{i} \sinh (iax)$ என்ற தொடர்பை யொட்டி,

$y = \frac{1}{D^2+a^2} \sin ax$ எனில்

$y = -\frac{x}{2a} \cos ax$ எனவும் நிறுவுக.

பயிற்சி 6·3

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் துணைத் தீர்வு, சிறப்புத் தீர்வு, முழுத் தீர்வு ஆகியவற்றைக் காண்க.

1. $(D^2-3D+2)y = 2e^{3x}$
2. $(D^2+6D+9)y = e^{2x}$
3. $(D^2+4D+4)y = 2e^{-2x}$
4. $(D^3-2D^2-D+2)y = 2e^x$
5. $(D+1)(D+2)(D+3)y = e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+5$
6. $(D^2-3D+2)y = 2x-1$
7. $(D^3+27)y = x^3$
8. $(D^2+2aDy+a^2)y = e^{-ax}+6x+3$
9. $(D^2-4)y = 12 \cosh 2x$
10. $(D^3-9D)y = 108 \sinh 3x$
11. $(D^4-8D^2+16)y = 64 \cosh 2x$

(குறிப்பு: 5 பயிற்சியில் நிறுவிய உண்மைகளை (9), (10), (11)க்குப் பயன்படுத்தலாம். நேர் முறையிலும் செய்யலாம்.

12. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+k\dfrac{dy}{dt}+p^2y = \cos pt$

    ($p \gtreqless k$ என்ற மூன்று நிலைகளிலும் தீர்வு காண்க).

13. $L\dfrac{d^2q}{dt^2}+R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{q}{C} = E \cos wt$;

    $CR^2 = 4L(1-Lcw^2)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

14. $(D^3+3D^2+4D+2)y = 4x^2$
15. $(D^2-3D+2)y = 4x^2$
16. $(D^4-4D^2)y = 480x^2$
17. $(D^2-1)y = x^2$
18. $D^4(D^2-1)y = 360x^2$
19. $(D^2+2)y = 2x^3+2x^2$
20. $(D^3-2D+4)y = x^4+3x^2-5x+2$
21. $(D-2)^2y = e^x+6xe^{2x}$
22. $(D^3-3D^2-6D+8)y = xe^{-3x}$
23. $(D^4-2D^3-3D^2+4D+4)y = x^2e^x$
24. $(D^2-1)y = x \sin x+(1+x^2)e^x$

25. $(D^3+1)y = e^{2x} \sin x + e^{x/2} \sin \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

26. $(D^2+6D+18)y = 108x^2e^{-3x} \cos 3x$

27. $\dfrac{ND+M}{(D-a)^2+b^2} X$இன் மதிப்பு,

$\dfrac{1}{2ib}\left[\dfrac{1}{D-a-ib}\right] X$ என்பதை $(ND+M)$ஆல் செயற்படுத்தி வரும் மெய்யெண் பகுதியைப் போல் இரு மடங்கு என, அதாவது

$$\frac{e^{ax}\sin bx}{b}\int e^{-ax}\cos bxX.dx$$

$$-\frac{e^{ax}\cos bx}{b}\int e^{-ax}\sin bxX.dx$$

என்பதற்குச் சமமென நிறுக. N, M, a, b மாறிலிகள் (ஜான்சன் : வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ; 106 ஆம் பத்தி).

28. $(D-a)^n y = e^{ax}$ என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு காண்க.

29. $f(z) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$$f(D)y = e^{a_1x} + e^{a_2x} + \ldots + e^{a_nx}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்ன ? $a_1 = a_2$ எனில் சிறப்புத் தீர்வு எவ்வாறு மாறும் ? $a_1 = a_2 = \ldots = a_r$ என r தீர்வுகள் சமமானால் சிறப்புத் தீர்வு எவ்வாறு அமையும் ?

30. $(D^2+5D+6)y = e^{-2x}\sec^2x(1+2\tan x)$

என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு காண்க.

விடைகள்

பயிற்சி 6·3

1. $y = Ae^x + Be^{2x} + e^{3x}$

2. $y = (A+Bx)e^{-3x} + \dfrac{e^{2x}}{25}$

3. $y = (A+Bx)e^{-2x} + x^2e^{-2x}$

4. $y = Ae^x + Be^{-x} + Ce^{2x} - xe^x$

5. $y = e^{-x}\left(A + \dfrac{x}{2}\right) + e^{-2x}(B-x) + e^{-3x}\left(C + \dfrac{x}{2}\right) + \frac{5}{6}$

6. $y = Ae^x + Be^{2x} + x + 1$

7. $y = e^{\frac{3x}{2}}\left[A\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right] + Ce^{-3x}$
$+\frac{x^3}{27} - \frac{2}{243}.$

8. $y = (A+Bx)e^{-ax} + \frac{x^2}{2}e^{-ax} + \frac{6x}{a^2} - \frac{12}{a^3} + \frac{3}{a^2}$

9. $y = (A+3x)\sinh 2x + B\cosh 2x$

10. $y = A + B\cosh 3x + (C+6x)\sinh 3x$

11. $y = (A+Bx+2x^2)\cosh 2x + (K+Lx)\sinh 2x$

12. $p>k$; $y = e^{-kt}(A\cos wt + B\sin wt) + \frac{1}{2kp}\sin pt$
இங்கு $w^2 = p^2 - k^2$

$p = k$; $y = (A+Bt)e^{-pt} + \frac{1}{2p^2}\sin pt$

$p < k$; $y = e^{-kt}(A\cosh wt + B\sinh wt)$
$+\frac{1}{2kp}\sin pt$ (இங்கு $w^2 = k^2 - p^2$)

13. $\alpha = R/2L$ எனக் கொண்டு தீர்வு
$y = e^{-\alpha t}(A\cos wt + B\sin wt) + \frac{2E}{R\alpha^2 + 4Rw^2}(\alpha\cos wt$
$+2w\sin wt)$

14. $y = Ae^{-x} + e^x(B\cos x + C\sin x) + 2(x^2 - 4x + 5)$

15. $y = Ae^x + Be^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$

16. $y = A + Bx + Ce^{2x} + Ee^{-2x} - 10x^4 - 30x^2$

17. $y = Ae^x + Be^{-x} - x^2 - 2$

18. $y = A + Bx + Cx^2 + Ex^3 + Fe^x + Ge^{-x} - (x^6 + 30x^4)$

19. $y = A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x + x^3 + x^2 + (3x+1)$

20. $y = Ae^{-2x} + e^x(B\cos x + C\sin x)$
$+\frac{2x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 10x - 7}{8}$

21. $y = (A+Bx)e^{2x} + e^x + x^3e^{2x}$

22. $y = Ae^x + Be^{4x} + Ce^{-2x} - e^{-3x}\frac{(28x+39)}{784}$

23. $y = e^{2x}(C_1+C_2x)+e^{-x}(C_3+C_4x)+\frac{1}{4}e^{x}(x^2+2x+\frac{7}{2})$

24. $y = C_1e^{x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}(x \sin x+\cos x)+\frac{1}{12}xe^{x}(2x^2-3x+9)$

25. $y = C_1e^{-x}+e^{x/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{e^{2x}}{130}$

$$(3 \sin x-11 \cos^{x})-\frac{1}{6}xe^{x/2}\left(\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

26. $y = e^{-3x}\{A\cos3x+B\sin3x+(6x^3-x)\sin3x+3x^2\cos3x\}$

28. $y = (A_1+A_2x+\dots+A_nx^{n-1})e^{ax}+\frac{x^n}{n!}e^{ax}$

29. $y = x(e^{a_1x}+{}^{a_2x}+\dots+e^{a_nx})$

$$y = \frac{x^2}{2!}e^{a_1x}+x(e^{a_3x}+e^{a_4x}+\dots+e^{a_nx})$$

$$y = \frac{x^r}{r!}e^{a_1x}+x(e^{a_{r+1}x}+e^{a_{r+2}x}+\dots+e^{a_nx})$$

30. $y = e^{-2x} \tan x$

7. ஒருபடிக்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் —மாறிகளையுடைய கெழுக்கள்— ஒருபடித்தான சமன்பாடுகள்

(Linear Equations with variable co-efficients—Homogeneous equations)

7-1. $(D^n+P_1D^{n-1}+\dots+P_n)y = F(x)$ என்ற சமன்பாட்டில் $P_1, P_2, \dots, P_n$ என்பவை மாறிலிகள் எனக் கொண்டு இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கண்டோம். அதற்கு மேலும், $P_1, P_2, \dots, P_n$ என்பவை x ஒட்டிய சார்புகளாக இருப்பின் இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காணும் முறைகளை இப் பகுதியில் காண்போம்.

சிறப்பாக, ஒருபடித்தான ஒருபடிக்குரிய வகைக்கெழுச் சமன் பாடுகள் எனப்படும் வகையில் அமைந்திருக்கும்,

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+P_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+P_ny = F(x) \qquad \dots\dots(A)$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் முறையை முதலில் காண்போம். இவ் வமைப்பில் $P_1, P_2, \dots, P_n$ என்பவை மாறிலிகள்.

இந்தச் சமன்பாடு (A)

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+P_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+P_ny = F(x) \dots\dots(B)$$

என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு சிறப்பான அமைப்பாகும்.

[$(ax+b)^r$க்கு பதில் x^r மட்டுமே (A)இல் தோன்றுவது காண்க. அதாவது $a = 1, b = 0$ என்ற சிறப்பமைப்பு]

*(B) என்ற அமைப்பு இலெஜண்டர் (Legendre) அமைப்பு எனப்படும்.

$ax+b = z$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$
$$= a\frac{dy}{dz}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(a\frac{dy}{dz}\right)$$
$$= \frac{d}{dz}\left(a\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}$$
$$= a^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

அவ்வாறே

$$\frac{d^ry}{dx^r} = a^r\frac{d^ry}{dz^r}$$

எனக் கிட்டும். எனவே இலெஜெண்டர் அமைப்பு

$$a^nz^n\frac{d^ny}{dz^n}+a^{n-1}z^{n-1}P_1\frac{d^{n-1}y}{dz^n}+\dots+P_ny = F\left(\frac{z-b}{a}\right) \quad \dots\dots(C)$$

என்று வரும் $F\left(\frac{z-b}{a}\right)$ என்பது ஒரு zஇன் சார்பாதலால்; $Z(z)$ எனக் கொள்ளலாம். a என்பது ஒரு மாறிலியாதலால், a^nஆல் முழுவதும் வகுத்து எழுதினுல் (C) என்பது

$$z^n\frac{d^ny}{dz^n}+q_1z^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}+\dots+q_ny = \frac{1}{a^n}Z(z) \quad \dots\dots(D)$$

என்ற அமைப்பில் பெறப்படும். ஆகவே (D)இன் அமைப்பும் (A)இன் அமைப்பும் ஒரே அமைப்புதான். ஆகவே (A) என்னும் அமைப்பிலேயே வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக்கொண்டு, அதன் தீர்வு காணும் முறையைக் காண்போம்.

7-2. $x^n\frac{d^ny}{dx^n}p_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+p_ny = F(x)$ **என்ற அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்போம்.**

---

* ஆட்ரியன் மேரி இலெஜண்டர் (Adrien Marie Legendre) வாழ்ந்த காலம் 1752—1833. சிறந்த கணித மேதை. இவர் இலாப்ளாஸ் (Laplace) உடன் சேர்ந்து "கோள இசையியல்" (Spherical Harmonics) என்ற தற்கால்க் கணிதப் பகுதியை உருவாக்கினுர்.

முதல்முறை :

$z = \log x$ அதாவது $x = e^z$ என கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய 4-1.இல் (A) என்ற சமன்பாட்டமைப்பில் நமக்கு y, z இரண்டையும் தொடர்புபடுத்திய ஒரு சமன்பாடு கிட்டும். அதற்கு நமக்குத் தெரிந்த முறையில் தீர்வு கண்டு $z = \log x$ எனத் தீர்வில் மாற்றீடு செய்து தீர்வு பெறலாம்.

$z = \log x$ எனக்கொள்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\ \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \ \cdots\cdots\ = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \ \cdots\cdots\ = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right)$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left(\frac{d^ny}{dz^n} - \frac{n(n-1)}{2!}\ \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\ \frac{dy}{dz}\right)$$

என்ற மாற்றங்கள் பெறப்படும்.

$\frac{d}{dz} \equiv D$ எனக் கொள்வோமானால்

$$x\frac{dy}{dx} = Dy$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$$

... ...

... ...

... ...

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D(D-1)\ldots\ldots(D-n+1)y$$

எனவே 7-1. (A) என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாடு

$$[D(D-1)\ldots(D-n+1) + p_1D(D-1)\ldots(D-n+2) + \ldots + p_n]\ y = Z(z)$$ எனவரும்.

இதை நாம் சென்ற பகுதியில் கண்டவாறு தீர்த்து, துணைத்தீர்வும், சிறப்புத் தீர்வும் கண்டு $z = \log x$ என ஈடுசெய்துவிட்டால் 7-1. (A) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு கிட்டும்.

குறிப்பு 1: துணைத்தீர்வு காண

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)+p_1m(m-1)\ldots(m-n+2)+\ldots+p_n = 0$$

என்ற சமன்பாட்டினை எடுத்துக்கொள்வோம். (இது முன்னரே அறிந்தது). இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என இருப்பின்

$$y = C_1e^{\alpha_1 z}+C_2e^{\alpha_2 z}+\ldots+C_ne^{\alpha_n z}$$

என்று வரும். ஆனல் $x=e^z$ ஆதலால்

$$y = C_1x^{\alpha_1}+C_2x^{\alpha_2}+\ldots+C_nx^{\alpha_n}$$

என்ற துணைச் சமன்பாடு உடனடியாகக் கிட்டும்.

α என்ற தீர்வு r முறை மடங்கி வரின் துணைத் தீர்வு

$$\begin{aligned} y &= (C_0+C_1z+C_2z^2+\ldots+C_{r-1}z^{r-1})e^{\alpha z} \\ &\qquad + C_re^{\alpha_r z}+\ldots+C_ne^{\alpha_n z} \\ &= [C_0+C_1(\log x)+\ldots+C_{r-1}(\log x)^{r-1}]x^{\alpha} \\ &\qquad + C_rx^{\alpha_r}+\ldots+C_nx^{\alpha_n} \end{aligned}$$

என்று கிட்டும். இத் துணைத்தீர்வு காணும்பொழுது $\alpha+i\beta$ என்ற கற்பனைத் தீர்வு துணைச் சமன்பாட்டிற்குக் கிடைக்கப்பெற்றல் துணைத் தீர்வு

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha z}(A\cos\beta z+B\sin\beta z) \\ &\qquad + C_3e^{\alpha_3 z}+C_4e^{\alpha_4 z}+\ldots+C_ne^{\alpha_n z} \\ &= \{A\cos(\beta\log x)+B\sin(\beta\log x)\}x^{\alpha} \\ &\qquad + C_3x^{\alpha_3}+C_4x^{\alpha_4}+\ldots+C_nx^{\alpha_n} \end{aligned}$$

என்று கிட்டும்.

குறிப்பு 2: (A)இன் சிறப்புத் தீர்வு காண

$$y = \frac{1}{f(D)}Z(z)$$

என்ற தொடர்பினைப் பயன்படுத்தல் வேண்டும். இதற்குரிய முறைகள் முன்னர் 5-3.இல் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவற்றினை $Z(z)$இன் தன்மைக்கு ஏற்பப் பயன்படுத்திப் பின்னர் $z = \log x$ என ஈடு செய்யின் சிறப்புத் தீர்வினைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக: $Z(z) = e^{az}$ என்ற அமைப்பில் இருந்து $f(a) \neq 0$ என்றும் இருந்தால்

$$y = \frac{1}{f(a)} e^{az}$$
$$= \frac{1}{f(a)} x^a$$

என்ற சிறப்புத்தீர்வு பெறப்படும். 5-3.இல் கூறியதுபோலவே $f(D)$இல் $D-a$ என்பது r முறை மடங்கி, காரணிகளாகக் கிடைக்கும் எனில், அதாவது

$$f(D) = (D-a)^r \phi(D),\ \phi(a) \neq 0,$$

எனில், தீர்வு

$$y = \frac{z^r}{r!} \quad \frac{e^{az}}{\phi(a)}$$
$$= \frac{(\log x)^r}{r!} \quad \frac{x^a}{\phi(a)}$$

எனப் பெறப்படும்.

7–2°1. சிறப்புத்தீர்வு காண்பதற்கு மாற்றுமுறை:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y = f(x)$$

என்பது கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சமன்பாடு 5-4·°2. என்ற பகுதியில் நிறுவியிருக்கும் வகையில்

$$\theta \equiv x \frac{d}{dx} \equiv xD$$

என்ற செயலின்படி

இச்சமன் பாட்டை

$$[\theta(\theta-1)(\theta-2)\dots\dots(\theta-n+1) + P_1\theta(\theta-1)\dots\dots(\theta-n+2) + \dots\dots + P_n]\, y = F(x)$$

என்று எழுதலாம். அதாவது

$$f(\theta)y = F(x)$$

எனக் கொண்டு $f(\theta)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காண்போம். அவைகள் $\theta_1, \theta_2, \dots\dots \theta_n$ என்று இருப்பின், சமன்பாட்டின் துணைத்தீர்வு

$$= C_1 x^{\theta 1} + C^2 x^{\theta 2} + \dots\dots + C_n x^{\theta n}$$

என எழுதலாம். இங்கு $C_1, C_2, \dots\dots C_n$ என்பவை மாறிலிகள்.

இப்போது சிறப்புத் தீர்வு காண

$$y = \frac{F(x)}{f(\theta)}$$

என்று எழுதலாம். எனவே,

$$y = \left[\frac{1}{\theta-\alpha_1} \cdot \frac{1}{\theta-\alpha_2} \dots\dots \frac{1}{\theta-\alpha_n}\right] F(x)$$

என எழுதி 6-2·1. இல் விளக்கப்பட்ட முறைப்படி சிறப்புத் தீர்வு காணலாம். அல்லது

$$\frac{1}{f(\theta)}F(x) = \left[\frac{N_1}{\theta-\alpha_1}+\frac{N_2}{\theta-\alpha_2}+\dots\dots+\frac{N_n}{\theta-\alpha_n}\right]F(x)$$

என எழுதி 6-2·2 இல் விளக்கப்பட்ட முறைப்படி சிறப்புத் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

முதல் முறை : $x = e^z$ அல்லது $z = \log x$ என ஈடு செய்து தீர்வு காணல்.

$D \equiv \frac{d}{dz}$ என ஏற்று, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$[D(D-1)-4D+4]\,y = x^2 = e^{2z}$$

என்று எழுதலாம். அதாவது

$$(D^2-5D+4)y = e^{2z}$$

துணைத் தீர்வு : $C_1e^{4z}+C_2e^z$

$$= C_1x^4+C_2x$$

சிறப்புத் தீர்வு : $\dfrac{e^{2z}}{D^2-5D+4}$

$$= \frac{e^{2z}}{-2} = \frac{x^2}{-2}$$

எனவே முழுத்தீர்வு

$$y = C_1x^4+C_2x-\frac{x^2}{2}$$ என்பதாகும்.

இரண்டாவது முறை (a):

$$x\frac{d}{dx} \equiv \theta$$

என்று கொண்டு தீர்வு காணுதல்.

$$[\theta(\theta-1)-4\theta+4]y = x^2$$

அதாவது $(\theta^2-5\theta+4)y = x^2$

எனவே துணைத்தீர்வு : $C_1x^4+C2x.$

சிறப்புத் தீர்வு $$y = \frac{1}{(\theta-4)(\theta-1)}x^2$$

அதாவது $$(\theta-4)(\theta-1)y = x^2$$

$(\theta-1)y = u$ எனக் கொண்டால்

$$(\theta-4)u = x^2$$

என்று கிட்டும். அதாவது

$$x\frac{du}{dx} - 4u = x^2$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} - \frac{4}{x}u = x$$

எனவே தீர்வு $$u = \frac{x^2}{-2}$$

அதாவது $$(\theta-1)\,y = \frac{x^2}{-2}$$

$$\therefore \quad x\frac{dy}{dx} - y = -\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{x}{2}$$

இதன் தீர்வு $$y = \frac{-x^2}{2}$$

எனவே தீர்வு $$y = C_1x^4 + C_2x - \frac{x^2}{2}$$

இரண்டாவது முறை (மற்றொரு வழி) (b):

$$y = \frac{x^2}{(\theta-4)(\theta-1)}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{\theta-4} - \frac{1}{\theta-1}\right\}x^2$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{\theta-4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{\theta-1}$$

எனவே $$u = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{\theta-4}$$

என்று கொண்டால்,

$$x\frac{du}{dx} - 4u = \frac{x^2}{3}$$ என்றாகும்.

அதாவது $$\frac{du}{dx} - \frac{4u}{x} = \frac{x}{3}$$

இதன் தீர்வு $u = \frac{-x^2}{6}$

மேலும் $v = \frac{1}{3}\ \frac{x^2}{\theta - 1}$

என்று கொண்டால் $\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = \frac{x}{3}$

என்று கிட்டும். எனவே

$$v = \frac{x^2}{3}$$

எனவே முழு சிறப்புத் தீர்வு

$$y = u - v$$

$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{3}$$

$$= -\frac{x^2}{2}$$

எனவே முழுத் தீர்வு

$$y = C_1x^4 + C_2x - \frac{x^2}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$x^3\ \frac{d^3y}{dx^3} - 4x^2\ \frac{d^2y}{dx^2} + 5x\ \frac{dy}{dx} - 2y = x^3$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$z = \log x \text{ அல்லது } x = e^z$$

என ஈடு செய்து, $D \equiv \frac{d}{dz}$ எனக்கொண்டால் சமன்பாடு

$$[D(D-1)(D-2) - 4D(D-1) + 5D - 2]\, y = e^{3z}$$

என்றாகும். அதாவது

$$(D^3 - 7D^2 + 11D - 2)\, y = e^{3z}$$

எனவே துணைத் தீர்வு

$$= Ae^{2z} + e^{\frac{5}{2}z}\left\{Be^{\frac{\sqrt{21}}{2}z} + Ce^{-\frac{\sqrt{21}}{2}z}\right\}$$

$$= Ax^2 + x^{\frac{5}{2}}\left\{Bx^{\frac{\sqrt{21}}{2}} + Cx^{-\frac{\sqrt{21}}{2}}\right\}$$

சிறப்புத் தீர்வு

$$y = \frac{e^{3z}}{D^3-7D^2+11D-2}$$

$$= \frac{x^3}{-5}$$

எனவே முழுத் தீர்வு

$$y = Ax^2+x^{\frac{5}{2}}\left\{Bx^{\frac{\sqrt{21}}{2}}+Cx^{-\frac{\sqrt{21}}{2}}\right\}-\frac{x^3}{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : இலெஜெண்டர் அமைப்பு :

$$(x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4(x+a)\frac{dy}{dx}+6y = x$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$x+a = u$ எனக் கொண்டால்

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}$ என்றும் $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}$

என்றும் மாறும். ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$u^2\frac{d^2y}{du^2}-4u\frac{dy}{du}+6y = u-a$$

என மாற்றி அமைக்கலாம்.

$$\theta \equiv u\frac{d}{du}$$

என்ற செயலியைப் பயன்படுத்த

$$[\theta(\theta-1)-4\theta+6]\,y = u-a$$

என்று கிட்டும்

$$\therefore\quad (\theta^2-5\theta+6)\,y = u-a$$

என்றாகும்.

எனவே துணைத் தீர்வு

$$= C_1u^3+C_2u^2$$

சிறப்புத் தீர்வு $= \dfrac{u-a}{(\theta-3)(\theta-2)}$

$$= \left[\frac{1}{\theta-3}-\frac{1}{\theta-2}\right](u-a)$$

$V = \left[\dfrac{1}{\theta-3}\right](u-a)$ எனக் கொண்டால்

$$V = \left(\frac{a}{3} - \frac{u}{2}\right) \text{என்றும்}$$

$$W = \left[\frac{1}{\theta-2}\right] u - a$$

எனக் கொண்டால்

$$W = -u + \frac{a}{2}$$

என்றும் கிட்டும். எனவே

சிறப்புத் தீர்வு $= V - W$

$$= \frac{a}{3} - \frac{u}{2} + u - \frac{a}{2}$$

$$= \frac{u}{2} - \frac{a}{6}$$

எனவே முழுத் தீர்வு

$$y = C_1 u^3 + C_2 u^2 + \frac{u}{2} - \frac{a}{6}$$

$$= C_1 (x+a)^3 + C_2 (x+a)^2 + \frac{x+a}{2} - \frac{a}{6}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$(3x+2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3\,(3x+2)\frac{dy}{dx} - 36y = 3x^2 + 4x + 1$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$e^z = 3x+2 \text{ அல்லது } z = \log(3x+2)$$

என ஈடு செய்து, $D \equiv \dfrac{d}{dz}$ என்று கொள்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{3}{3x+2} \cdot \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{3}{e^z}\frac{dy}{dz}\right]\frac{dz}{dx}$$

$$= \left[\frac{3}{e^z}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{3}{e^{+z}}\frac{dy}{dz}\right]\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{9}{(3x+2)^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{9}{(3x+2)^2}\frac{dz}{dx}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$[9D(D-1)+9D-36]\,y = 3x^2+4x+1$$

என்றாகும். மேலும்

$$3x^2+4x+1 = \frac{1}{3}(3x+2)^2-\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(e^{2z}-1)$$

என எழுதலாம். ஆகவே சமன்பாட்டை

$$(9D^2-36)\,y = \frac{1}{3}(e^{2z}-1)$$

அதாவது, $$(D^2-4)\,y = \frac{1}{27}(e^{2z}-1)$$

என்று மாற்றியமைக்கலாம். இதன் துணைத் தீர்வு

$$= Ae^{2z}+Be^{-2z}$$

சிறப்புத் தீர்வு

$$y = \frac{1}{108}(ze^{2z}+1)$$

எனவே முழுத் தீர்வு

$$y = A(e^{2z})+Be^{-2z}+\frac{1}{108}(ze^{2z}+1)$$

$$= A(3x+2)^2+\frac{B}{(3x+2)^2}+\frac{1}{108}\{(3x+2)^2\log(3x+2)+1\}$$

பயிற்சி 7

1. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$

2. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

3. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

4. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-3x\dfrac{dy}{dx}+4y=2x^2$

5. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+2y=x\log x$

6. $x^4\dfrac{d^4y}{dx^4}+6x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}+4y=120x^3$

7. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+2x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^2\log x+3x$

8. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+4y=x\sin(\log x)+\cos(\log x)$

9. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+x\dfrac{dy}{dx}-y=27x^4$

10. $(x+2)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-(x+2)\dfrac{dy}{dx}+y=3x+4$

11. $(x+1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\dfrac{dy}{dx}-y=\log(x+1)^2+x-1$

12. $(2x+1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2(2x+1)\dfrac{dy}{dx}-12y=6x$

விடைகள்

பயிற்சி 7

1. $y = C_1x^2+C_2x$
2. $y = x(A+B\log x)$
3. $y = x[A+B\log x+(C\log x)^2]$
4. $y = x^2[A+B\log x+(\log x)^2]$
5. $y = x[A\cos(\log x)+B\sin(\log x)]+x\log x$
6. $y = Ax+\dfrac{B}{x}+Cx^2+\dfrac{E}{x^2}+x^3$
7. $y = Ax+x[B\log(\cos x)+C\sin(\log x)]$
   $+\frac{1}{2}x^2(\log x-2)+3x\log x$
8. $y = x[A\cos(\sqrt{3}\log x)+B\sin(\sqrt{3}\log x)]$
   $+\frac{1}{13}[3\cos(\log x)-2\sin(\log x)]+\frac{1}{2}x\sin(\log x)$
9. $y = Ax+Bx\log x+Cx(\log x)^2+x^4$
10. $y = (x+2)[A+B\log(x+2)]+\frac{3}{2}[\log(x+2)]^2-2$
11. $y = C_1(x+1)+\dfrac{C_2}{x+1}-\log(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)\log(x+1)+2$
12. $y = \dfrac{A}{2x+1}+B(2x+1)^3-\dfrac{3x}{8}+\dfrac{1}{16}.$

8. பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்; சில சிறப்பான அமைப்பிலுள்ள சமன்பாடுகள்.

(Exact Differential Equations - Equations of particular forms)

8–1. முன்னர் பகுதி IIIஇல் $Mdx+Ndy=0$ என்பது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாக இருப்பதற்கு வேண்டிய தேவையான, போதுமான, கட்டுப்பாடு

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

என்று கண்டோம். இச்சமன்பாடுகள் பொருத்தமான சமன்பாடுகளாக இல்லாது இருப்பின், அவற்றினைப் பொருத்தமான சமன்பாடுகளாக மாற்ற, தொகைக்காரணிகள் கண்டு, பின்னர் அவைகளைத் தீர்த்தோம்.

இந்தப் பகுதியில், முதற் பிரிவில் பொதுவாக ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு [n–வரிசை–முதற்படி அமைப்பு–பகுதி IV–(A)] எந்தக் கட்டுப்பாட்டில் ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாக இருக்குமெனக் காண்போம்.

8–2. வரையறை : $(n-1)$ வரிசையிலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டில் xஒட்டிய வகைக்கெழு காணும் செயல் மட்டுமே செயற்பட்டுப் பெறப்படும் ஒரு nவரிசைச் சமன்பாடே ஒரு பொருத்தமான nவரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடெனப்படும். அதாவது

$$f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ \ldots\ldots,\ \frac{dy}{dx},\ y\right)=\int f(x)dx+c$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, xஒட்டிய வகைக்கெழு கண்டு

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_ny=f(x) \qquad \ldots\ldots(A)$$

என்ற சமன்பாடு கிட்டினால், (A) என்பது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடு எனப்படும். இன்னும் குறிப்பாக,

$$\frac{d^3y}{dx^3}-x\frac{dy}{dx}+10xy = 3x^2+4x+2$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, xஒட்டிய வகைக்கெழு காண

$$\frac{d^4y}{dx^4}-x\frac{d^2y}{dx^2}+(10x-1)\frac{dy}{dx}+10y = 6x+4 \qquad \ldots\ldots(B)$$

என்ற சமன்பாடு கிட்டும். (B) என்பது ஒரு நால் வரிசைப் பொருத்த மான சமன்பாடு எனப்படும். அவ்வாறே (B)இலிருந்து

$$\frac{d^5y}{dx^5}-x\frac{d^3y}{dx^3}+(10x-2)\frac{d^2y}{dx^2}+20\frac{dy}{dx} = 6 \qquad \ldots\ldots(C)$$

என்ற பொருத்தமான சமன்பாடு பெறலாம்.

8 – 3. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு n வரிசை வகைக்கெழுச் சமன் பாட்டை எப்படி ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடு என்று முடிவு கட்டுவது?

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^n}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}$$
$$+P_ny = X \ldots\ldots(E)$$

என்ற சமன்பாடு ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடா யிருக்கத் தேவையான கட்டுப்பாட்டைக் காண்போம். $P_o, P_1, \ldots, P_n$ என்பவை யாவும் xஇன் சார்புகளாகக் கொள்வோம். (சில அல்லது எல்லாம் மாறிலிகளாகவும் இருக்கலாம்)

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n} \text{ என்பது } \frac{d}{dx}\left[P_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]$$

என்பதில் ஒரு பகுதியாம். ஏனெனில்

$$\frac{d}{dx}\left[P_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right] = P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P^1{}_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \ldots\ldots(F)$$

(E) இன் இடப்பக்கத்திலிருந்து (F) இன் வலப்பக்கத்தைக் கழிக்க

$$(P_1-P_o{}^1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+P_ny \ldots\ldots(G)$$

கிட்டும். இதன் முதலுறுப்பு

$$\frac{d}{dx}\left[(P_1-P_0^1)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right]$$ இல் ஒரு பகுதியாகும். ஏனெனில்

$$\frac{d}{dx}\left[(P_1-P_0{}^1)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right]=(P_1-P_0{}^1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$
$$+(P_1{}'-P_0{}'')\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\ \ldots\ldots(H)$$

(G) இலிருந்து (H) இன் வலப்புறத்தைக் கழிக்க

$$(P_2-P_1{}'+P_0{}'')\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-4}}+P_3\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}+\ldots+P_ny\ldots\ldots(J)$$

கிட்டும். இதன் முதலுறுப்பு

$$\frac{d}{dx}\left[(P_2-P_1{}'+P_0{}'')\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right]$$ இல் ஒரு பகுதியாகும்.

இதேபோல் தொடர்ந்து சென்றால்

$$[P_{n-1}-P'_{n-2}+P''_{n-3}-\ldots+(-1)^{n-1}P_0{}^{(n-1)}]\frac{dy}{dx}+P_ny\ldots\ldots(K)$$

என்பது கிடைக்கும். இதன் முதலுறுப்பு*

$$\frac{d}{dx}\{[P_{n-1}-P_n{}^{(1)}{}_{-2}+P_n{}^{(2)}{}_{-3}-\ldots+(-1)^{n-1}P_0{}^{(n-1)}]\,y\}\ldots\ldots(L)$$

இன் ஒரு பகுதியாகும். ஏனெனில் (L)ஐ விரித்தெழுத

$$[P_{n-1}-P_n{}^{(1)}{}_{-2}+\ldots+(-1)^{n-1}P0^{(n-1)}]$$

$$\frac{dy}{dx}+[P_n{}^{(1)}{}_{-1}-P_n{}^{(2)}{}_{-2}+\ldots+(-1)^{n-1}P_o{}^n]y\ \ldots\ldots(M)$$

எனக் கிட்டும். (K) உம் (M) உம் எப்பொழுது சமமாகும் என்று பார்ப்போமானால்

$$P_n=P^{(1)}{}_{n-1}-P^{(2)}{}_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}P_o{}^n\ldots\ldots(N)$$

என்ற கட்டுப்பாடு கிட்டும். எனவே (N)

என்ற கட்டுப்பாடு P_0, $P_1,\ldots,P_n$ என்பவற்றிடையே நிலவுமாயின் (A) இன் இடப்பக்கத்தை

$$\frac{d}{dx}\Bigg[P_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(P_1-P_0{}^{(1)})\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+(P_2-P_1{}^{(1)}+P_0{}^{(2)})$$
$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}+\ldots+\{P_{n-1}-P^1{}_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}P_0{}^{(n-1)}\}\,y\Bigg]$$

என எழுதமுடியும். அப்போது (A) இன் முதல் தொகைத் தீர்வு

$$P_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(P_1-P_0{}^1)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots$$
$$+\{P_{n-1}-P^{(1)}{}_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}P_0{}^{n-1}\}y$$

குறிப்பு: *', '', ''',......என்பவற்றிற்குப் பதிலாக (1), (2), (3) ...... என எழுதப்பட்டிருக்கின்றன.

$$= \int X dx + B \text{ (}B\text{ மாறிலி)...(R)}$$

எனப்பெறப்படும். எனவே (A) என்ற சமன்பாடு ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாக இருக்க வேண்டுமாயின், தேவையான கட்டுப்பாடு (N) என்ற கட்டுப்பாடு, அதாவது

$$P_n - P^{(1)}{}_{n-1} + P^{(2)}{}_{n-2} - \dots + (-1)^n P^n{}_0 = 0 \ (N_1)$$

என்பதாகும். இக்கட்டுப்பாடே போதிய கட்டுப்பாடு என்பதையும் எளிதில் காணலாம்.

8-4. பொருத்தமான சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்.

(A) என்ற சமன்பாட்டில் தோன்றும் $P_0, P_1, \dots, P_n$ என்பவற்றிற்கிடையே (N) அல்லது (N_1)இல் கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாடு பொருந்தினல் (R) என்ற முதல் தீர்வு வரும். இங்கும் இதேமாதிரியான ஒரு கட்டுப்பாடு நிலவுமாலுல் $(n-2)$ வரிசையிலுள்ள தீர்வு கிடைக்கும். (R)இன் இடது புறம்

$$\int\int X (dx)^2 + Bx + B_1$$

என்று கிட்டும். இவ்வாறே கடைசியாக ஓர் இரண்டாம் வரிசை அல்லது முதல் வரிசைச் சமன்பாடு வரலாம். அதன் தீர்வை எளிதாகக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2e^x \dfrac{dy}{dx} + 2e^x y = e^x$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இது பொருத்தமான சமன்பாடாவென முதலில் சோதிக்கலாம்.

$$P_0 = 1$$
$$P_1 = 2e^x$$
$$P_2 = 2e^x$$
$$\therefore \ P_2 - P_1' + P_0'' = 2e^x - 2e^x + 0 = 0$$

எனவே, இது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாகும். முதல் உறுப்பு $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ ஆகும்; இரண்டாவது, மூன்றுவது உறுப்புகள் சேர்ந்து $\dfrac{d}{dx}(2ye^x)$ ஆகும்.

எனவே சமன்பாட்டை,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx} + 2ye^x\right] = e^x \text{ என எழுதலாம்.}$$

இதன் முதல் தொகையாவது,

$$\frac{dy}{dx}+2ye^{x} = \int e^{x}dx$$

$$= e^{x}+A \text{ என வரும்.}$$

இதன் தீர்வு,

$$ye^{2e^{x}} = \int e^{2e^{x}}(e^{x}+A)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{2e^{x}}+A\int e2e^{x}\,dx+B$$

எனப் பெறப்படும்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு, ஒரு சிறு மாற்றத்தால் ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாவதைக் காண்க. அவ்வாறு சில சமன்பாடுகள் அமையலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\sqrt{x}\,\frac{d^2y}{dx^2}+2x\,\frac{dy}{dx}+3y=x$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இங்கு $P_0 = \sqrt{x}$

$P_1 = 2x$

$P_2 = 3$

$$P_2-P_1'+P_0'' = 3-2-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$\neq 0$$

எனவே இது நேரடியாக ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடல்ல. ஆனால், இரு பக்கங்களையும் x^m என்ற தொகைக் காரணியால் பெருக்கி அதன் பின்

இடப்பக்கம்

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{dy}{dx}, y\right)\right]$$

என்ற அமைப்பில் வருகின்றதாவெனப் பார்ப்போம். இடப்பக்கம்

$$x^{m+1/2}\frac{d^2y}{dx^2}+2x^{m+1}\frac{dy}{dx}+3x^my$$

எனவே

$$P_2-P_1^{(1)}+P_0^{(2)}$$

$$= 3x^m-2(m+1)x^m+(m^2-\tfrac{1}{4})x^{m-3/2}$$

$$= x^{m-3/2}\,[x^{3/2}-2mx^{3/2}+m^2-\tfrac{1}{4}]$$

$$= x^{m-3/2}\,\{x^{3/2}(1-2m)+(m^2-\tfrac{1}{4})\}$$

இது முற்றும் பூச்சியமாக வேண்டுமெனில் $m=\frac{1}{2}$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவை. எனவே $x^{1/2}$ என்பதை இச்சமன்பாட்டிற்குரிய தொகைக் காரணியாகக் கொள்வோம். எனவே சமன்பாடு

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2x^{3/2}\frac{dy}{dx}+3x^{1/2}y=x^{3/2}$$

என்றாகும். இங்கு

$$P_2-P_1^{(1)}+P0^{(2)}=3x^{1/2}-3x^{1/2}+0$$
$$=0$$

ஆகும். எனவே

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2x^{3/2}\frac{dy}{dx}+3\sqrt{x}y=x\sqrt{x}$$

என்பது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாகின்றது. இப்பொழுது

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)-\frac{dy}{dx};$$

எனவே சமன்பாட்டை

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+(2x^{3/2}-1)\frac{dy}{dx}+3\sqrt{x}y=x\sqrt{x}$$

என எழுதலாம். மேலே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{d}{dx}\{(2x^{3/2}-1)y\}=x\sqrt{x}$$

என்று மாற்றியமைக்கலாம். அதாவது

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}+(2x^{3/2}-1)y\right]=x\sqrt{x}$$

எனவே, இதன் முதல் தீர்வு

$$x\frac{dy}{dx}+(2x^{3/2}-1)\,y=\tfrac{2}{5}x^{5/2}+C$$

அதாவது

$$\frac{dy}{dx}+\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)y=\frac{2}{5}x\sqrt{x}+\frac{C}{x}$$

என்றாகும். இதன் தீர்வு

$$\frac{y}{x}e^{\frac{4}{3}x^{3/2}}=\frac{1}{5}e^{\frac{4}{3}x^{3/2}}$$
$$+C_0\int\frac{e^{\frac{4}{3}x^{3/2}}}{x^2}\,dx+C_1$$

என்றாகும். இதுவே தீர்வாகும்.

பயிற்சி 8·1

பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமானவையா எனக் கண்டு தீர்வு காண்க.

1. $x\dfrac{d^3y}{dx^3}+(x^2+x+3)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(4x+2)\dfrac{dy}{dx}+2y=0$

2. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+5x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(2x-x^3)\dfrac{dy}{dx}-(2+x^2)\,y=40x^3-4x^5$

3. $2(y+1)\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+(y^2+2y)=0$

   ($u=y^2+2y$ என முதலில் ஈடு செய்க)

4. e^{-x} என்ற தொகைக்காரணியால் பெருக்கி

   $y\dfrac{d^3y}{dx^3}+3\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2}-2y\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y\dfrac{dy}{dx}=e^{2x}$

   என்ற சமன்பாட்டினைத் தீர்க்கவும்.

5. $x^2\dfrac{d^3y}{dx^3}+4x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x^2+2)\dfrac{dy}{dx}+3xy=2$

   (தொகைக்காரணி x^m எனக்கொள்க)

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2e^x\dfrac{dy}{dx}+2e^xy=x^2$

விடைகள்

பயிற்சி 8·1

1. $x\dfrac{dy}{dx}+(x^2+x+1)\,y=C_1x+C_2$

2. $x^2y=Ae^x+Be^{-x}+Cx+x^5$

3. $y^2+2y=A\cos x+B\sin x$

4. $y^2=A+Bx+Cxe^x+Ee^{2x}$

5. முதல் தொகை

   $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}+x^2\dfrac{dy}{dx}+x^3y=x^2+A.$

6. $e^{2e^x}y=\frac{1}{3}\int e^{2e^x}x^3dx+Ae\int e^{2e^x}dx+B$

8-5. சில சிறப்புமுறையில் அமையும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகள்.

8-5·1. அமைப்பு 1:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

இது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடு.

இதிலிருந்து,

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int f(x)dx + A_1$$

என்று கிடைக்கும். தொடர்ச்சியாகத் தொகை காணின்

$$y = \underbrace{\int\int \dots \int}_{n \text{ தடவை}} f(x)(dx)^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_{n-1}x + B_n$$

என்ற தீர்வை அடையலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$\frac{d^3y}{dx^3} = x \cos x$இன் தீர்வு காண்க.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int x \cos x \, dx + a_1$$

$$= x \sin x + \cos x + a_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -x \cos x + 2 \sin x + a_1 x + a_2$$ மேலும்

$y = -x \sin x - 3 \cos x + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சி 8·2

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m$

2. $x^4 \frac{d^4y}{dx^4} + 1 = 0$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} = x + \cos x + k$

4. $\frac{d^3y}{dx^3} = \sin^2 x$

விடைகள்

பயிற்சி 8·2

1. $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots\dots + a_n x^{n-1} \frac{\angle m}{\angle m+n} x^{m+n}$

2. $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \frac{1}{6} \log x$

3. $y = \frac{x^3}{6} - \cos x + \frac{kx^2}{2} + a_1 x + a_2$

4. $y = \frac{x^3}{12} + \frac{\sin 2x}{16} + \frac{ax^2}{2} + bx + C$

8-5·2. அமைப்பு 2 :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

இரு பக்கங்களையும் $2\frac{dy}{dx}$ ஆல் பெருக்க

$$2\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} f(y)$$

அதாவது

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2f(y)\frac{dy}{dx}$$

எனவே

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int f(y)\,dy + a_1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int f(y)\,dy + a_1}$$

$$\therefore \quad x + C = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + a_1}}$$

என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^2}{y^2} = 0$ என்பதின் தீர்வைக் காண்க.

$$\frac{2dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2a^2}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{2a^2}{y}\right)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2a^2}{y} + K$$

அதாவது, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a^2 + Ky}{y}}$

அதாவது, $\int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2a^2 + Ky}}\,dy = x + b.$

பயிற்சி 8·3

பின் வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y = 0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{\sqrt{y}} = 0$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$
4. $\frac{d^2y}{dx^2}+4y = 0$
5. $\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y = 0.$

விடைகள்

பயிற்சி 8·3

1. $y=A\cos(ax+b)$
2. $3x=2(\sqrt{y}-2a)(\sqrt{y}+a)^{\frac{1}{2}}+b$
3. $y=Ae^{2x}+Be^{-2x}$
4. $y=A\cos 2x+B\sin 2x$
5. $ax=\log(y+\sqrt{y^2+C_1})+C_2$ அல்லது $y=Ae^{ax}+Be^{-ax}$

8-5·3. அமைப்பு 3 :

$$f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dx}, x\right)=0$$

அதாவது y நேரடியாக சமன்பாட்டில் தோன்றாத அமைப்பு.

இங்கு $\frac{dy}{dx} = p$ என ஈடு செய்தால்

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2p}{dx^2}$$

... ...

... ...

... ...

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$f\left[\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2}p}{dx^{n-2}}, \ldots, p, x\right]=0$$

என்ற அமைப்பில் $(n-1)$ வரிசைச் சமன்பாடாக x, p இரண்டையும் தொடர்பு படுத்தி வரும். இச்சமன்பாட்டிலிருந்து

$$p = \frac{dy}{dx} = F(x)$$

என்ற தீர்வு காணமுடியுமானுல்

$$y = \int F(x)\, dx + C$$

என்ற தீர்வு கிட்டும்.

குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் மிகக் குறைந்த வகைக்கெழு வரிசை r என இருப்பின்

$$\frac{d^r y}{dx^r} = p$$

என ஈடு செய்யலாம்; அப்போது வரிசைப்படி

$$\frac{d^{r+1} y}{dx^{r+1}} = \frac{dp}{dx}$$

எனத் தொடர்ச்சியாக வரும்.

எடுத்துகாட்டு :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = p$$

எனக் கொள்வோமானுல்

$$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1+p^2}$$

என்ருகும்.

$$\therefore \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = a\,dx$$

$$\therefore \log\{p+\sqrt{1+p^2}\} = ax+b$$

அதாவது, $p+\sqrt{1+p^2} = C_1 e^{ax}$

அப்போது $\sqrt{1+p^2}-p = \dfrac{e^{-ax}}{C_1}$

எனக்கிட்டும். $\therefore 2p = C_1 e^{ax} - \dfrac{e^{-ax}}{C_1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{2}e^{ax} - \frac{e^{-ax}}{2C_1}$$

$$\therefore y = \frac{C_1}{2a}e^{ax} + \frac{e^{-ax}}{2C_1 a}$$

என்று தீர்வு அமையும்.

பயிற்சி 8·4

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $x^2\frac{d^3y}{dx^3} - 5x\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} = 0$

2. $x^2\frac{d^5y}{dx^5} - 4x\frac{d^4y}{dx^4} + 6\frac{d^3y}{dx^3} = 4$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}(1+x^2) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

4. $2x\frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + a^2 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$

(குறிப்பு: $p = \frac{d^2y}{dx^2}$ எனக் கொள்க.)

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}$

6. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + e^x = 0$

விடைகள்

பயிற்சி 8·4

1. $y = Ax^5 + Bx^3 + C$
2. $y = Ax^5 + Bx^4 + Cx^2 + Dx + E + \frac{x^3}{9}$
3. $y = Ax + (A^2+1)\log(x-A) + B$
4. $15C^2y = 4(Cx+a^2)^{5/2} + C_1x + C_2$
5. $y = x\log x + C_1x + C_2 - x$
6. $y = Ae^{-x} + B\frac{-e^x}{2}$

8·5·4. அமைப்பு 4 : நேரடியாகச் சமன்பாட்டில் x தோன்றாமை.

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \ldots, \frac{dy}{dx}, y\right) = 0$$

$$\text{இங்கு } \frac{dy}{dx} = p \text{ என ஈடுசெய்ய}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

இவற்றினைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்தால்

$$F\left(\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}, \ldots, p, y\right) = 0$$

என்ற அமைப்பில் p, y என இரண்டும் தோன்றி $(n-1)$ வரிசையில் உள்ள ஒரு சமன்பாடு வரும். இச்சமன்பாட்டிலிருந்து pஇன் மதிப்பைக் கண்டு பின்னர் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

இவற்றினைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்ய

$$p\,\frac{dp}{dy} - ap^2 = 0$$

என்று கிட்டும்

$$\therefore \quad p = 0 \text{ அல்லது } \frac{dp}{dy} = ap$$

அதாவது $y = C$ என்பது ஒரு தீர்வு.

$p = Ae^{ay}$ என்பது மற்றொரு தீர்வு.

$$\therefore \quad e^{-ay}dy = A\,dx$$

தொகை காண

$$\frac{-1}{a}e^{-ay} = Ax + B$$

அல்லது

$$a(Ax+B)+\frac{1}{e^{ay}} = 0$$

என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சி 8·5

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $y\,\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1 = 0$

2. $y\,\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y = 0$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\,\frac{dy}{dx}+4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$

விடைகள்

பயிற்சி 8·5

1. $y^2 = x^2+ax+b$

2. $\log\left[\left(y-\frac{1}{a}\right)+\sqrt{y^2-\frac{2y}{a}}\right] = \sqrt{a}x+b$

3. $\sin(a-2\sqrt{2}y) = be^{-2x}.$

8-5·5. அமைப்பு 5:

$$f\left\{\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, x\right\} = 0$$

$$q = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \text{ என ஈடு செய்தால்}$$

$$F\left(\frac{d^2q}{dx^2}, q, x\right) = 0$$

என்று கிட்டும். இதிலிருந்து q காண முடியுமானால் y காண இயலலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$x^2\frac{d^4y}{dx^4}-2\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q$$

என ஈடு செய்ய

$$x^2 \frac{d^2 q}{dx^2} - 2q = 0$$

எனப் பெறலாம். இது இலெஜெண்டர் சமன்பாட்டமைப்பு.

$$x \frac{d}{dx} \equiv \theta$$

என்ற சர்வசமச் செயலிப்படி

$$[\theta(\theta-1)-2]\, q = 0$$

இதன் தீர்வு

$$q = ax^2 + \frac{b}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ax^2 + \frac{b}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ax^3}{3} + b \log x + C$$

$$\therefore \quad y = \frac{ax^4}{12} + b\,(x \log x - x) + cx + d$$

என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சி 8·6

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $\dfrac{d^4 y}{dx^4} + a^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} = 0$ 2. $\dfrac{d^5 y}{dx^5} - 4\dfrac{d^3 y}{dx^3} = e^x$

3. $x^2 \dfrac{d^3 y}{dx^3} - 6\dfrac{dy}{dx} = x + 1$

விடைகள்

பயிற்சி 8·6

1. $y = A \sin ax + B \cos ax + Cx + E$
2. $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} - \dfrac{e^x}{3} + kx^2 + lx + m$
3. $y = Ax^4 + \dfrac{B}{x} - \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x}{6} + C$

8-5·6. அமைப்பு 6 :

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, x\right) = 0$$

இங்கு $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} = q$ என ஈடுசெய்ய,

$$F\left(\frac{dq}{dx}, q, x\right) = 0$$ என்ற அமைப்பில் சமன்பாடு வரும்.

இங்கு $q = \Psi(x)$ எனக் காண முடியுமானுல்,

$$\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} = \Psi(x)$$ என வரும்.

தொடர்ந்து தொகை கண்டுகொண்டே போனுல் தீர்வு பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 4$$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = q$$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{dq}{dx} + \frac{q}{x} = \frac{4}{x}$$ என்ற சமன்பாடு வரும்.

இதன் தீர்வு, $qx = \int \frac{4}{x} x\, dx$

$$= 4x + C$$

$$\therefore \quad q = 4 + \frac{C}{x}$$

அதாவது $\frac{dy}{dx} = 4 + \frac{C}{x}$

$$\therefore \quad y = \int\left(4 + \frac{C}{x}\right)dx$$

$= 4x + C\log x + A$ என்ற தீர்வு வரும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = x^3 + x^2$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\frac{dy}{dx}=q$$

எனக் கொண்டால்

$$x\frac{dq}{dx}+3q=x^3+x^2$$

என்ற சமன்பாடு கிட்டும். அதாவது

$$\frac{dq}{dx}+\frac{3q}{x}=x^2+x$$

இதன் தீர்வு

$$qx^3=\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}+A$$

$$\therefore\ q=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{5}+\frac{A}{x^3}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{5}+\frac{A}{x^3}$$

$$\therefore\ y=\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{15}-\frac{A}{2x^2}+B$$

இதையே

$$y=\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{15}+\frac{C}{x^2}+B$$

எனவும் எழுதலாம்.

பயிற்சி 8·6

1. $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=a\frac{d^2y}{dx^2}$

2. $2x\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}=0$

3. $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=2x$

4 $\frac{d^2y}{dx^2}\ \frac{dy}{dx}=x$

கட்டுப்பாடு $x=0$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}=a$

விடைகள்

பயிற்சி 8·6

1. $\dfrac{2Ay}{a} = A^2e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} + B$

2. $y = \dfrac{Cx^{1-\frac{a}{2}}}{1-\frac{a}{2}} + b$

3. $y = \dfrac{x^2}{2} + A\log x + B$

4. $y = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right] + A^1$

5. $15y = 8(x+C)^{5/2} + Ax + B$

9. இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்–சில சிறப்பு முறைகள்

(Differential Equations of the second order-Some special Methods)

9-1. முன்னுரை :

இதுவரை நாம் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் சில முறைகளைக் கண்டிருக்கிறோம். அவை குறிப்பிட்ட திட்டமான அமைப்புகளில் வரும்போதுதான் அம்முறைகள் பொதுவாகப் பயன்படும். ஆனால் சில சமன்பாடுகள் நேரடியாக அவ்வித அமைப்புகளில் இல்லாதுபோயினும் சில மாறுதல்கள் செய்து, அக்குறிப்பிட்ட அமைப்புகளில் அவற்றினைக் கொணர்ந்து பின்னர் தீர்வு காணலாம்.

9-2. தெரிந்த ஒரு தீர்வு கொண்டு முழுத்தீர்வு காணல் :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=f(x) \qquad \ldots\ldots(A)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(P, Q மாறிலிகள் மட்டுமல்ல, எது வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம்.)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0 \qquad \ldots\ldots(B)$$

என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $y=y_1$ என நம்மால் பெறமுடியுமெனக் கொள்வோம்.

அதாவது, $$\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+Qy_1=0 \qquad \ldots\ldots(C)$$

என்ற தொடர்பு சரியாக உள்ளது எனக் கொள்வோம். இப்போது (A)இன் ஒரு தீர்வு

$$y=y_1v$$

எனக் கொண்டு மேலே பார்ப்போம். இங்கு v ஒரு xஇன் சார்பு.

எனவே

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v\,\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\,\frac{dv}{dx}\,\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{d^2v}{dx^2}$$

இம்மதிப்புகளை (A)இல் ஈடு செய்ய

$$v\,\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\,\frac{dy_1}{dx} + y_1\,\frac{d^2v}{dx^2} + Pv\,\frac{dy_1}{dx} + Py_1\frac{dv}{dx} + Qy_1v = f(x) \qquad \ldots\ldots(D)$$

எனக் கிடைக்கும். இதை

$$v\left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + P\frac{dy_1}{dx} + Qy_1\right) + y_1\frac{d^2v}{dx^2} + 2\,\frac{dy_1}{dx}\frac{dv}{dx} + Py_1\frac{dv}{dx} = f(x)$$

என எழுதலாம். (C)இன்படி இதை இந்த (D)ஐ

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(P + \frac{2}{y_1}\,\frac{dy_1}{dx}\right)\frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{y_1} \qquad \ldots\ldots(E)$$

என எழுதலாம்.

$\dfrac{dv}{dx} = p$ என ஈடு செய்தால் (E)ஐ

$$\frac{dp}{dx} + \left(P + \frac{2}{y_1}\,\frac{dy_1}{dx}\right)p = \frac{f(x)}{y_1} \qquad \ldots\ldots(F)$$

என எழுதலாம். எனவே இதன் தீர்வினை,

$$pe^{\int Pdx}y_1^2 = \int\frac{f(x)}{y_1}\,e^{\int Pdx}y_1^2dx + A$$

$$= \int f(x)\,e^{\int Pdx}y_1dx + A$$

என எழுதலாம்

எனவே

$$p = \frac{A}{y_1^2}\,e^{-\int Pdx} + \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}\int f(x)\,e^{\int Pdx}y_1dx \qquad \ldots\ldots(G)$$

அதாவது

$\dfrac{dv}{dx} = (G)$ [(G)இன் வலப்பக்கத்தை (G) எனவே குறித்துள்ளோம்.]

ஆகவே $\qquad v = \int(G)\,dx + B \qquad \ldots\ldots(H)$

எனவே (A)இன் தீர்வு

$$\begin{aligned} y &= y_1 v \\ &= y_1\left[\int (G)\, dx + B\right] \end{aligned}$$

என எழுதலாம். இதில் y_1 முன்னர் நாம் அறிந்த துணைத்தீர்வு; v என்பது மேற்கூறிய முறையில் நாம் கண்ட (H).

குறிப்பு: நாம் இந்த முறையைப் பயன்படுத்துவதற்கு முன்பு,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வைத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். அதன் பிறகுதான் இம்முறையைக் கையாளவேண்டும். துணைத் தீர்வு காண, நடைமுறையில் பின்வரும் விதிகள் பயனுடையவையாக இருக்கும். (B)இல்

1. $P + Qx = 0$ எனில் $y = x$ ஒரு துணைத்தீர்வாகும்.
2. $1 + P + Q = 0$ எனில் $y = e^x$ ஒரு துணைத்தீர்வாகும்.
3. $1 - P + Q = 0$ எனில் $y = e^{-x}$ ஒரு துணைத்தீர்வாகும்.
4. $a^2 + Pa + Q = 0$ எனில் $y = e^{ax}$ ஒரு துணைத்தீர்வாகும்.

இவற்றினை நாம் எளிதாகச் சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

(1) $y = x$ எனில் $\frac{dy}{dx} = 1,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$ எனவே $P + Qx = 0$

(2) $y = e^x$ எனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = e^x$

ஆகவே $e^x\,(P + Q + 1) = 0$

அதாவது $1 + P + Q = 0.$

இவ்வாறே (3), (4) இரண்டையும் சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = 2x - 1$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்க.

முதலில்

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

என்பதற்கு ஒரு தீர்வு காண்போம்.

$$P = -3x, \quad Q = 3$$

$$\therefore \; P + Qx = 0$$

எனவே $y = x$ என்பது ஒரு துணைத்தீர்வு.

இப்போது $y = vx$ எனக் கொள்ள

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dv}{dx} + x\frac{d^2v}{dx^2} \text{ எனவரும்.}$$

எனவே இம்மதிப்புக்களைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்தால்

$$x^2\left(x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\right) - 3x\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) + 3vx = 2x - 1$$

எனக்கிட்டும். அதாவது

$$x^3\frac{d^2v}{dx^2} + 2x^2\frac{dv}{dx} - 3xv - 3x^2\frac{dv}{dx} + 3vx = 2x - 1.$$

இதைச் சுருக்கி இரு பக்கங்களையும் x^3ஆல் வகுக்க

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{dv}{dx} = p \text{ எனக் கொண்டால்}$$

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

இதன் தீர்வு

$$p = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} + Ax$$

அதாவது

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} + Ax$$

$$\therefore \quad v = -\log_e x - \frac{1}{3x} + \frac{Ax^2}{2} + B$$

எனவே முழுத்தீர்வு

$$y = vx = \frac{Ax^3}{2} + Bx - \tfrac{1}{3} - x\log x$$

$$= A_1x^3 + Bx - \tfrac{1}{3} - x\log x.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$(x-2)\frac{d^2y}{dx^2}+(7-4x)\frac{dy}{dx}+(4x-6)y=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இங்கு, குறிப்பில் குறிப்பிட்ட முதல் மூன்றும் பொருந்தாது என்பதைக் காண்க. நான்காவது விதிப்படி சோதிப்போம்.

$$a^2+Pa+Q=a^2+\frac{a(7-4x)}{x-2}+\frac{4x-6}{x-2}=0$$

எனக்கொண்டால்

$$a^2(x-2)+a(7-4x)+4x-6=0$$

$$\therefore\quad a=\frac{(4x-7)\pm\sqrt{(4x-7)^2-4(x-2)(4x-6)}}{2(x-2)}$$

$$=\frac{(4x-7)\pm 1}{2(x-2)}$$

$= 2$ அல்லது x தோன்றும் மற்றொரு தீர்வு.

எனவே $y_1 = e^{2x}$ என்பது ஒரு துணைத்தீர்வாகும் (சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்).

$y=ve^{2x}$ எனக்கொண்டு சமன்பாட்டைப் பார்ப்போம்.

$$\frac{dy}{dx} = 2ve^{2x}+\frac{dv}{dx}e^{2x}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = e^{2x}\left\{\frac{d^2v}{dx^2}+4\frac{dv}{dx}+4v\right\}$$

இவற்றினைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்தால்

$$e^{2x}\left[(x-2)\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}\right]=0$$

என்று வரும் $e^{2x}\neq 0$ எனவே

$$\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{1}{x-2}\frac{dv}{dx}=0$$

$\dfrac{dv}{dx} = p$ எனக்கொண்டால்

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x-2}$$

இதன் தீர்வு

$$p = C(x-2)$$

$$\therefore\quad \frac{dv}{dx} = C(x-2)$$

$$\therefore \quad v = \frac{C\,(x-2)^2}{2} + C_1$$
$$= A(x-2)^2 + B$$

எனக் கொள்ளலாம். எனவே முழுத்தீர்வு

$$y = e^{2x}\,\{A(x-2)^2 + B\}.$$

பயிற்சி 9·1

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\dfrac{dy}{dx} - y = e^x$

2. $x^2(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x(x^2+4x+2)\dfrac{dy}{dx} + (x^2+4x+2)y = -(x^4+2x^3)$

3. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (2x-1)\dfrac{dy}{dx} + (x-1)y = e^x$

4. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x^2+2x)\dfrac{dy}{dx} + (x+2)y = x^3e^x$

5. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2(4x-1)\dfrac{dy}{dx} - (9x-2)y = x^3e^x$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = x$

விடைகள்

பயிற்சி 9·1

1. $y = e^x \log x + Ae^x \displaystyle\int \frac{dx}{xe^x} + Be^x$

2. $y = Ax^2e^x + Bx + x^2$

3. $y = e^x(x + A\log x + B)$

4. $y = Ax + (B-1)xe^x + x^2e^x$

5. $y = e^x\left[A + \dfrac{x^3}{30} + B\displaystyle\int \frac{x^2}{e^{10x}}\,dx\right]$

6. $y = Ax + Bx\displaystyle\int \frac{e^{\frac{x^3}{3}}}{x^2}\,dx + 1$

9-2·1. மற்ருெரு முறைப்படி தீர்வு காணல்:

(அதே அமைப்பு ; வலக்கைப்புறம் பூச்சியம்.)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0 \qquad \text{......(K)}$$

என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $y = y_1$ எனக்கொள்வோம். அப்போது

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+Qy_1=0 \qquad \text{......(L)}$$

என்பது உண்மையாகும். (K), (L) இரண்டிலிருந்தும் Qஐ நீக்க

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+y\left\{\frac{\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}}{-y_1}\right\}=0 \qquad \text{......(M)}$$

என எழுதலாம். அதாவது

$$\frac{d}{dx}\left[y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}\right]=-P\left(y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}\right)$$

என்று வரும். இதன் தொகை கண்டால்

$$\log\left\{y_1\frac{dy_1}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}\right\}=-\int Pdx+C$$

அல்லது

$$y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}=Ae^{-\int Pdx} \qquad \text{......(N)}$$

என்ருகும். இங்கு y என்பது (K)இன் மிகப் பொதுவான தீர்வா யிருந்தால் A பூச்சியமாகாது. இப்போது (N)ஐ

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{y_1}\frac{dy_1}{dx}=\frac{A}{y_1}e^{-\int Pdx} \qquad \text{......(R)}$$

என எழுதினுல்

$$ye^{-\int\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}dx}=\int e^{-\int\frac{1}{y_1}\frac{dy_1'}{dx}dx}\frac{A}{y_1}e^{-\int Pdx}\,dx$$

என்று y இன் பொதுத் தீர்வு பெறப்படும்.

$$\therefore\quad ye^{-\log y_1}=\int e^{-\log y_1}\frac{A}{y_1}e^{-\int Pdx}\,dx+B$$

$$\therefore\quad y=By_1+Ay_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}\,dx \text{ எனவரும்.}$$

இப்போது

$$y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{{y_1}^2}\, dx = y_2$$

எனக் கொண்டால்

$$y = Ay_2 + By_1$$

என்ற அமைப்பில் மிகப்பொதுவான தீர்வு பெறப்படும்; அப்போது y_2 என்பதும் (K) என்ற சமன்பாட்டின் மற்ருெரு தீர்வாகும் என்பது விளக்கமாகும்.

எனவே

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + P\frac{dy_1}{dx} + Qy_1 = 0$$

$$\frac{d^2y^2}{dx^2} + P\frac{dy_2}{dx} + Qy_2 = 0$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் Q ஐ நீக்கி இதுவரை செய்த ஆய்வுகளின்படி பார்த்தால்

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} = Ce^{-\int P dx} \qquad \text{......(S)}$$

என்ற தொடர்பு பெறலாம். இங்கு C என்பது ஏதாமொரு மாறிலியல்லாமல் y_1, y_2 என்ற இரு சார்புகளைச் சார்ந்த ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலியாய் இருக்கும். எனவே

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு $y = y_1$, $y = y_2$ என்ற இரு தீர்வுகள் காணமுடியுமாயின் அவ்விரு தீர்வுகளிடையே (S) என்ற ஒரு தொடர்பிருக்கும்; அங்கு C என்பது ஏதாமொரு மாறிலியல்ல. ஆனல் y_1, y_2 ஐச் சார்ந்த ஒரு மாறிலியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $y = e^x$ என்பது ஒரு தீர்வானல், $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (2x+1)\dfrac{dy}{dx} + (x+1)y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வை 9-2·1.இல் காட்டிய முறைப்படி காண்க.

(S)இல் கூறியபடி, $y_1 = e^x$ எனக் கொள்வோம். அப்போது,

$$e^x\frac{dy_2}{dx} - y_2 \cdot e^x = Ce^{+\int \frac{2x+1}{x} dx}$$

எனவரும்; C என்பது y_1, y_2 இரண்டையும் சார்ந்தது.

அதாவது

$$e^x \frac{dy_2}{dx} - y_2e^x = Ce^{2x} \cdot x$$

அதாவது $\frac{dy^2}{dx} - y_2 = Cxe^x$ எனவரும்.

இதன் தீர்வு

$$y_2e^{-x} = \int Cxe^x \cdot e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{Cx^2}{2} \text{ எனவரும்.}$$

$\therefore \quad y_2 = A_1x^2e^x$ என எழுதலாம்.

$\therefore$ சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$= Ae^x + Bx^2e^x \text{ (இரு மாறிலிகள் உள்ளன).}$$

குறிப்பு : $y = e^x$; $y = x^2e^x$ என்பவை இரண்டும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : $\frac{d^2y}{dx^2} - (x+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வை 9-2·1-இல் காட்டிய முறைப்படி பெறுக.

இங்கும் e^x என்பது ஒரு தீர்வாகும். இதை y_1 என வைத்துக் கொண்டால்

$$e^x \frac{dy_2}{dx} - y_2e^x = Ce^{+\int(x+1)dx}$$

$$= Ce^{\frac{(x+1)^2}{2}} \text{ என வரும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{dy_2}{dy} - y_2 = Ce^{\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} - x}$$

$$= Ce^{\frac{x^2+1}{2}}$$

இங்கு தீர்வு

$$y_2e^{-x} = \int Ce^{\frac{x^2+1}{2} - x}\, dx$$

$$= C\int e^{\frac{(x-1)^2}{2}}\,dx$$

$$\therefore\quad y_2 = Ce^x\int e^{\frac{(x-1)^2}{2}}\,dx$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$$y = Ae^x + Be^x\int e^{\frac{(x-1)^2}{2}}\,dx \text{ என வரும்.}$$

குறிப்பு: $y=e^x$ என்பதும் $y=e^x\int e^{\frac{(x-1)^2}{2}}dx$ என்பதும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகளாகும்.

பயிற்சி 9·2

9-2·1-இல் விளக்கப்பட்ட முறையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$ [$y=x$ என்பது ஒரு தீர்வு]

2. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x^2+2x)\dfrac{dy}{dx} + (x+2)\,y = 0$ [$y=x$ தீர்வு]

3. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$ $\left[y=x+\dfrac{1}{x}\text{ ஒரு தீர்வு}\right]$

விடைகள்

பயிற்சி 9·2

1. $y = Ax + Bx\displaystyle\int \frac{e^{\frac{x^3}{3}}}{x}\,dx$

2. $y = Ax + Bxe^x$

3. $y = \dfrac{A}{x} + B\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

$\left(\text{இதை } Bx + \dfrac{A_1}{x} \text{ எனவும் எழுதலாம்.}\right)$

9-2·2. இப்போது,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=f(x) \qquad \text{......(A) 9-1.}$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் தீர்வு காண,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+P\dfrac{dy}{dx}+Qy=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 9-2·1-இல் விளக்கப்பட்ட முறையை விரிவு படுத்துவோம்.

இதன் தீர்வு By_1+Ay_2 எனக் கொள்வோம். இங்கு B, A இரண்டும் மாறிலிகள்; y_1, y_2 இரு தீர்வுகள்.

(A) என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வை By_1+Ay_2 என்ற அமைப்பிலேயே கொண்டு, ஆனால் A, B இரண்டும் (A) என்ற சமன்பாட்டுக்குரியனவாய் உள்ள xஇன் சார்புகளாய் அமைவதாகக் கொள்வோம்; 2-3·3-இல் குறிப்பிடப்பட்ட சாராமாறி (Variation of Parameters), முறையைக் கையாண்டு, A, B என்ற சார்புகளைக் காண்போம்.

இப்பொழுது A, B என்ற இரு தேராச்சார்புகளையும் தமக்கிடையே ஏதாமொரு தொடர்புடையனவாய்த் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். எனவே,

$$y = Ay_2+By_1 \text{ ஐக் கொண்டு}$$

$$\frac{dy}{dx}=B\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{dB}{dx}+A\frac{dy_2}{dx}+y_2\frac{dA}{dx} \qquad \text{......(T)}$$

என்பதைப் பெறலாம். ஈண்டு

$$y_1\frac{dB}{dx}+y_2\frac{dA}{dx}=0 \qquad \text{......(U)}$$

என்ற வகையில் A, B இரண்டும் தொடர்புடையனவாய்க் கொள்வோம்.

அப்படி A, B என்று இரு சார்புகளையும் தேர்ந்தெடுப்போமாகில்

$$\frac{dy}{dx}=B\frac{dy_1}{dx}+A\frac{dy_2}{dx} \qquad \text{......(1)}$$

என்று பெறப்படும். மேலும்

$$\frac{d^2y}{dx^2}=B\frac{d^2y_1}{dx^2}+A\frac{d^2y_2}{dx^2}+\frac{dB}{dx}\,\frac{dy_1}{dx}+\frac{dA}{dx}\,\frac{dy_2}{dx} \qquad \text{......(2)}$$

என்றும் கிடைக்கும்.

இப்படி (1), (2) எனப் பெறப்பட்ட, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ இன் மதிப்புகளை

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$$

என்ற சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்தால்

$$\frac{dB}{dx}\frac{dy_1}{dx}+\frac{dA}{dx}\frac{dy_2}{dx}=R \qquad \text{......}(V)$$

என்றுமட்டுமே நிற்கும். [ஏனெனில் $y=y_1$, $y=y_2$ இரண்டும் $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும்.] எனவே (U)ஐ நாம் ஏற்றுக்கொள்வதால்

$$\frac{\frac{dA}{dx}}{y_1}=\frac{\frac{dB}{dx}}{-y_2}$$

$$=\frac{\frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}\frac{dy_1}{dx}}{y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}}$$

$$=\frac{R}{C}e^{\int Pdx} \qquad \text{9-2·1இல் [(S). இன்படி]}$$

எனவே

$$\frac{dA}{dx}=y_1\frac{R}{C}e^{\int Pdx}$$

$$\therefore\ A=E+\frac{1}{C}\int Ry_1e^{\int Pdx}\,dx$$

அவ்வாறே

$$B=F-\frac{1}{C}\int Ry_2e^{\int Pdx}dx$$

எனவே கிடைத்த A, Bஇன் மதிப்புகளைக் கொண்டு

$y=Ay_2+By_1$ஐப் பெறலாம்.

[E, F என்பவை மாறிலிகள்]

எடுத்துக்காட்டு :

$$(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=(x-1)$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு $y_1=x$, $y_2=e^x$ என்பவை இரு தீர்வுகளாகும்.

எனவே

$$y = Ae^x + Bx$$

என முழுத் தீர்வினைக் கொள்ளலாம். மேலும் 9-2·2. இன்படி

$$\frac{dA}{dx}e^x + \frac{dB}{dx}x = 0 \qquad [9\text{-}2\cdot2.\ \ U]$$

என்ற கட்டுப்பாடு ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

ஆகவே

$$\frac{dA}{dx}e^x + \frac{dB}{dx} = (x-1) \qquad [9\text{-}2\cdot2.\ \ V]$$

அதாவது

$$\frac{\frac{dA}{dx}}{x} = \frac{\frac{dB}{dx}}{-e^x} = \frac{e^x\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}}{xe^x - e^x}$$

$$= \frac{x-1}{e^x(x-1)}$$

$$= e^{-x}$$

எனவே

$$\frac{dA}{dx} = xe^{-x}; \quad \frac{dB}{dx} = -1$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ A &= E + \int xe^{-x}dx \\
&= E - xe^{-x} - e^{-x} \\
B &= F + \int(-1)dx \\
&= F - x \\
\therefore\ y &= e^x\left[E - xe^{-x} - e^{-x}\right] + x(F - x) \\
&= Ee^x - x - 1 + xF - x^2 \\
&= Ee^x + xF - (x^2 + x + 1)
\end{aligned}$$

என்பது முழுத் தீர்வு.

9-3. சாரா மாறிமுறை : (Variation of parameters)

இம்முறைப்படி ஒரு சமன்பாட்டில் ஒரு உறுப்பை விட்டு விட்டு எஞ்சியுள்ள சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வுகண்டு, அதைத் துணைத்தீர்வாகக் கொண்டு, அத்துணைத்தீர்வில் தோன்றும் மாறிலிகளை, சார்புகளாகக் கொண்டு, வேண்டிய ஈடுமுறைகள் செய்து முதல் கொடுத்த சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணலாம். அம்முறை பின்னர் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றது.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 f(y)+F(y)=0 \qquad \text{......(A)}$$

என்ற சமன்பாட்டில், $F(y)$ஐ விடுத்து

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 f(y)=0$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காண்போம். அப்போது

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}= -f(y)\frac{dy}{dx} \qquad \text{......(B)}$$

எனக்கிட்டும். அதாவது

$$\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\int f(y)dy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\, e^{\int f(y)dy} = A \qquad \text{......(C)}$$

Aஐ இங்கு ஒரு மாறிலியாகக் கொள்ளாமல் ஒரு சார்பாகக் கொண்டு x ஒட்டிய வகைக்கெழு கண்டால்

$$\frac{d^2y}{dx^2}e^{\int f(y)dy}+\left(\frac{dy}{dx}\right)e^{\int f(y)dy}f(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dA}{dx}$$

அல்லது

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 f(y)\right]e^{\int f(y)dy}=\frac{dA}{dx} \qquad \text{......(D)}$$

இப்போது இதை (A)யுடன் ஒப்பிட்டுப்பார்த்தால்

$$-F(y)\, e^{\int f(y)dy}=\frac{dA}{dx} \qquad \text{......(E)}$$

என்ற தொடர்பு பெறப்படும்.

$\therefore$ (C)ஐயும் (E)ஐயும் ஒப்பிட்டுப்பார்த்தால்

$$A\frac{dA}{dx}=-F(y)\, e^{2\int f(y)dy}\frac{dy}{dx}$$

என்று கிட்டும். எனவே தொகை காணின்

$$A^2 = E-2\int F(y)\, e^{2\int f(y)dy}dy$$

என்று கிடைக்கும்.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் முதல் தொகை [(C)இலிருந்து]

$$\frac{dy}{dx}\, e^{\int f(y)dy} = \left\{E-2\int F(y)e^{2\int f(y)dy}\,dy\right\}^{\frac{1}{2}}$$

என்றடைவோம். இதற்கு மறுபடியும் தொகை கண்டால் y என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு: மேற்கூறிய முறைப்படி

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{y}=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

முதலில் கடைசி உறுப்பு $\frac{1}{y}$ஐ விடுத்து

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வினைக் காண்போம்.

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{1}{y}\quad\frac{dy}{dx}$$

என இருக்கும். இரு புறமும் தொகை காணின்

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C}{y}$$

எனக்கிட்டும்.

அதாவது

$$y\frac{dy}{dx}=C$$

ஈண்டு Cஐ ஒரு சார்பாகக் கொண்டு x ஒட்டிய வகைக்கெழு காணின்

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{dC}{dx}$$

அதாவது

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{y}\,\frac{dC}{dx}$$

எனவரும்.

இதைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{y}\quad\frac{dC}{dx}$$

$$\therefore\ \frac{dC}{dx}=-1$$

எனவே $$C = A-x$$

$$\therefore\ y\frac{dy}{dx} = A-x$$

அதாவது $y^2 = -(x-A)^2 + B^2$

அல்லது $$y^2 + (x-A)^2 = B^2$$

என்ற அமைப்பில் முழுத்தீர்வினைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+a^2y = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

கடைசியுறுப்பை நீக்க

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x}{x^2-1}\frac{dy}{dx}=0$$

எனக் கிட்டும். $\frac{dy}{dx}=p$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{dp}{dx}+\frac{x}{x^2-1}p=0$$

அதாவது

$$p\sqrt{x^2-1} = B$$

என்று கிட்டும். இங்கு Bஐ ஒரு சார்பாகக் கொண்டால்

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{x^2-1} = B(x)$$

இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக்கெழு காணின்

$$\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{x^2-1}+\frac{dy}{dx}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{dB}{dx}$$

எனவே

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}x=\sqrt{x^2-1}\frac{dB}{dx}$$

இச்சமன்பாட்டை முதல் சமன்பாட்டோடு ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்

$$a^2y = -\sqrt{x^2-1}\frac{dB}{dx}$$

எனக் கிட்டும். இதோடு

$$B(x) = \sqrt{x^2-1}\frac{dy}{dx}$$

ஏற்ற சமன்பாட்டை இணைத்து, ஒன்றை ஒன்றால் வகுத்துச் சரிவர எழுதினால்

$$a^2y\frac{dy}{dx}+B(x)\frac{dB}{dx} = 0$$

எனக்கிட்டும். இதன் தொகை காணும்பொழுது

$$a^2y^2+[B(x)]^2 = K^2$$

என்றாகும். அதாவது

$$B(x) = \sqrt{K^4-a^4y^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\sqrt{x^2-1} = \sqrt{K^2-a^2y^2}$$

இதன் தொகை காணின்

$$\log(x+\sqrt{x^2-1}) = C+\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{ay}{k}\right) \qquad \ldots\ldots(\mathrm{I})$$

அதாவது

$$x+\sqrt{x^2-1} = Ae^{\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{ay}{k}\right)}$$

மேலும் $x-\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{A}e^{-\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{ay}{k}\right)}$

$$\therefore x = \frac{1}{2}\left[Ae^{\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{ay}{k}\right)}+\frac{1}{A}e^{-\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{ay}{k}\right)}\right]$$

என்ற முழுத்தீர்வு கிட்டும். (இதில் A, K என்பவை ஏதாமொரு மாறிலிகள்).

குறிப்பு :

(I)இலிருந்து

$$\sin^{-1}\left(\frac{ay}{k}\right) = [\log C'+\log(x+\sqrt{x^2}-1)]a$$

என்பது கிடைக்கும். அதாவது

$$\frac{ay}{k} = \sin[a\log(C'x+C'\sqrt{x^2}-1)]$$

$$y = \frac{k}{a}\sin[a\log(C'x+C'\sqrt{x^2}-1)]$$

என்றும் தீர்வை எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}f(x) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\phi(x) = 0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

என்பதைச் சாராமாறி (Variation of parameters) முறையில் தீர்க்க.

முதலில் $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\phi(x)$

என்பதை விடுத்து

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}f(x) = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வினைக் காண்போம்.

அதாவது $\int \frac{d^2y/dx^2}{dy/dx}dx + \int f(x)dx = A$

அதாவது

$$\frac{dy}{dx} = e^{A-F(x)} \qquad \{F(x) = \int f(x)dx\}$$

$$= Be^{-F(x)}$$

என்று கிடைக்கும். Bஐ ஒரு சார்பாகக் கொண்டு இருபுறமும் x ஒட்டிய வகைக்கெழு காண

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dB}{dx}e^{-F(x)} + Be^{-F(x)}\frac{d}{dx}\Big[-F(x)\Big]$$

$$= \frac{dB}{dx}e^{-\int f(x)dx} + Be^{-\int f(x)dx}[-f(x)]$$

அதாவது

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)Be^{-\int f(x)dx} - \frac{dB}{dx}e^{-\int f(x)dx} = 0$$

மேலும் $\frac{dy}{dx} = Be^{-\int f(x)dx}$ என்பதால்

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} - \frac{dB}{dx}e^{-\int f(x)dx} = 0 \qquad \ldots(2)$$

(1), (2) இரண்டையும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\phi(x) = -\frac{dB}{dx}e^{-\int f(x)dx}$$

என்று கிட்டும். $\frac{dy}{dx} = Be^{-\int f(x)dx}$ ஆனதால்.

$$\therefore \quad \phi(x)B^2e^{-2\int f(x)dx} = -\frac{dB}{dx}\, e^{-\int f(x)dx}$$

$$\therefore \quad B^2e^{-2\int f(x)dx}\,\phi(x) + \frac{dB}{dx}\, e^{-\int f(x)dx} = 0$$

$$\therefore \quad B^2\phi(x) + \frac{dB}{dx}\, e^{\int f(x)dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\phi(x)}{e^{\int f(x)dx}}\, dx + \frac{dB}{B^2} = 0$$

அதாவது, $+\frac{1}{B} = \int \phi(x) e^{-\int f(x)dx}\, dx + C$

எனவே Bஇன் மதிப்பறிந்து

$$\frac{dy}{dx} = Be^{-\int f(x)dx}$$

என்ற சமன்பாட்டில் ஈடு செய்து பார்க்கும் பொழுது

$$\int dy = \int \Psi(x)\, dx + E$$

என்ருகும். எனவே

$$y = \Psi(x) + E$$

என்ற தீர்வு கிடைக்கும். $\Psi(x)$இல் C என்ற மாறிலி இடம் பெற்றிருக்கும்.

குறிப்பு: இச்சமன்பாட்டை முன்பு 8-5·6. இல் கண்ட

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

என்ற அமைப்பில் கொண்டும் தீர்வு காணலாம்.

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

என்று கொண்டு

$$F\left(p, \frac{dp}{dx}, x\right) = 0$$

என்ற அமைப்பில் மாற்றியமைத்தால்

$$\frac{dp}{dx} + pf(x) + p^2\phi(x) = 0$$

என்று கிட்டும். இதிலிருந்து

$$p = A(x)$$

எனப்பெற்று yஐக் காணலாம். $A(x)$இல் ஒரு மாறிலி கிடைக்கும். அடுத்த தொகை கண்டு yஇன் மதிப்பைக் காண இயலும்.

பயிற்சி (i)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(y)\frac{dy}{dx}+\phi(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

என்ற சமன்பாட்டில் சார்பில் மாறியையும், சார்புடைய மாறியையும் ஒன்றையொன்று மாற்றி சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

பயிற்சி (ii)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பின்வரும் முறைகளில் தீர்வு காண்க.

1. கடைசியுறுப்பை விலக்கித் தீர்வு கண்டு, பின்னர் மாறிலியைச் சார்பெனக் கொண்டு தீர்வு காண்க.

2. நடு உறுப்பை விலக்கி அதேமுறையில் தீர்வு காண்க.

3. ஒவ்வோர் உறுப்பையும், $\dfrac{dy}{dx}$ஆல் வகுத்து உறுப்பு உறுப்பாகத் தொகை கண்டு தீர்வு காண்க.

இங்கு கூறியபடி

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\dfrac{dy}{dx}}+f(x)+F(y)\frac{dy}{dx}=0$$

என்று கிட்டும். இதன் தொகை

$$\log\left(\frac{dy}{dx}\right)+\int f(x)dx+\int F(y)dy=C$$

என வரும். எனவே மேற்கூறப்பட்ட பயிற்சிகளின்படி,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

என்ற சமன்பாட்டமைப்பில்

(i) P, Q இரண்டும் xஇன் சார்பாக

(ii) P, Q இரண்டும் yஇன் சார்பாக

(iii) $P-x$இன் சார்பாகவும், $Q-y$இன் சார்பாகவும் இருப்பின் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு காணலாம்.

9-3. செயலிக் காரணிகள் (factorising the operator) கண்டு தீர்வு காணல்

$$P_0\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2y=X$$

என்ற சமன்பாட்டை

$$f(D)y = X$$

என வைப்போம்.

$f(D)$ என்ற கோவையை $F_1(D) . F_2(D)$ என்ற இரண்டு காரணி களாகப் பிரித்து, முதலில் $F_2(D)$ஐச் செயல்படுத்திப் பின்னர் $F_1(D)$ஐச் செயல்படுத்துவோமானால் $f(D)$ஐச் செயல்படுத்துவதற்குச் சமம். எனவே $f(D)y = F_1(D)\,[F_2(D)y]$ என நாம் ஏற்கலாம். [இங்கு செயல் படும் வரிசை மாறக் கூடாது.]

$$\text{இங்கு } f(D)y = (P_0D^2+P_1D+P_2)y$$
$$= [(qD+r)(sD+t)]y$$

என்று எழுதலாம் எனக் கொள்க. அப்போது

$$(sD+t)y = z$$

எனக் கொண்டால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$(qD+r)\,z = X$$

என்றாகும். இதன் தீர்வு

$$z = \phi(x)$$

எனப் பெறப்படலாம். அப்போது

$$(sD+t)y = \phi(x)$$

என்ற சமன்பாடு பெறப்படும். அதாவது

$$s\frac{dy}{dx}+ty = \phi(x)$$

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்வு காணக்கூடிய வகையில் மாற்றியமைத்து

$$y = F(x)$$

என்ற வகையில் தொகை காண இயலுமானால் முதற் கூறிய சமன் பாட்டின் தீர்வு பெறப்பட்டதெனஏற்கலாம்.

குறிப்பு 1 : மேற்கூறிய தெரிப்பில் $F_1(D).F_2(D)$ என்பது $F_2(D).F_1(D)$க்கு சமம் அல்ல என்பதைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு மூலம் எடுத்துக் கூறலாம்.

$$(xD-1)(D+3)y \neq (D+3)(xD-1)y$$

$$\text{வலப் புறம்} = (D+3)\left\{x\frac{dy}{dx}-y\right\}$$

$$= x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}+3x\frac{dy}{dx}-3y$$

$$= x\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}-3y$$

$$\text{இடப் புறம்} = (xD-1)\left\{\frac{dy}{dx}+3y\right\}$$

$$= x\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}-3y$$

குறிப்பு 2 : இந்த மாற்றத்திற்குக் காரணம் செயலியுடன் மாறு ராசிகளும் சேர்ந்து வருவதுதான் என்பதை அறிவது நலம்.

குறிப்பு 3 : இம் முறையைப் பயன்படுத்த கொடுக்கப்பட்ட

$$P_0\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2y$$

என்ற கோவை $(qD+r)\ (sD+t)$ என எப்பொழுதும் பிரித்தல் இயலுமா என்ற கேள்விக்கு ஈண்டு விடை காண்போம்.

$$(P_0D^2+P_1D+P_2)y = (qD+r)\left\{s\frac{dy}{dx}+ty\right\}$$

$$= qs\frac{d^2y}{dx^2}+q\frac{ds}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$+qt\frac{dy}{dx}+q\frac{dt}{dx}\cdot y$$

$$+rs\frac{dy}{dx}+rty$$

என்பது பொருந்த வேண்டும். அதாவது

1. $qs = P_0$
2. $rs+q\left(t+\dfrac{ds}{dx}\right) = P_1$
3. $rt+q\dfrac{dt}{dx} = P_2$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து q, r, s, t என்ற நான்கு தேராக் கணியங்கள் காணப்படவேண்டும். ஆனால் P_0ஐக் காரணிகளாக்கித் தகுந்த முறையில் முன்னுக்குப்பின் முரணின்றி q, s என்பவற்றைக் கண்ட பின்பு r, tஐக் காணலாம்.

ஆனால் இம்முறை எங்கும் பயன்படும் என்று கூறுதற்கில்லை. பின்வரும் எடுத்துக்காட்டினால் இம்முறை மேலும் விளக்கமுறும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$ax\frac{d^2y}{dx^2}+(3a+bx)\frac{dy}{dx}+3by = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$[axD^2+(3a+bx)D+3b]\,y$$
$$=(xD+3)\,(aD+b)\,y \quad \text{......(1)}$$

என்பது பொருந்துவது காணலாம்.

[மேலும் $(aD+b)\,(xD+3)y=[axD^2+(4a+bx)D+3b]\,y$ ......(2) என்பதால் (1) மட்டுந்தான் பொருத்தமான அமைப்பு]

முதலில்

$$(aD+b)\,y = z$$

எனக் கொள்வோம். அப்போது

$$(xD+3)\,z = 0$$

என்றாகும். அதாவது

$$x\frac{dz}{dx}+3z = 0$$

எனவே

$$z=\frac{A}{x^3}$$

$$\therefore \quad (aD+b)\,y = \frac{A}{x^3}$$

அதாவது

$$a\frac{dy}{dx}+by=\frac{A}{x^3}$$

எனவே தீர்வு

$$ye^{\frac{b}{a}x} = \int e^{\frac{b}{a}x}\,\frac{A}{ax^3}\,dx+B$$ எனப் பெறப்படும்.

பயிற்சி 9·3

காரணிகள் பிரித்துப் பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $(xD-3)\,[(2x+3)D+4]\,y=0$
2. $(x-1)\,(x-2)\,\dfrac{d^2y}{dx^2}-(2x-3)\,\dfrac{dy}{dx}+2y=0$
3. $x\,\dfrac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\,\dfrac{dy}{dx}-y=e^x$
4. $3x^2\,\dfrac{d^2y}{dx^2}+(2+6x-6x^2)\,\dfrac{dy}{dx}-4y=0$

விடைகள்

பயிற்சி 9·3

1. $y(2x+3)^2 = A\left(\frac{2x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}\right)+B$

2. $y=A+\frac{(x-1)^2}{2}\left[\frac{1}{x-1}+B+\log\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\right]-\frac{1}{2}\log(x-2)$

3. $y=Ae^x+Be^x\int\frac{e^{-x}}{x}dx+e^x\log x$

4. $y=Ae^{\frac{2}{3x}}+Be^{\frac{2}{3x}}\int\frac{e^{2x-\frac{2}{3x}}}{x^2}dx.$

9-4. சார்புடை மாறியை மாற்றி, புதியதொரு சமன்பாடு கண்டு தீர்வு காணல்.

சில சமன்பாடுகளில், சார்புடை மாறியை வசதிக்குத் தேவையான படி மாற்றிப் பின்னர் அந்த மாறுதல் காரணமாகப் பெறப்படும் சமன்பாடு, தீர்வு காண முடியுமாயிருக்கலாம். இந்த முறையைப் பார்ப்போம்.

முறை :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=f(x)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$y = y_1v$$

என ஈடு செய்தால்

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}v+y_1\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y_1}{dx^2}v+2\frac{dy_1}{dx}\,\frac{dv}{dx}+y_1\frac{d^2v}{dx^2}$$

எனக் கிடைக்கும்.

இதைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(P+\frac{2}{y_1}\,\frac{dy_1}{dx}\right)\frac{dv}{dx}+\frac{1}{y_1}\left[\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+Qy_1\right]v=\frac{f(x)}{y_1}$$

எனக் கிடைக்கும். இங்கு v சார்புடை மாறியாகும். இதை

$$\frac{d^2v}{dx^2}+P_1\frac{dv}{dx}+Q_1v=\frac{f(x)}{y_1}$$

என்று எழுதினுல்

$$P_1 = P + \frac{2}{y_1}\frac{dy_1}{dx}$$

$$Q_1 = \frac{1}{y_1}\left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + P\frac{dy_1}{dx} + Qy_1\right)$$

என்று கொள்ளவேண்டும். y_1ஐத் தகுந்தபடி நாம் எடுப்போமெனில் Q_1, P_1 இரண்டையும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இப்போது நாம்

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + P\frac{dy_1}{dx} + Qy_1 = 0$$

என்று ஏற்போமானால் Q_1 பூச்சியமாகும்.

இது நாம் 9-2.இல் பயன்படுத்திய முறையாகும் என்பது காணலாம். அல்லாது P_1ஐ நாம் ஏதாமொரு மதிப்புடன் எடுத்துக் கொள்வோமானால்

$$\frac{2}{y_1}\frac{dy_1}{dx} = P_1 - P$$

$$\therefore\ y_1 = e^{\frac{1}{2}\int (P_1 - P)dx}$$

எனப் பெறலாம். குறிப்பாக P_1 பூச்சியத்திற்குச் சமம் என ஏற்றபின்

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}\int P dx}$$

என்ருகும்.

இப்படிப் பெறப்படும் y_1இன் மதிப்பை

$$\frac{1}{y_1}\left[\frac{d^2y_1}{dx^2} + P\frac{dy_1}{dx} + Qy_1\right] v \text{இல்}$$

ஈடு செய்ய

$$e^{\frac{1}{2}\int P dx}\left\{ e^{-\frac{1}{2}\int P dx}\left[Q - \tfrac{1}{2}\frac{dP}{dx} - \tfrac{1}{4}P^2\right]\right\}$$

என்று கிட்டும். அதாவது

$$\left(Q - \tfrac{1}{2}\frac{dP}{dx} - \frac{P^2}{4}\right)$$

எனக்கிட்டும். எனவே P_1ஐப் பூச்சியமாகக் கொண்டால் கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாடு

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left[Q - \tfrac{1}{2}\frac{dP}{dx} - \tfrac{1}{4}P^2\right] v = \frac{f(x)}{e^{-\frac{1}{2}\int P dx}}$$

என்ற அமைப்பில் கிடைக்கும். அதாவது

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Q_1 v = X_1 \qquad \text{......(A)}$$

இங்கு $Q_1 = Q - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} - \frac{1}{4}P^2$

$$X_1 = f(x)\, e^{\frac{1}{2}\int P dx}$$

என்ற மாற்றங்களிருக்கும். (A) என்ற சமன்பாடு தீர்வு காணக் கூடியதாய் அமையலாம். எனவே (A) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு கண்டு

$$y = ve^{-\frac{1}{2}\int P dx}$$

என முதலில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காணலாம்.

குறிப்பு 1: இம்முறையில் நாம் $\frac{d^2y}{dx^2}$க்கு அடுத்துள்ள $\frac{dy}{dx}$ தோன்றும் உறுப்பினை நீக்கி

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Q\,v = X_1$$

என்ற அமைப்பிற்குக் கொண்டுவந்தோம். இம்முறை ஒரு n வரிசைச் சமன்பாட்டுக்கும் பொருந்தும். அதாவது

$$\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots\dots + P_ny = X$$

என்ற சமன்பாட்டின் இரண்டாம் உறுப்பான $P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ என்பதை நீக்கவும் $y = y_1v$ என்று ஈடு செய்யும் முறை பயன்படும். இங்கு

$$y_1 = e^{-\frac{1}{n}\int P_1 dx}$$

என ஈடுசெய்ய வேண்டிவரும். இம்முடிவை ஈடுசெய்து காணலாம்.

குறிப்பு 2: இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டைப் பொருத்த மட்டில் முதல் வகைக்கெழு தோன்றும் உறுப்பை நீக்கிய பின்பு பெறப்படும் சமன்பாடு

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(Q - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} - \frac{1}{4}P^2\right)v = f(x)\, e^{\frac{1}{2}\int P dx}$$

என்ற மாற்றமைப்பில் வருகிறதென்பதை நாம் மனப்பாடம் செய்து கொள்வது நலம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\tan x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

என்ற சமன்பாட்டை இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கும் வகையில் மாற்றி யமைத்து அதன் தீர்வு காண்க.

இங்கு $P = -2\tan x$ எனவே

$$e^{-\frac{1}{2}\int P dx} = e^{\int \tan x dx}$$
$$= e^{\log \sec x}$$
$$= \sec x$$

எனவே $y = v\sec x$

எனக்கொண்டு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மாற்றி எழுதினால்

$$\frac{d^2v}{dx^2}+v\left(Q-\tfrac{1}{2}\frac{dP}{dx}-\tfrac{1}{4}P^2\right) = 0$$

அதாவது

$$\frac{d^2v}{dx^2}+v(5+\sec^2x-\tan^2x) = 0$$

அதாவது

$$\frac{d^2v}{dx^2}+6v = 0$$

எனவே

$$v = (A\cos\sqrt{6}x+B\sin\sqrt{6}x)$$

எனவே

$$y = (A\cos\sqrt{6}x+B\sin\sqrt{6}x)\sec x$$

என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சி 9·4

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க:

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{x^2+2}{x^2}\right)y = xe^x$

2. $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^4}+4x^5\dfrac{dy}{dx}+(x^8+6x^4+4)y = 0$

3. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x(x+1)\dfrac{dy}{dx}+(x^2+2x+2)y = 0$

4. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-3x\dfrac{dy}{dx}+3y = x^2(2x-1)$

விடைகள்

பயிற்சி 9·4

1. $y = Ax\cos x+Bx\sin x+\frac{1}{2}xe^x$

2. $y = Ae^{\frac{-x^4}{8}}\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\log x+B\right)$

3. $y = (Ax^2+Bx)e^x$

4. $y = Ax+Bx^3+x^3 \log x+x^2$

9-5. முன்னர் 9-4.இல் சார்புடை மாறியை மாற்றி, ஒரு வகைக்கெழுச்சமன்பாட்டின் தீர்வு காணும்முறை கண்டோம். அதற்குப் பதிலாக சார்பில் மாறியை மாற்றி அதன்படி கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மாற்றியமைத்தும் சில சமயங்களில் ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வு காணமுடியும்.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=f(x)$$

என்ற சமன்பாட்டில் $z=F(x)$ என ஈடுசெய்வோம். அப்போது

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\left(\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}\right)+Qy=f(x)$$

என மாறும். அதாவது

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\frac{dy}{dz}+Q_1y=X_1$$

எனக் கிட்டும். ஈண்டு

$$P_1=\frac{\dfrac{d^2z}{dx^2}+P\dfrac{dz}{dx}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$Q_1=\frac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$X_1=\frac{f(x)}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$$

P_1, Q_1, X_1 என்பவை xஇன் சார்புகளாயிருக்கும். ஆனால் $z=F(x)$ என்ற காரணத்தினால் இவற்றினை zஇன் சார்புகளாக மாற்றிக் கொள்ள

லாம். இங்கு $P_1=$ பூச்சியம் என்ற வகையில் நாம் $z=F(x)$ என்ற சார்பைப் பெறமுடியும். அதாவது

$$\frac{d^2z}{dx^4}+P\frac{dz}{dx}=0$$

எனக் கொள்வோமானல்

$$\frac{dz}{dx}=e^{-\int Pdx}$$

எனவும்

$$z=\int e^{-\int Pdx}dx$$

எனவும் பெறலாம். மேலும்

$$\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=a^2 \quad \text{(ஒரு மாறிலி)}$$

என எடுத்துக்கொண்டால்

$$az=\int\sqrt{Q}dx$$

எனப் பெறலாம். ஆகவே

1. $z=\int e^{-\int Pdx}dx$ என ஈடு செய்து கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$\frac{d^2y}{dz^2}+Q_1y=X_1$$

என்ற அமைப்பில் பெற்று, yஐ முதலில் zன் சார்பாகவும்

$$z=\int e^{-\int Pdx}dx$$

என்பதைப் பயன்படுத்தி yஐ xஇன் சார்பாகப் பெற்றும் தீர்வு காணலாம்.

அல்லது

2. $\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=Q_1$ என்பதை a^2 என்ற மாறிலியாக ஏற்று, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\frac{dy}{dz}+a^2y=X_1$$

என்ற அமைப்பில் பெற்றுப் பின்னர் தீர்வுகாண முடியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\cot x\frac{dy}{dx}+4y\ \mathrm{cosec}^2\,x=0$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

$$z = \int e^{-\int P dx} dx$$

என ஈடு செய்தால்

$$z = \int \operatorname{cosec} x dx$$

$$= \log \tan \frac{x}{2}$$

எனவே

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{4\operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} y = 0$$

என்றாகும். அதாவது

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 4y = 0$$

$$\therefore \; y = A \cos 2z + B \sin 2z$$

$$= A \cos \left\{2 \log \tan \frac{x}{2}\right\} + B \sin \left\{2 \log \tan \frac{x}{2}\right\}$$

என்ற தீர்வு கிட்டும்.

இரண்டாம் முறை :

$$\frac{4 \operatorname{cosec}^2 x}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = a^2$$

என்று ஏற்றால்

$$a \frac{dz}{dx} = 2 \operatorname{cosec} x$$

என்று கிட்டும்.

$$\therefore \quad az = 2 \log \tan \frac{x}{2}$$

இத்தொடர்பினைச் சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்ய

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{\frac{d^2z}{dx^2} + \cot x \frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 0$$

$$az = 2 \log \tan \frac{x}{2}$$ ஆதலால்

$$a \frac{dz}{dx} = 2 \operatorname{cosec} x$$

$$a \frac{d^2z}{dx^2} = -2 \operatorname{cosec} x \cot x$$

எனவே சமன்பாடு

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{\left(-\frac{2}{a}\text{cosec } x \cot x+\cot x \frac{2}{a}\text{cosec } x\right)}{\frac{4}{a^2}\text{cosec}^2 x}$$

$$+a^2y = 0$$

என்ற அமைப்பில் வரும். அதாவது

$$\frac{d^2y}{dz^2}+a^2y = 0$$

என்றுகும். இதன் தீர்வு

$$y = A\cos az+B\sin az$$

$$= A\cos\left(2\log\tan\frac{x}{2}\right)+B\sin\left(2\log\tan\frac{x}{2}\right)$$

என்பதாகும்.

பயிற்சி 9·5

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+\tan x\frac{dy}{dx}+y\cos^2 x=0$

2. $x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}+x^2y=0$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}-(4e^x+1)\frac{dy}{dx}+3e^{2x}y=e^{2(x+e^x)}$

4. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^4}=\frac{2x^2+1}{x^6}$

5. $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(4x-\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx}+4x^2y=3xe^{-x^2}$

விடைகள்

பயிற்சி 9·5

1. $y=A\cos(\sin x)+B\sin(\sin x)$

2. $y=A\cos\frac{n}{x}+B\sin\frac{n}{x}$

3. $y=Ae^{e^x}+Be^{3e^x}-e^{2e^x}$

4. $y=A\cos\left(\frac{1}{x}\right)+B\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}$

5. $y=Ae^{-x^2}+Bx^2e^{-x^2}+x^3e^{-x^2}$

9–6. இதுவரை நாம் இரண்டாவது வரிசைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் பலமுறைகளைக் கண்டோம். அவற்றில் சில, பொதுவாக n வரிசைச் சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்துமெனவும் ஆங்காங்கே குறிப்பிட்டோம்.

அம்முறைகளை யெல்லாம் ஒருவாறு தொகுத்துக் கூறுவோம்.

1. $\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+P_ny=f(x)$

$P_1, P_2, P_3,\dots, P_n$ மாறிலிகள்.

தீர்வுகாண் முறை : IV பகுதி ; VI பகுதி

2. $x^n\frac{d^ny}{dx^{n-1}}+x^{n-1}P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+P_ny=f(x)$

இது சமபடித்தான சமன்பாடெனப்படும். P_1, $P_2,\dots,Pn$ மாறிலிகள்.

தீர்வுகாண் முறை : VII பகுதி

3. அமைப்பு (A) ; பொருத்தமான சமன்பாடுகள் ; $P_1, P_2,\dots,Pn$ சார்புகளாகவும் இருக்கலாம்.

தீர்வுகாண் முறை : VIII பகுதி

4. அமைப்பு : $f\left[\frac{d^ny}{dx^n},\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\dots\frac{dy}{dx},x\right]=0$

y நேரடியாகச் சமன்பாட்டில் தோன்றுவதில்லை.

தீர்வுகாண் முறை : 8–5·3

5. அமைப்பு : $f\left[\frac{d^ny}{dx^n},\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\dots\frac{dy}{dx},y\right]=0$

x நேரடியாகத் தோன்றுவதில்லை.

தீர்வுகாண் முறை : 8–5·4.

6. அமைப்பு : $\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$

தீர்வுகாண் முறை : 8–5·2.

7. அமைப்பு (A) : P_1, $P_2,\dots,P_n$, (x, y)இன் சார்புகளாகவும் இருக்கலாம்.

அமைப்பு (A)இல், வலக் கைப்புறம் பூச்சியமாயின் $y=y_1$ என்ற ஒரு துணைத்தீர்வு தெரியுமானால், $y=y_1\,v(x)$ எனக் கொண்டு, சமன்பாட்டு வரிசையை "ஒன்று" குறைத்து மேலே தீர்வு காண இயலலாம்.

தீர்வுகாண் முறை : 9-2.

8. அமைப்பு : இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x,\,y)\frac{dy}{dx}+Q\,(x,\,y)\,y=f(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\,(x,\,y)\,\frac{dy}{dx}+Q\,(x,\,y)\,y=0$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு y_1, y_2 என இரு துணைத் தீர்வுகள் காண முடியுமானால்,

$y=By_1+Ay_2$ என்ற முழுத் தீர்வு காண முடியலாம் ; இங்கு A, B மாறிலிகள் அல்ல, சார்புகளென்று கொள்ளப்படும். A, B என்ற இரண்டு சார்புகளும் $y_1\dfrac{dB}{dx}+y_2\dfrac{dA}{dx}=0$ என்ற தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டிருக்கும்.

தீர்வுகாண் முறை : 9-2·1 ; 9-2·2.

9. அமைப்பு (A) ; P_1, P_2, ..., P_n என்பவை சில அல்லது எல்லாம் சார்புகள். x, y, செயலி D என்ற மூன்றும், அல்லது x, D இரண்டும் அல்லது y, D இரண்டும் தோன்றும் காரணிகளாய்ப் பிரிக்கமுடியுமானால்,

தீர்வுகாண் முறை : 9·3.

10. அமைப்பு : $\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x,\,y)\,\dfrac{dy}{dx}+Q(x,\,y)\,y\,=\,f(x)$

சார்புடை மாறி yஐ மாற்றி, முதல் வரிசை வகைக்கெழு பூச்சியமாகவோ, அல்லது முதல் வரிசைக்கெழுவைப் பெருக்கும் உறுப்பு ஒரு வசதியான சார்பாகவோ எடுத்துப் பின்னர் தீர்வு காணலாம்.

$\Bigg(\dfrac{d^2v}{dx^2}+Iv\,=\,F(x)$ என்று மாற்றுவது இங்கு குறிப்பிடப்பட்டிருக்கிறது ; அல்லது $\dfrac{d^2v}{dx^2}+P_1\,\dfrac{dv}{dx}+\mathrm{I}v\,=\,F(x)$ என்ற மாற்றம்$\Bigg)$

தீர்வுகாண் முறை : 9-4.

11. மேற்கூறிய (10) என்ற அமைப்பே : சார்பில் மாறி (x)ஐ மாற்றியமைத்து,

(a) முதல் வரிசை வகைக்கெழு பூச்சியமாகவோ அல்லது அதைப் பெருக்கும் உறுப்பு ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புப் பெறும்படியோ எடுத்து, பின்னர் தீர்வு காணலாம்

அல்லது

(b) y இன் கெழுவான Q, ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புப் பெறும்படியோ அல்லது சிறப்பாக ஒரு மாறிலி மதிப்புப் பெறும்படியோ மாற்றியமைத்து, பின்னர் தீர்வு காணலாம்.

தீர்வுகாண் முறை : 9·5.

பயிற்சி 9·6

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க. (கடைசியாகக் குறிப்பிட்ட பாகுபாட்டின்படி, அமைப்புமுறை எண் அடைப்புகளுக்குள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதைப் பயன்படுத்தலாம்.)

1. $(x-3)\dfrac{d^2y}{dx^2}-(4x-9)\dfrac{dy}{dx}+3(x-2)\,y=0.$ e^x – ஒரு தீர்வு (7)

2. $x\dfrac{d^2y}{dx^2}-(2x-1)\dfrac{dy}{dx}+(x-1)y=0$ $y_1=e^x$ என்பது ஒரு தீர்வு.

3. $(D^4-4D^2+3)\,y=\cos 2x+\sin 3x$ (1)

4. $(x^4D^4+6x^3D^3+9x^2D^2+3xD+1)y=(1+\log x)^2$ (2)

5. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-3x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{\log x\,.\,\sin(\log x)+1}{x}$ (2)

6. $(x+2)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4(x+2)\dfrac{dy}{dx}+6y=x$;
   $(x+2)=z$ எனக்கொள்க. (2)

7. $x^5\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x^3\dfrac{dy}{dx}+(3-6x)\,x^2y=x^5+3x+4$ (3)

8. $(1+2x)\dfrac{d^3y}{dx^3}+4x\dfrac{d^2y}{dx^2}-(1-2x)\dfrac{dy}{dx}=e^{-x}$ (4)

9. $\dfrac{d^4y}{dx^4}\cdot\dfrac{d^3y}{dx^3}=1$ (4)

10. $y\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2\dfrac{dy}{dx}=0$ (5)

11. $y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=y^2\log y$ (5)

12. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+5x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(2x-x^3)\dfrac{dy}{dx}-(x^2+2)y=40x^3-4x^5$ (3)

13. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{a}{y^3}$ (6)

14. $[(x+3)D^2-(2x+7)D+2]\,y=(x+3)\,e^{2x}$ (9)

15. $(xD-3)\,(xD-1)y=2x^3-x^2$ (9)

16. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}+4x^2y=xe^{x^2}$ (10)

17. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\cot x\dfrac{dy}{dx}-y\sin^2 x=\cos x\sin^2 x$ (11)

18. $\dfrac{dy}{dx}+yP+y^2Q=f\,(x)$; P, Q என்பவை xஇன் சார்புகள்; $y=\dfrac{1}{Qu}\dfrac{du}{dx}$ என ஈடுசெய்து இச் சமன்பாட்டை, $\dfrac{d^2u}{dx^2}+\left(P-\dfrac{1}{Q}\dfrac{dQ}{dx}\right)\dfrac{du}{dx}-Qu\,f(x)=0$ என அமைப்பிலிடுக.

அம்முறைப்படி,

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y+\dfrac{x^3}{2}y^2=\dfrac{1}{2x}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க (11)

19. சென்ற (18) கணக்கு முறைப்படி, $\dfrac{dy}{dx}-(\tan x+3\cos x)\,y+y^2\cos x=-2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$y=\sec x\left[\frac{e^{\sin x}+2\,Ke^{2\sin x}}{e^{\sin x}+Ke^{2\sin x}}\right]$$ என நிறுவுக.

இங்கும் $K=\dfrac{A}{B}$.

20. $[(x+1)\,D^2-(3x+4)\,D+3]\,y=(3x+2)e^{3x}$

விடைகள்

பயிற்சி 9·6

1. $y=Ae^x+Be^{3x}\,(4x^3-42x^2+150x-183)$

2. $y=e^x\,(A+B\log x)$

3. $y=Ae^x+Be^{-x}+Ce^{\sqrt{3}x}+Ee^{-\sqrt{3}x}+\dfrac{\cos 2x}{35}+\dfrac{\sin 3x}{120}$

4. $y=(A+B\log x)\sin(\log x)+(C+E\log x)\cos\,(\log)\,x$
$+(\log x)^2+2\log x-3$

5. $y=x^2\left(Ax^{\sqrt{3}}+Bx^{-\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{6x}+\frac{\log x}{61\,x}[5\sin(\log x)+6\cos$
$(\log x)]+\frac{2}{3721\,x}\,[27\sin(\log x)+191\cos(\log x)]$

6. $y=A\,(x+2)^2+B\,(x+2)^3+\frac{3x+4}{6}$

7. $y=x^3\left(a^2e^{\frac{3}{x}}+\frac{1}{12}\right)+x^3e^{\frac{3}{x}}\int e^{-\frac{x}{3}}$
$\left(\frac{3}{x^6}\log\,x-\frac{4}{x^7}+\frac{b}{x^6}\right)dx$
(a, b இரு மாறிலிகள்)

8. $y=Ae^{-x}+B\,(x^2+3x)e^{-x}+\frac{1}{2}\,xe^{-x}+C$

9. $y=\frac{1}{105}\left[Ax^2+Bx+C\pm(2x+E)^{\frac{7}{2}}\right]$

10. $y=\frac{1}{A}\tan\,(Ax+B)$

11. $\log y=Ae^x+Be^{-x}$

12. $y=\frac{1}{x^2}(Ae^x+Be^{-x})+\frac{C}{x}+x^3$

13. $Ay^2=a+(Ax+B)^2$

14. $y=A(2x+7)+Be^{2x}-e^x\,(x+4)$

15. $y=Ax^3+Bx+x^2(1+x\log x)$

16. $y=e^{x^2}\,(A\cos\sqrt{2}x+B\sin\sqrt{2}x+\frac{1}{2}xe^{x^2}$

17. $y=Ae^{\cos^x}+Be^{-\cos^x}-\cos x$

18. $y=\frac{1}{x^2}\left[\frac{e^{\frac{x^2}{4}}-Ke^{\frac{-x^2}{4}}}{e^{\frac{x^2}{4}}+Ke^{\frac{-x^2}{4}}}\right]$

இங்கு $K=\frac{A}{B}$; A, B இரண்டும் மாறிலிகள்.

20. $y=A(3x+4)+Be^{3x}+xe^{3x}$.

10 (A). வடிவ கணிதப் பயன்பாடுகள்
(Geometrical Applications)

10-1. முதல் பகுதியில்

$$F(x, y, a) = 0 \tag{1}$$

என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{2}$$

என்ற அமைப்பில் காணும் முறையை விளக்கினோம். இவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாடானது, அக்குடும்பத்தில் காணப்படும் ஒரு பண்பினை, நுண் கணித முறையில் சுட்டிக்காட்டி நிற்கிறது.

மறுதலையாக, நுண்கணித முறையில் ஒரு பண்பினைச் சுட்டிக் காட்டும் ஒருவகைக் கெழுச் சமன்பாடு கொடுக்கப்படுமானால், அச்சமன் பாட்டினைத் தீர்க்கும் வகையில் அப்பண்பினைப் பெற்ற ஒரு வளைவரைக் குடும்பத்தை நாம் பெறுவோம்; இச்சமன்பாட்டில் ஏதாமொரு மாறிலி (an arbitrary constant) இடம் பெறும். இக்குடும்பத்தில் இடம் பெறும் ஒவ்வொரு வளைவரையும் (2) என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு அல்லது ஒரு 'தொகை' (integral) எனப் பெயர் பெறும். அவ்வளை வரைக்கு மற்றுமேதாமொரு குறிப்புக் கொடுக்கப்படுமானால், குறிப் பான ஒரு 'தீர்வு' அல்லது 'தொகை' பெறலாம். எடுத்துக்காட்டாக (2) என்ற பண்பினை உடைய ஒரு வளை வரை, ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியாகச் செல்லுகின்றதென்றோ, அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் அதன் சரிவு என்ன என்று கொடுக்கப்பட்டாலோ 'சிறப்புத் தீர்வு' (particular solution or curve) காணலாம்.

10-1.1. வளைவரைகளுக்குரிய சில முக்கிய பண்புகள் மரபுப்படி பின்னர் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

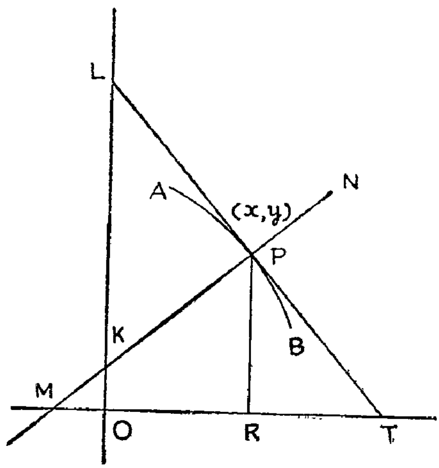
செங்குத்தாய அச்சுகள் (Rectangular co-ordinates):

படம் 10-11. (i), (ii) இரண்டிலும் AB என்ற வளைவரைமேல் $P(x, y)$ என்பது ஒரு புள்ளியாகும். RP என்பது Pஇன் குத்தாயம் y.

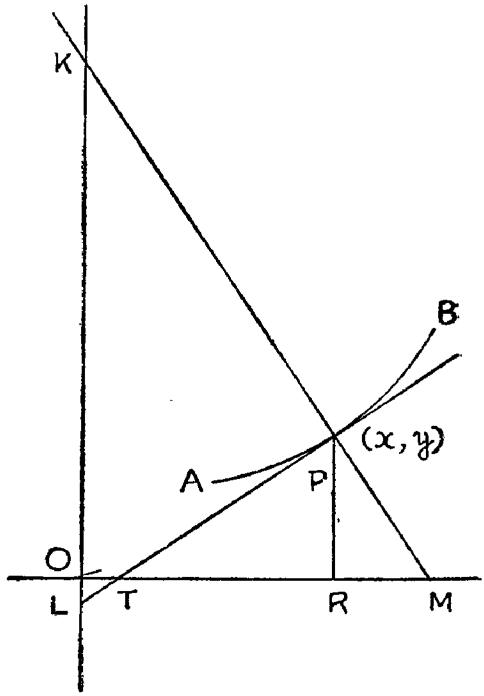
LPT அல்லது PTL என்பது Pஇல் வரையப்படும் தொடுகோடு.

PKM அல்லது KPM என்பது Pஇல் வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு;

தொடுகோடு, x அச்சை Tஇலும் y அச்சை Lஇலும் வெட்டுகிறது.



படம் 10-1·1 (i)



படம் 10-1·1 (ii)

செங்குத்துக்கோடு x அச்சை Mஇலும், y அச்சை Kஇலும் வெட்டுகிறது.

ஒரு மரபுப்படி,

PT என்பது தொடுகோட்டு நீளம் (length of the tangent) எனவும்,

PM என்பது செங்குத்துக்கோட்டு நீளம் (length of the normal) எனவும்,

RT என்பது தொடுகோட்டடி நீளம் (length of the sub-tangent) எனவும்,

MR என்பது செங்கோட்டடி நீளம் (length of the sub-normal) எனவும் அளிக்கப்படுகின்றன. வேறுவகையாகக் கூறினால்,

PT என்பது x அச்சால் வெட்டப்படும் தொடுகோட்டுத் துண்டெனவும்,

PL என்பது y அச்சால் வெட்டப்படும் தொடுகோட்டுத் துண்டெனவும்,

PM என்பது x அச்சால் வெட்டப்படும் செங்குத்துக் கோட்டுத் துண்டெனவும்,

PK என்பது y அச்சால் வெட்டப்படும் செங்குத்துக் கோட்டுத் துண்டெனவும் பெயரிடப்படுகின்றன.

10-1.2. வாய்பாடுகள் :

1. $\dfrac{dy}{dx}$: (x, y)இல் தொடுகோட்டின் சரிவு (slope of the tangent at (x, y)).

2. $-\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$: (x, y)இல் செங்குத்துக்கோட்டின் சரிவு (slope of the normal).

3. $(Y-y) = \dfrac{dy}{dx}(X-x)$: (x, y) என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு; (X, Y) பொதுப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்.

4. $(Y-y)\dfrac{dy}{dx}+(X-x) = 0$; (x, y) என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு.

5. $PT =$ தொடுகோட்டு நீளம்: $y\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$ (மட்டு மதிப்பு)

6. $PM =$ செங்குத்துக்கோட்டு நீளம்: $y\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ (மட்டு மதிப்பு)

7. $TR =$ தொடுகோட்டடி நீளம்: $y\dfrac{dx}{dy}$ (மட்டு மதிப்பு)

8. $RM =$ செங்கோட்டடி நீளம்: $y\dfrac{dy}{dx}$ (மட்டு மதிப்பு)

9. OT, OL முறையே x, y அச்சுகளின்மேல் தொடுகோடு வெட்டும் துண்டுகள் :

$$OT = x - y\frac{dx}{dy} \quad \text{(மட்டு மதிப்பு)}$$

$$OL = y - x\frac{dy}{d} \quad \text{(மட்டு மதிப்பு)}$$

10. OM, OK முறையே x, y அச்சுகளின்மேல் செங்குத்துக் கோடு வெட்டும் துண்டுகள்

$$OM = x + y\frac{dy}{dx} \quad \text{(மட்டு மதிப்பு)}$$

$$OK = y + x\frac{dx}{dy} \quad \text{(மட்டு மதிப்பு)}$$

11. PL, PK என்பவை முறையே $P(x, y)$இலிருந்து y அச்சால் வெட்டப்படும் தொடுகோட்டு நீளம், செங்குத்துக்கோட்டு நீளம் எனப் படும்

$$PL = x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{(மட்டு மதிப்பு)}$$

$$PK = x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad \text{(மட்டு மதிப்பு)}$$

12. $$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

= ஒரு சிறு நுண் வில்லளவு (Element of arc)

13. ydx அல்லது xdy ஒரு சிறு நுண் பரப்பளவு (Element of area)

10-2. போலார் ஆயத்தொலைகள் (Polar co-ordinates)

படம் 10-2இல் OA ஆதிக்கோடு (initial line). P என்பது (r, θ) என்ற புள்ளி; அப்புள்ளியில் PT தொடுகோடு; PN செங்குத் துக்கோடு.

(i) $\tan \psi = r\dfrac{d\theta}{dr}$; ψ என்பது தொடு கோட்டிற்கும் ஆர வெக்டருக்கும் (radius vector) இடைப்பட்ட கோணம்.

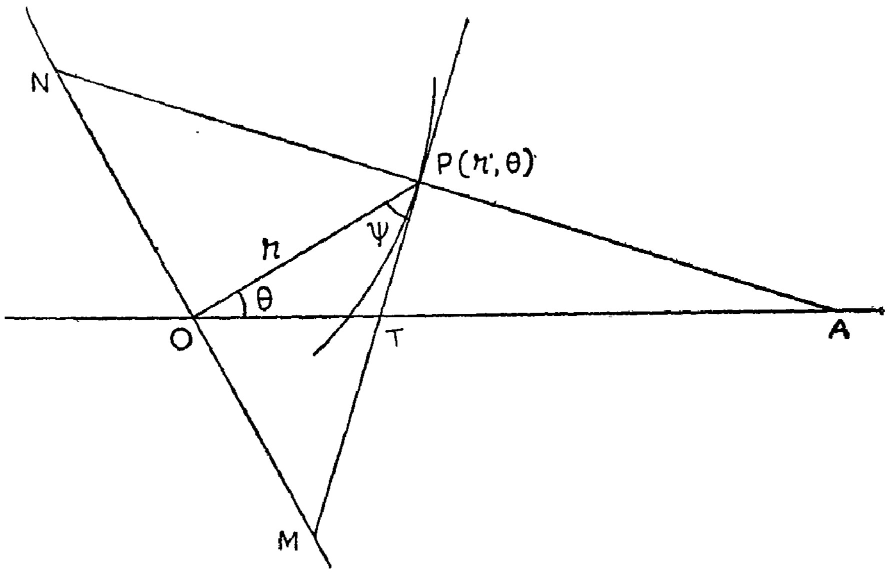
(ii) NOM என்பது ஆர வெக்டர் OPக்கு குத்துக் கோடாயின் PM—தொடுகோட்டு நீளம்

PN—செங்குத்துக்கோட்டு நீளம்

OM—தொடுகோட்டடி நீளம்

ON—செங்கோட்டடி நீளம்

என மரபுப்படி கொள்ளப்படுகிறது.



படம் 10·2

படம் 10-2இல் $90^\circ = N\hat{P}T = P\hat{O}M = P\hat{O}N$

$$PM = r\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

$$PN = r\sqrt{1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$OM = r^2\frac{d\theta}{dr}$$

$$ON = \frac{dr}{d\theta}$$

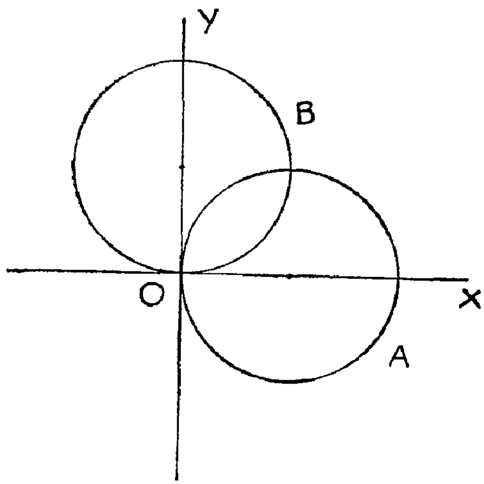
(iii) $ds = \sqrt{(dr)^2+r^2(d\theta)^2}$

$$= dr\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

$$= d\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

(iv) $\frac{1}{2}r^2d\theta$ என்பது ஒரு சிறு நுண்பரப்பு.

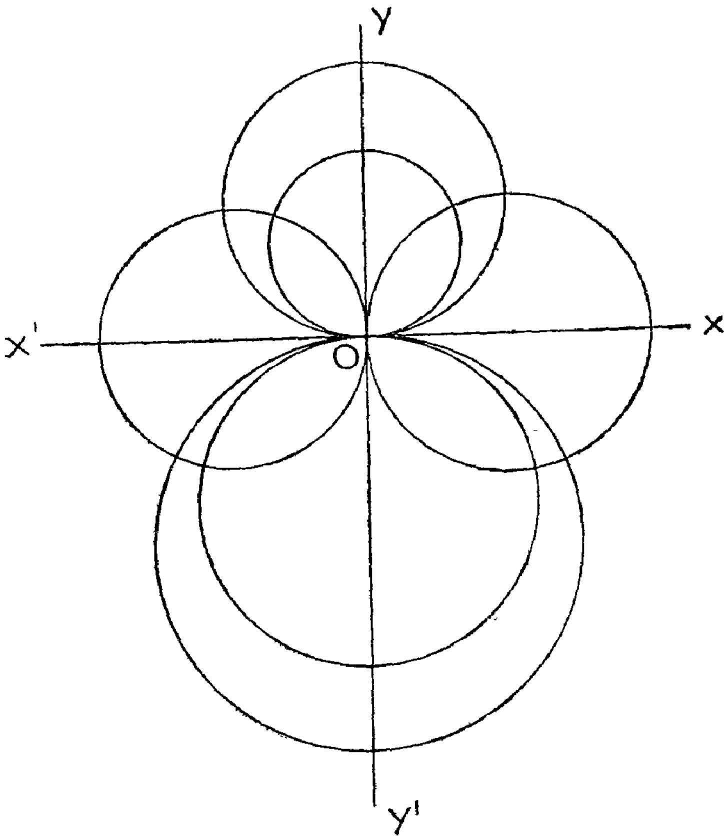
10-3. வளைவரைகள் (Trajectories): ஒரு வளைவரைக் குடும்பத்தின் ஒவ்வொரு வளைவரையையும் மற்றோர் வளைவரை ஒரு குறிப்பிட்ட கோணம் ωஇல் வெட்டுமாறுல் அது, அக்குடும்பத்தின் ω சமவெட்டு வளைவரை எனப்படும், (ω - trajectory). அவ் வெட்டுக் கோணம் ω என்பது ஒரு செங்கோணத்திற்குச் சமமாயின் அது செங்கோண வெட்டுவரை (Orthogonal Trajectory) எனப் பெயர் பெறும். எடுத்துக் காட்டாக படம் 10-3இல் காட்டப்பட்டிருக்



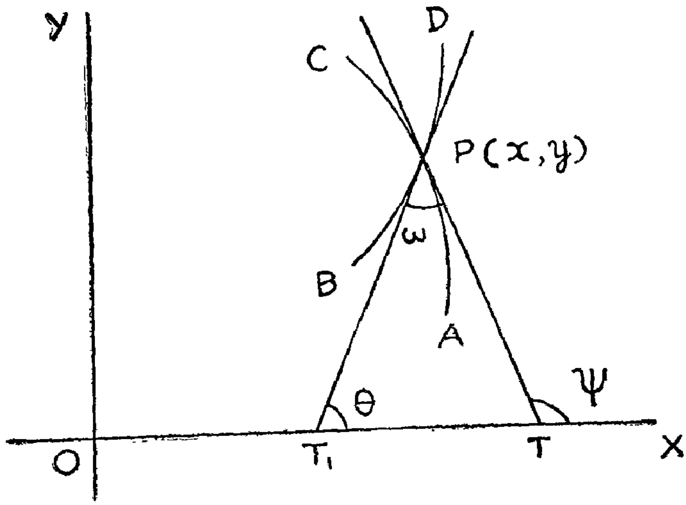
படம் 10·3

கின்ற இருவட்டங்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. A என்ற வட்டத்தின் மையம் x அச்சின் மேலுள்ளது. அவ்வட்டம் y அச்சைத் தொடுகிறது. B என்ற வட்டத்தின் மையம் y அச்சின் மேலுள்ளது ; அது x அச்சைத் தொடுகின்றது. இரு வட்டங் களுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $X\hat{O}Y = 90°$. பொதுவாகவே x அச்சில் மையங்கொண்டு y அச்சைத் தொடும் வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றும் y அச்சில் மையங்கொண்டு x அச்சைத் தொடும் ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் செங்கோணத்தில் வெட்டுமெனக் காணலாம். படம் 10-3. (i) பார்க்க.

படம் 10·3.1இல் AC, BD என்ற இரு வளைவரைகள் $P(x, y)$இல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. Pஇல் ACக்குத் தொடுகோடு PT. Pஇல் BDக்குத் தொடுகோடு PT_1. $T\hat{P}T_1 = \omega =$ இரு வளைவரைகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் கோணம்.



மிடம் 10-3 (i)



படம் 10-3·1

10-3.1. தேற்றம் :

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வளைவரைகளை, w என்ற குறிப்பிட்ட கோணத்தில் வெட்டும் வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு

$$f\left(x, y, \frac{\frac{dy}{dx} - \tan w}{1+\frac{dy}{dx}\tan w}\right) = 0$$

என்பதாகும்.

தெரிப்பு :

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

என்பது ஒரு வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடெனக் கொள்வோம். (1)இன் தீர்வுக்கான வளைவரையை BD எனக் கொள்வோம். [படம் 10•31]. BDஇன் மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் உரிய $\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ என்ற மூன்று கணியங்கள் உள்ளன : அதாவது புள்ளியின் x, y ஆயத்தொலைகள், அப்புள்ளியில் வரையப் படக்கூடிய தொடுகோட்டின் சரிவு (gradient) என்ற மூன்றுமாம்.

இதே மாதிரி ACஇன் மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் உரிய $\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ என்ற மூன்று கணியங்கள் உள்ளன. குழப்பம் இல்லாம லிருக்க ACஇன் மேல் உள்ள புள்ளிகளுக்குரிய மூன்று கணியங்களையும் $\left(X, Y, \frac{dY}{dX}\right)$ எனக் குறிப்போம். இவ்விரு வளைவரைகளுக்கும் பொதுவான புள்ளி P. அந்தப் புள்ளியை யொட்டி படத்திலிருந்து

$$x = X, \quad y = Y; \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P(BD)} = \tan\theta$$

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)_{P(AC)} = \tan\Psi \text{ எனக் காணலாம்.}$$

இவைகளிடையே தொடர்பு

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P(BD)} = \tan\theta = \tan(\Psi - w)$$

$$= \frac{\tan\Psi - \tan w}{1+\tan\Psi\tan w}$$

$$= \frac{\frac{dY}{dX} - \tan w}{1 + \frac{dY}{dX} \tan w}$$

எனவே, சமவெட்டு வளைவரை மேலுள்ள P என்ற புள்ளியில் (அதாவது AC இன் மேல்)

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = f\left(X,\ Y,\ \frac{\frac{dY}{dX} - \tan w}{1 + \frac{dY}{dX} \tan w}\right) = 0$$

என்ற தொடர்பு பொருந்துகின்றது. எனவே சமவெட்டு வளைவரையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$f\left(X,\ Y,\ \frac{\frac{dY}{dX} - \tan w}{1 + \frac{dY}{dX} \tan w}\right) = 0$$

என்றாகும். X, Yக்குப் பதிலாக, நாம் x, y என ஈடுசெய்தால் சமவெட்டு வளைவரையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைச் சாதாரணமாக

$$f\left(x,\ y,\ \frac{\frac{dy}{dx} - \tan w}{1 + \frac{dy}{dx} \tan w}\right) = 0$$

என எழுதலாம்.

கிளைத்தேற்றம்: $w = 90°$ ஆனால், செங்கோண வெட்டு வளைவரையின் சமன்பாடு

$$f\left(x,\ y,\ -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0$$

எனப் பெறப்படும். ஏனெனில்

$$\tan \theta = \tan (\Psi - 90°)$$
$$= -\cot \Psi$$
$$= -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ எனவரும்.}$$

10-3·2. போலார் சமன்பாடுகள் – செங்கோண வெட்டு வளை வரைகள் :

இதே மாதிரியாக $f\left(r,\ \theta,\ \dfrac{dr}{d\theta}\right) = 0$

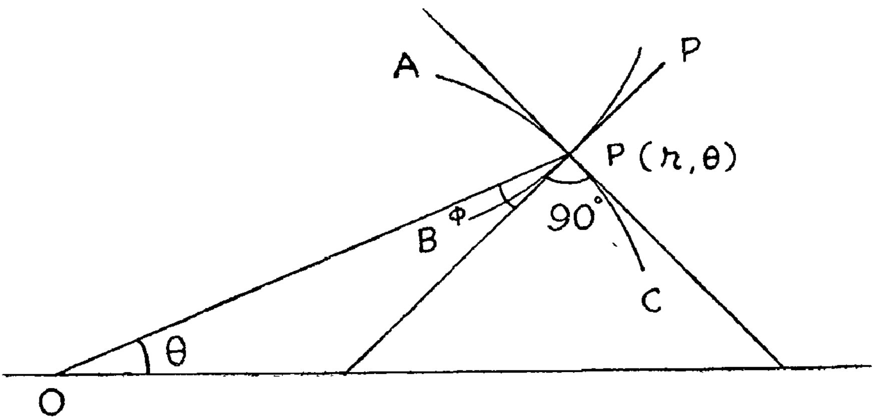
என்ற வளைவரைக் குடும்பத்திற்கு $f\left(r,\ \theta,\ -r^2\dfrac{d\theta}{dr}\right) = 0$

என்பது செங்கோண வெட்டு வளைவரைக் குடும்பமாகும்.

ஏனெனில்

$$\tan\ \phi = r\frac{d\theta}{dr}$$

$$\tan(90+\phi) = -\cot\phi = -\frac{1}{r}\ \frac{dr}{d\theta}\quad \text{(படம் 10-3·2)}$$



படம் 10-3·2

எனவே $r\ \dfrac{d\theta}{dr}$க்கு, $\dfrac{-1}{r}\ \dfrac{dr}{d\theta}$ஐ ஈடுசெய்ய வெண்டும். அதாவது $\dfrac{dr}{d\theta}$க்கு, $-r^2\ \dfrac{d\theta}{dr}$ஐ ஈடுசெய்ய வேண்டும். (10-3·2 காண்க)

10-4. எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 : $(x,\ y)$ என்ற புள்ளியில் வரையக் கூடிய செங்குத்துக்கோடு, ஆய ஆதி வழியாகச் செல்லுமாறல் அப்பண்புடைய வளைவரைக் குடும்பம் என்ன ?

செங்குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{dy}{dx}(Y-y)+(X-x)=0$$

என நமக்குத் தெரியும். இது ஆய ஆதி வழிச் செல்லுமானல் $X=0$, $Y=0$ என்பது அக்கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். எனவே அவ்வளைவரைக்கு

$$-y\frac{dy}{dx}-x=0$$

அதாவது

$$xdx+ydy=0$$

என்பது பொருந்தும். இதன் தீர்வு

$$x^2+y^2 = C$$

எனவரும். எனவே கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட பண்பினை உடைய வளைவரை

$$x^2+y^2 = C$$

என்பதாகும். இது ஆய ஆதியை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டமெனவும், ஒவ்வொரு ஆரமும் செங்குத்துக் கோடெனவும், ஒவ்வொரு ஆரமும் ஆய ஆதி வழியாகச் செல்கிறதெனவும் நமக்குத் தெரியும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: ஆய ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வளை வரையில் ஆய ஆதியிலிருந்து, அதன் மேலுள்ள ஏதாமொரு புள்ளி (x, y) வரையிலுள்ள வில் நீளமானது $2\sqrt{x}$க்குச் சமமெனின், அவ்வளைவரை யாது?

வில் நீளம்

$$\int_0^x \frac{ds}{dx}\,dx = \int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

கணக்கின்படி

$$\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\sqrt{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \frac{d}{dx}(2\sqrt{x})$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$\therefore \int dy = \pm \int\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx$$

$x=u^2$ என ஈடுசெய்து தொகை கண்டால்

$$y = \pm\,[\sin^{-1}(\sqrt{x})+\sqrt{x-x^2}]+C$$

எனக்கிட்டும். வளைவரை ஆய ஆதிவழியாகச் செல்லுவதால்

$$x = 0, y = 0. \text{ எனவே } C=0$$

$$\therefore \quad y = \pm\,\{\sin^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}\}$$

என்பதே இப்பண்பினையுடைய வளைவரையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $x^2+2y^2=a^2$ என்ற குடும்பத்திற்கான செங்கோண வெட்டிக் குடும்பம் காண்க.

$$x^2+2y^2 = a^2$$

எனவே

$$2x+4y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y}$$

என்பது வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். எனவே செங்கோணச் சம வெட்டியின் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

இதன் தொகையைக் காணின்

$$y = Ax^2$$

எனக் கிட்டும். இதுவே செங்கோணச் சமவெட்டிக் குடும்பத்தின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-\lambda}=1$ என்பது ஒரு பொதுக் குவிய கூம்பு வெட்டிகளைக் குறிக்கிறது. a ஒரு மாறிலி. இக் குடும்பம் தனக்குத்

தானே செங்கோண சமவெட்டிக் குடும்பம் என நிறுவுக (self orthogonal).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\lambda}=1 \qquad \text{(A)}$$

என்ற குடும்பத்திற்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்போம்.

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{a^2-\lambda}\;\frac{dy}{dx}=0$$

எனவே

$$a^2=\frac{\lambda x}{x+y\,\dfrac{dy}{dx}}$$

என்றாகும். அப்போது

$$a^2-\lambda=\frac{-\lambda\,\dfrac{dy}{dx}\,y}{x+y\,\dfrac{dy}{dx}}$$

இவை கொண்டு, (A)இல் ஈடு செய்து,

$$\frac{x^2\left(x+y\,\dfrac{dy}{dx}\right)}{\lambda x}+\frac{y^2\left(x+y\,\dfrac{dy}{dx}\right)}{-\lambda y\,\dfrac{dy}{dx}}=1$$

எனப் பெறலாம். அதாவது

$$\left(x+y\,\frac{dy}{dx}\right)\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=\lambda\frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

இக் குடும்பத்திற்குச் செங்கோண வெட்டுவளைவரையைப்பெற $\dfrac{dy}{dx}$ உள்ள இடங்களில் $-\dfrac{dx}{dy}$ என ஈடு செய்ய

$$\left(x-\frac{y}{\dfrac{dy}{dx}}\right)\left(\frac{-x}{\dfrac{dy}{dx}}-y\right)=-\frac{\lambda}{\dfrac{dy}{dx}}$$

அதாவது

$$\left(x\,\frac{dy}{dx}-y\right)\left(x+y\,\frac{dy}{dx}\right)=\lambda\frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

என வரும்.

(1)உம், (2)உம் ஒன்றே எனக் காண்க. எனவே,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\lambda}=1$$

என்ற குடும்பம் தன்னைத்தானே செங்கோணச் சமவெட்டியாகக் கொண்ட குடும்பமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : $r=a(1+\sin\theta)$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்திற்குச் செங்கோணச் சமவெட்டியாக அமையும் வளைவரைக் குடும்பம் $r=a(1-\sin\theta)$ என நிறுவுக.

$r=a(1+\sin\theta)$ என்பதற்கு முதலில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்போம்.

$$\frac{dr}{d\theta}=a\cos\theta$$

aஐ நீக்கிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$r=\frac{dr}{d\theta}\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

எனக் கிட்டும். எனவே செங்கோணச் சமவெட்டிக் குடும்பச் சமன்பாடு

$$r=-r^2\,\frac{d\theta}{dr}\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

அதாவது

$$r\,\frac{d\theta}{dr}\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)+1=0$$

அதாவது

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta+\frac{dr}{r}=0$$

அதாவது தொகை கண்டால்

$$\int\frac{dr}{r}+\int\sec\theta\,d\theta+\int\tan\theta\,d\theta=C_1$$

அதாவது

$$\log r+\log(\sec\theta+\tan\theta)+\log\sec\theta=\log C$$

அதாவது

$$r\sec\theta\,(\sec\theta+\tan\theta)=C$$

$$r=\frac{C\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$$

என வரும். அதாவது

$$r=\frac{C\cos^2\theta}{1+\sin\theta}$$

$$=\frac{C\,(1-\sin^2\theta)}{1+\sin\theta}$$

$$=C\,(1-\sin\theta)$$ என்று கிட்டும்.

பயிற்சி 10·1

1. ஒரு வளைவரைக் குடும்பத்தில் (x, y) என்ற புள்ளி வழியாக வரையப்படும் தொடுகோட்டின் y அச்சு வெட்டுத்துண்டு $2xy^2$. இக்குடும்பத்தில் ஒரு வளைவரை $(4, 1)$ வழியாகச் செல்லுமானால் அவ்வளைவரையின் சமன்பாடு $x-x^2y+12y=0$ என நிறுவுக.

2. ஒரு வளைவரைக் குடும்பத்தில் (x, y) என்ற புள்ளி வழியாக தொடுகோடு வரையப்படுகின்றது. (x, y) இலிருந்து அத்தொடு கோடு, y அச்சை வெட்டும் வரை உள்ள இடைவெளி அத்தொடு கோட்டின் y அச்சு வெட்டுத்துண்டுக்குச் சமமாக உள்ளது. அவ்வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=ax$ என நிறுவுக.

3. பின்வரும் பண்புகளையுடைய வளைவரைகளின் சமன்பாடுகள் காண்க:

(i) போலார் செங்கோட்டடியும், போலார் தொடு கோட்டடியும் சமம்.

(ii) போலார் செங்கோட்டடியின் நீளமானது வெக்டர் கோணத்தின் sineஐப் போல் இருமடங்கு (twice the sine of the vectorial angle). வளைவரை $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ வழியாகச் செல்கிறது.

(iii) (x, y) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடும் (normal) ஆய ஆதியையும் (x, y)ஐயும் இணைக்கும் கோடும் x அச்சை அடியாகக் கொண்ட ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன.

(iv) ஆய ஆதிவழியாக ஒரு வளைவரை செல்கின்றது (x, y) என்ற புள்ளிவழியாக ஆய அச்சுகளுக்கு இணைகோடுகள் வரையப்படுகின்றன. இவ்வாறமையும் செவ்வகத்தை அவ் வளைவரை பிரிக்கும் பரப்புப் பகுதிகள் 1 : 3 என்ற விகிதத்திலுள்ளன.

$$\left[\, 3\int_0^x y\,dx = xy - \int_0^x y\,dx \,\right]$$

(v) x அச்சு; $x=a$ என்ற குத்தாயம்; [வளைவரை; நகர்ந்து செல்லும் அல்லது மாறிக்கொண்டே போகும் ஒரு குத்தாயம்;] இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட ஒரு பரப்பு, x அச்சை மையங் கொண்டு சுழல்கிறது. அது பிறப்பிக்கும் திண்மத்தின் கொள்ளளவு

(i) இரு குத்தாயங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கு நேர் விகிதத்திலுள்ளது.

(ii) அவற்றின் வேறுபாட்டிற்கு நேர்விகிதத்திலுள்ளது. அந்த வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு காண்க.

[(i) $\pi \int_a^x y^2 dx = k(y+A)$

(ii) $\pi \int_a^x y^2 dx = k(y-A)$]

(vi) ஒரு வளைவரையில் ஆரவெக்டருக்கும், தொடு கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணமும், ஆதிக் கோட்டிற்குத் தொடுகோட்டின் சாய்வும் 1 : 3 என்ற விகிதத்திலுள்ளன (போலார் சமன்பாடு).

$$\left[\psi = \frac{\psi+\theta}{3}\right]$$

4. பின்வரும் வளைவரைகளுக்குரிய செங்கோணச் சமவெட்டி வளைவரைகளின் (**orthogonal curves**) சமன்பாடு காண்க.

(a) $y = ae^{-2x}$ (b) $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$

(c) $y = (x-1) + ae^{-x}$ (d) $r = a \cos \theta$

(e) $r = a (\sec \theta + \tan \theta)$ (f) $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$

(g) $4y^2 + x^2 = A$ (h) $\log_e^r = A\theta$

(i) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (j) $r = a + \sin 5\theta$

(k) $r = \frac{2a}{1+\cos\theta}$ (l) $r^n = a^n \cos n\theta$

(m) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (n) $\left(r + \frac{k^2}{r}\right) \cos \theta = \alpha$

(p) $r = a^\theta$

(q) ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்க்கோட்டை ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் தொடும் ஒரு வட்டக் குடும்பம்.

5. $y^2 = 4a(x+a)$ என்ற குடும்பம் தனக்குத் தானே செங்கோணச் சமவெட்டிக் குடும்பமெனா நிறுவுக.

6. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ (p மாறும் தன்மையுடைய சாராமாறி) என்ற இணைக்கோட்டுக் குடும்பத்தை ஒரு வளைவ ரக் குடும்பம் வெட்டு

கிறது. வெட்டும் கோணம் $= \tan^{-1}\frac{a}{b}$. அவ்வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7. $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2(1-e^2)}\left\{\frac{2a}{r}-1\right\}$ என்ற பண்புடைய ஒரு வளைவரையின் சமன்பாடு காண்க. (மரபுப்படி, r என்பது ஆரவெக்டர்; p என்பது (r, θ)இல் வரையக்கூடிய தொடுகோட்டின் மேல் 0இலிருந்து வரையப்படும் குத்துக் கோட்டு நீளம்).

8. ஆய ஆதியிலிருந்து தொடுகோடுகளின் மேல் வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் சமநீளமுள்ளவை. இக்குடும்பத்தின் சமன்பாடென்ன?

9. போலார் முறையிலுள்ள ஒரு வளைவரையில் எந்த ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடும், ஆதிக்கோட்டுடனும் ஆரவெக்டருடனும் சமமான சாய்வில் உள்ளது. சமன்பாடு காண்க.

10. ஒரு வளைவரையில் எந்த ஒரு குத்துக்கோட்டின் மேலும், இரு குறிப்பிட்ட நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து வரையப்படும் குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத் தொகை ஒரு மாறிலியாயின் அவ்வளைவரையின் சமன்பாடு என்ன?

விடைகள்

பயிற்சி 10·1

3. (i) $r = ae^{\theta}$ (ii) $r = a-2\cos\theta$

(iii) $x^2-y^2+c = 0$ (iv) $y = cx^3$ அல்லது $cx = y^3$

(v) (i) இப்பண்புடைய வளைவரை இல்லை (ii) $y(c-\pi x) = k$

(vi) $r = a(1-\cos\theta)$

4. (a) $y^2 = x+c$ (b) $(x^2+y^2)^2 = c(2x^2+y^2)$

(c) $x+1 = y+ce^{-y}$ (d) $r = c\sin\theta$

(e) $r = ce^{-\sin\theta}$

(f) $\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)\left(x\frac{dy}{dx}-y\right) = (a^2-b^2)\frac{dy}{dx}$

(g) $y = bx^4$ (h) $\theta^2+(\log_e r)^2 = B$

(i) $y^{4/3}-x^{4/3} = c^{4/3}$ (j) $\sec 5\theta+\tan 5\theta = ce^{\frac{25}{r}}$

(k) $\dfrac{2c}{1-\cos\theta}$ (l) $r^n = c^n \sin n\theta$

(m) $r^2 = c^2 \sin 2\theta$ (n) $r^2 - k^2 = cr \operatorname{cosec}\theta$

(p) $r = e^{\sqrt{c^2-\theta^2}}$

(q) குறிப்பிட்ட வழியாகச் சென்று, அக்குறிப்பிட்ட கோட்டின் மேல் மையங்கொண்ட வட்டக் குடும்பம்.

5. $(a \sin\alpha - b\cos\alpha)\,x - (a\cos\alpha + b\sin\alpha)\,y = c$

6. $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1-e\sin(\theta+c)}$

7. $x^2+y^2 = a^2$

8. $r = c(1-\cos\theta)$

9. இவ்விரு புள்ளிகளையும் குவியமாகக்கொண்ட கூம்பு வெட்டிகளின் உட்சுருள் வளைகள் (involutes).

10. (B) நிலையியக்க வியலில் பயன்பாடுகள்

(முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்)

(Mechanics—applications—First order Differential Equations)

10-5. நிலையியக்க வியலின் ஆரம்பத்தில் தோன்றும் கருத்துக்கள், வரையறைகள், விளக்கங்கள் முதலியனவற்றை ஒருவாறு அறிந்தவர்கள் பின்வரும் உண்மைகளைப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகள், t என்ற குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் s என்ற தூரம் செல்லும்போது, ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் v என்ற திசை வேகம் பெற்றிருக்குமானல்

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ (திசை வேகம்)}$$

$$f = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} \text{ (திசை முடுக்கம்)}$$

என்பவை முறையே திசைவேகத்தையும் திசை முடுக்கத்தையும் குறிப்பிட்ட கணத்தில் தெரிவிக்கின்றன.

10-5·1. அது மட்டுமன்றி ஒரு சாராமாறி ஒரு சார்புடை மாறியோடு ஒரு சார்பால் இணைக்கப்பட்டிருக்குமாயின், ஒன்றுக்கொன்று மாறும்விகிதம் வகைக்கெழுவினல் அளவிடப்படுகின்றதென்பதும் நமக்குத்தெரியும். $\frac{dy}{dx}$ என்பது, $\underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ என நமக்குத் தெரியும். இது, சார்பில் மாறியை யொட்டி சார்புடைமாறி எந்த விகிதத்தில் மாறுகிறது (வளர்கிறது அல்லது குறைகிறது) என்பதை அளக்கிறது, என்ற அடிப்படைக் கருத்து கொண்டு நாம் சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

10-6. எடுத்துக்காட்டு (1) : ஒரு நாட்டின் குடிமக்கள் எண்ணிக்கை 50 ஆண்டுகளில் இரட்டிக்கிறதெனில், எத்தனை ஆண்டுகளில் அது மூன்று பங்காகும்? குடிமக்கள் எண்ணிக்கையும், ஆண்டின் வளர்ச்சி வேகமும் நேர் விகிதத்தில் உள்ளனவெனக் கொள்க.

$t=0$, அதாவது ஆரம்பத்தில் அந்நாட்டு மக்கள் எண்ணிக்கை y_0 எனவும், t ஆண்டுகளில் அது y என்கிற அளவுக்கு வளர்கிற தெனவும் கொள்வோம். கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டபடி,

$$\frac{dy}{dt} = ky \text{ எனக் கொள்ளலாம்.}$$

இந்த வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தீர்வினைக் காண்போமானால்

$$\int \frac{dy}{y} = \int k dt\,; \text{ கட்டுப்பாடு } t=0,\ y=y_0$$

எனவே $y = Ae^{kt}$

$= y_0\, e^{kt}$ எனவரும்.

$t=50$ எனில் $y=2y_0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

எனவே $2y_0 = y_0\, e^{50k}$

அல்லது $50k = \log_e 2$ எனவரும்.

$$\therefore\ K = \frac{\log_e 2}{50} \text{ எனப் பெறுகிறோம்.}$$

மூன்று மடங்காகவேண்டுமானால்

$$3y_0 = y_0 e^{\frac{\log_e 2}{50}T} \text{ என்கிற சமன்பாடு பொருந்தும்.}$$

$$\therefore\ T \times \frac{\log_e 2}{50} = \log_e 3$$

$$T = \frac{\log_e 3}{\log_e 2} \times 50$$

$= 79$ ஆண்டுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு (2) :

ஒருவகைக் கிருமிகளின் ஒரு மணி வளர்ச்சி வேகம், எத்தனை கிருமிகள் உள்ளதோ அவ்வெண்ணிக்கைக்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளது.

(a) 4 மணி நேரத்தில் எண்ணிக்கை இரட்டிக்கிறதெனில் 12 மணி நேரத்தில் வளர்ச்சி யென்ன?

(b) 3 மணி நேரம் முடிந்தபோது 10^4 கிருமிகளும் 5 மணி நேரத்திற்குப் பின்பு $4 \cdot 10^4$ கிருமிகளும் இருக்குமானால் தொடக்கத்தில் எவ்வளவு இருந்தன?

x - கிருமியின் எண்ணிக்கை எனவும்,

t - கால அளவு (மணியில்) எனவும் கொள்க.

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

அல்லது $x = Ae^{kt}$ எனப் பெறலாம்.

$t = 0$ ஆனால், அதாவது ஆரம்பத்தில் $x = A$. $t = 4$ எனில்,

$2A = Ae^{4k}$ என வரும்

$$\therefore \quad e^{4k} = 2$$

அல்லது $k = \dfrac{\log_e 2}{4}$

12 மணி நேரத்தில் உள்ள கிருமிகள்,

$$\begin{aligned} x &= Ae^{12k} \\ &= A(e^{4k})^3 \\ &= A(2)^3 \\ &= 8A \end{aligned}$$

எனவே 12 மணி நேரத்தில் கிருமிகளின் எண்ணிக்கை 8 மடங்காகும்.

(b) கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டபடி

$$10^4 = Ae^{3k} \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$4 \cdot 10^4 = Ae^{5k} \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\therefore \quad A = \frac{10^4}{e^{3k}} \qquad \ldots\ldots(1)\text{லிருந்து}$$

$$= \frac{4 \cdot 10^4}{e^{5k}} \qquad \ldots\ldots(2)\text{லிருந்து}$$

(2)ஐ, (1)ஆல் வகுத்தால்,

$$e^{2k} = 4$$

$$e^{k} = 2$$

எனவே $10^4 = Ae^{3k}$

$$\begin{aligned} &= A(2)^3 \\ &= 8A \end{aligned}$$

$$\therefore \quad A = \frac{10^4}{8}$$

அதாவது ஆரம்பத்திலிருந்த கிருமிகளின் எண்ணிக்கை $\dfrac{10^4}{8}$.

எடுத்துக்காட்டு (3) :

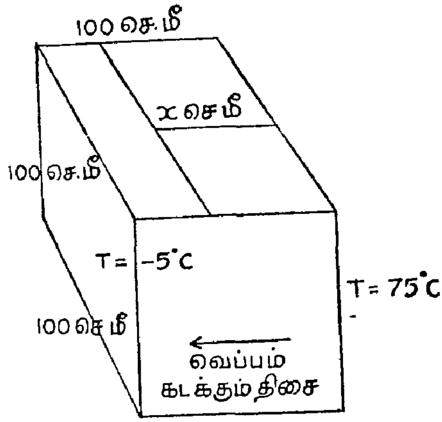
ஒரு குறிப்பிட்ட சில கட்டுப்பாடுகளில் ஒரு சுவர் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வெப்பம் Q என்னும் அளவு,

$$Q = -kA\frac{dT}{dx}$$

என்ற தொடர்பால் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. Q ஒரு மாறிலி; K சுவர்ப்பொருளின் வெப்பங் கடத்துதிறன் (Thermal conductivity); A (சதுர சென்டிமீட்டர்) என்பது வெப்பங் கடக்கும் திசைக்குச் செங்குத்தாக உள்ள சுவர் முகப்பரப்பு; T என்பது சுவர்முகத்திலிருந்து x (செ.மீ.) தூரத்திலுள்ள வெப்பநிலை (Temperature); x அதிகமாக அதிகமாக T குறையும். ஒரு குளிர்காப்பு அறையில் (Refrigerator) உள்முகம் $-5°C$ வெப்பநிலையிலும், வெளிமுகம் 75°C வெப்பநிலையிலும் உள்ளது; $K=0\cdot0025$; குளிர்காப்பு அறையின் மொத்தம் (thickness) 100 செ.மீ. இதில் ஒரு சதுரமீட்டர் வழியாக எவ்வளவு வெப்பம் ஒரு மணிநேரத்தில் கடக்குமெனக் காண்க.

வெளிமுகத்திலிருந்து, உள்முகம் நோக்கி x செ.மீ. தூரமுள்ள ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க.

$$Q = -KA\frac{dT}{dx} \text{ என்ற விதிப்படி,}$$



$$dT = -\frac{Q}{kA}dx$$

$x=0,\ T =$ 75° வரையிலும்,

$x=100,\ T =$ $-5°$ வரையிலும், தொகை கண்டால்

$$\int_{75}^{-5} dT = \frac{-Q}{KA} \int_{0}^{100} dx$$

$$\left(T \right)_{75}^{-5} = \frac{-Q}{KA} \left(x \right)_{0}^{100}$$

அதாவது $80 = \frac{Q}{KA}(100)$

$$\therefore \quad Q = \frac{KA \times 80}{100}$$

$$= \frac{4}{5} KA$$

$$= \frac{4}{5} \times (\cdot 0025)\ 100^2 = 20$$

எனவே ஒரு மணிநேரத்தில் கடக்கும் வெப்பம்

$$= 20 \times 60 \times 60 \text{ கலோரிகள்}$$

$$= 72,000 \text{ கலோரிகள்.}$$

குறிப்பு: பயிற்சி 10 (b)இல் 10ஆவது கணக்கு காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 4:

2·4 மீட்டர் ஆரமும் 3 மீட்டர் உயரமும் உள்ள ஒரு உருளைத் தொட்டியிலுள்ள தண்ணீர் 2·5 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு துவாரம் வழியாக வெளியேறுகிறது. தண்ணீர் மட்டம் h செ.மீ. இருப்பின், தண்ணீர் வெளியேறு வேகம் $v = 4\cdot 8\ \sqrt{30h}$ செ.மீ./விநாடியெனில் தண்ணீர் முழுவதும் காலியாக எவ்வளவு நேரமாகும்?

ஒரு விநாடியில் வெளியேறும் தண்ணீரின் கொள்ளளவு $= \pi \times 2\cdot 5 \times 2\cdot 5\ 4\cdot 8\sqrt{30h}$ கன செ.மீ. dt விநாடியில் வெளியேறும் தண்ணீர்

$$= \pi \times 30\ \sqrt{30h}\ dt \text{ கன செ.மீ.}$$

இதன் காரணமாக தண்ணீர் மட்டம் dh செ.மீ. குறையுமானால், வெளியேறிய தண்ணீரின் கொள்ளளவு,

$$= \pi \times 240 \times 240\ dh \text{ கன செ.மீ.}$$

$$\therefore \quad \pi \times 30 \times \sqrt{30h}\ dt = -\pi \times 240 \times 240\ dh$$

$$\therefore \quad \frac{dh}{dt} = \frac{-30\sqrt{30h}}{240 \times 240}$$

$$= -\frac{\sqrt{30h}}{1920}$$

$$t = o, \quad h = 300 \text{ ஆரம்பத்தில்}$$
$$t = t, \quad h = o \text{ கடைசியில்}$$

தொகை காணின்

$$\int_{300}^{o} \frac{dh}{-\sqrt{30h}} = \int_{o}^{t} \frac{dt}{1920}$$

$$\therefore \quad \frac{2}{\sqrt{30}} \left(\sqrt{h} \right)_{o}^{300} = \frac{t}{1920}$$

$$10\sqrt{3} = \frac{t\sqrt{30}}{2 \times 1920}$$

$$t = \frac{2 \times 1920 \times 10\sqrt{3}}{\sqrt{30}}$$

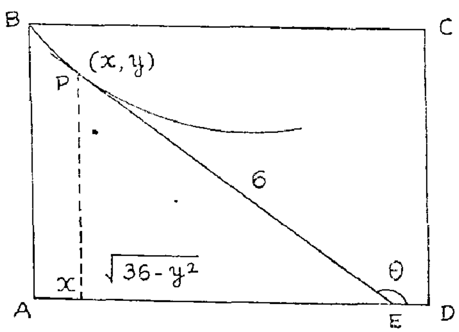
$$= \frac{38400}{\sqrt{10}} \text{ விநாடிகள்}$$

$$= \frac{32}{3\sqrt{10}} \text{ மணி}$$

$$= 3 \text{ மணி } 22 \text{ நிமிடங்கள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$ABCD$ என்பது செவ்வக அமைப்பிலுள்ள ஒரு குளம். A என்ற முனையில் ஒரு மனிதன் நிற்கிறான். 6 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் முனை Bஇல் நிற்கும் ஒரு தோணியில் கட்டப்பட்டு, மற்ற முனை இவன் கையில் இருக்கிறது. (படம் 10-6.5. காண்க). கயிற்றை விறைப்பாகப்



படம் 10-6·5

பிடித்துக் கொண்டே அவன் கரையோரமாக Dஐ நோக்கி நடக்கிறான். ADயிலிருந்து அந்தத் தோணி 3·6 மீட்டர் தூரத்திலிருக்கும்போது அம்மனிதன் எங்கிருக்கிறான், தோணி எங்கிருக்கிறதெனக் இடங் குறிக்கவும்.

படம் 10-6·5இல் காட்டியபடி, AD, AB என்பவற்றை முறையே x, y அச்சுக்களெனக் கொள்க. தோணியானது ஒரு குறிப்பிட்ட சமயத்தில் $P(x, y)$ என்ற இடத்திலுள்ளபோது, E என்ற இடத்தில் அம்மனிதன் நிற்கிருனெனக் கொள்வோம். PE என்ற கயிறு ADக்கு θ அளவு சாய்ந்திருக்கிறதெனக் கொள்வோம். BP என்பது தோணி நகரும் பாதையெனக் கொள்க; அதன் சமன்பாடு $y=f(x)$ எனக் கொள்க :

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{36-y^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{-\sqrt{36-y^2}}{y}dy = dx$$

தொகை காணின்,

$$\int \frac{-\sqrt{36-y^2}}{y}dy = x+k$$

$x=0$ ஆக விருக்கும்போது, $y=6$

$$\therefore \quad x = -\sqrt{36-y^2}+3\log\left(\frac{6+\sqrt{36-y^2}}{6-\sqrt{36-y^2}}\right)$$

இதுதான் தோணி நகரும் பாதை. ($k=0$ ஆகும்)

$\therefore \quad y = 3{\cdot}6$ ஆனல்

$$x = -\sqrt{36-(3{\cdot}6)^2}+3\log\left[\frac{6+\sqrt{36+(3{\cdot}6)^2}}{6-\sqrt{36-(3{\cdot}6)^2}}\right]$$

$$= -4{\cdot}8+3\log\left(\frac{6+4{\cdot}8}{6-4{\cdot}8}\right)$$

$$= -4{\cdot}8+3\log_e\left(\tfrac{9}{1}\right)$$

$$= -4{\cdot}8+3\log_e 9$$

$$= -4{\cdot}8+6{\cdot}5916$$

$= 1{\cdot}792$ மீட்டர்கள்

$AE = 1{\cdot}792+4{\cdot}8 = 6{\cdot}6$ மீட்டர்கள் (ஏறக்குறைய)

எனவே தோணி ABஇலிருந்து 1·8 மீட்டர் தூரத்தில் இருக்கும்; மனிதன் 6·6 தூரத்தில் இருப்பான்.

எடுத்துக்காட்டு (6) :

ரேடியம் (Radium) எவ்வளவு இருக்கிறதோ அந்த அளவுக்கு நேர் விகிதத்தில் சிதையும் (decomposes). 1600 ஆண்டுகளில் பாதி சிதையுமாளுல், 100 ஆண்டுகளில் சிதையும் சதவீதமென்ன ?

x அளவு ரேடியமிருப்பின்,

$\frac{dx}{dt} = -kx$ (1) என்பது கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. $t=0$ என்ற நிலையில் $x = x_o$ எனக் கொள்வோம்; அதாவது ஆரம்பத்தில் ரேடியம் அளவு x_o.

(1) இலிருந்து $\int \frac{dx}{x} = -\int kdt$

$$\log Cx = -kt \text{ (}C\text{ மாறிலி)}$$

$$\log Cx_o = 0$$

$$Cx_o = 1$$

$$C = \frac{1}{x_o}$$

எனவே $\log \frac{x}{x_o} = -Kt$ எனவரும்.

அதாவது $\frac{x}{x_o} = e^{-kt}$

$t=1600$ ஆகும்போது $x = \frac{1}{2}x_o$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = e^{-1600k}$$

$$-1600K = -\log 2$$

$$K = \frac{\log_e 2}{1600}$$

எனவே $t=100$ என்னும்போது

$$\frac{x}{x_o} = e^{\frac{-\log_e 2}{1600} \times 100}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{1600}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{16}}$$

$$\frac{x}{x_o} \times 100 = 100 \sqrt[16]{\tfrac{1}{2}}$$

$$= 100 \times \cdot 9576 = 95\cdot 76$$

$\therefore$ நூறாண்டுகளுக்குப்பின் உள்ள ரேடியம் $= 95\cdot 76\%$

எனவே தேய்வு அல்லது சிதைவு $= 4\cdot 24\%$

எடுத்துக்காட்டு 7: ஒரு வான்குடை மிதவை (Parachute) கொண்டு இறங்குபவன் (Parachutist), மிதவை திறக்கும்போது

விநாடிக்கு 4·4 மீ. வேகத்தில் இறங்கத்தொடங்குகிறான். காற்றெதிர்ப்பு (air resistance) $K^2\ Wv^2$ கி. கிராம் எடையில் $W=$ மனிதன், மிதவை இரண்டும் சேர்ந்த எடை (கி. கிராம் எடையில்); K என்பது ஒரு மாறிலி; v என்பது இறங்கும் வேகம். இறங்க ஆரம்பித்து t விநாடிகளில் அவன் இறங்கு வேகமென்ன?

மனிதன், மிதவை சேர்ந்த பொருண்மை (mass) $\frac{W}{g}$; முடுக்கம் $\frac{dv}{dt}$,

$$\text{எனவே } \frac{W}{g}\frac{dv}{dt} = W - K^2Wv^2$$

$$= W(1-K^2v^2)$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = g(1-K^2v^2)$$

தொகைகாணின்,

$$\int \frac{dv}{1-K^2v^2} = \int g\,dt + A$$

அதாவது,

$$\frac{1}{2K}\log\left(\frac{1+Kv}{1-Kv}\right) = gt + A \qquad \ldots\ldots(1)$$

கொடுக்கப்பட்டபடி, $t=0$ எனும்போது $v=4\cdot4$

$$\therefore \quad \frac{1}{2k}\log\left(\frac{1+kv}{1-kv}\right) = gt + \frac{1}{2k}\log\left(\frac{1+4\cdot4k}{1-4.4k}\right).$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2k}\log\left[\left(\frac{1+kv}{1-kv}\right)\times\left(\frac{1-4\cdot4k}{1+4\cdot4k}\right)\right] = gt \text{ என வரும்}$$

$$\therefore \quad \frac{1+kv}{1-kv} = \frac{1+4\cdot4k}{1-4\cdot4k}\,e^{2kgt}$$

$$= Ce^{2kgt} \text{ என எழுதலாம்.}$$

$$\therefore \quad \frac{(1+kv)-(1-kv)}{(1+kv)+(1-kv)} = \frac{Ce^{2kgt}-1}{Ce^{2kgt}+1}$$

$$\therefore \quad v = \frac{1}{k}\left[\frac{Ce^{2kgt}-1}{Ce^{2kgt}+1}\right]$$

எனப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8: புவிமையத்திலிருந்து s அடிகள் (feet) தூரத்திலுள்ள m என்ற பொருண்மைபெற்ற பொருள், புவிமையத்தை நோக்கி ஈர்க்கப்படும் விசை mக்கு நேர் விகிதத்திலும் s^2க்கு நேர்மாறு விகிதத்திலும் உள்ளது. புவியின் மேற்பரப்பிலிருந்து $5R$ அடி

$(R = 4000 \times 5280)$ தூரத்தில் உள்ள ஒரு பொருள் அமைதி நிலையிலிருந்து விழுந்து, பூமியின் மேற்பரப்பை அடையும்போது அதன் வேகம் என்னவிருக்கும்? கந்தழித் தூரத்திலிருந்து விழுமாயின் என்ன வேகமிருக்கும்? அதாவது என்ன வேகத்தில் ஒரு பொருளை வீசினால், அது புவியீர்ப்பு மண்டலத்தையே தாண்டிச் சென்றுவிடும்?

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டபடி, s தூரத்தில் ஈர்ப்பு விசை $f = \dfrac{Km}{s^2}$

K காண, $s = R$ எனும்போது, முடுக்கம் g அடி/வினாடி^{2}.

எனவே, $mg = \dfrac{Km}{R^2}$ அதாவது $K = gR^2$.

முற்பகுதியில் கொடுக்கப்பட்டபடி,

$$mf = m\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{ds} = \frac{-mgR^2}{s^2}.$$

அதாவது, $v\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{-gR^2}{s^2}$

அதாவது $vdv = \dfrac{-gR^2}{s^2} \cdot ds$ ......(1)

—அல்லது குறைக்குறியிட்டிருப்பதின் காரணம், s குறையும் போது, v மிகுகின்றது.

(1)இல் $v = 0,\ s = 5R$;

$v = v,\ s = R$

தொகை கண்டால்,

$$\int_0^v vdv = -gR^2 \int_{5R}^{R} \frac{ds}{s^2}$$ என வரும்.

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}v^2 = gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{5R}\right)$$

$$= \tfrac{4}{5}gR$$

$\therefore$ பூமியின் பரப்பின்மேல் விழும்போது

$v^2 = \frac{8}{5} \times 32 \times 4000 \times 5280$

$\therefore$ வேகம் $= 2560\sqrt{165}$ அடி/வினாடி

அல்லது ஏறத்தாழ 6·2 மைல்/வினாடி

இரண்டாம் பகுதியில்

$v = 0,\ s \to \infty$

$v = v,\ s = R$

என்ற இடைவெளிகளில் (1)க்குத் தொகை காணின்

$$\int_{0}^{v} v\,dv = -gR^2 \int_{\infty}^{R} \frac{ds}{s^2} \text{ எனவரும்.}$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}v^2 = gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\propto}\right)$$

$$= gR$$

$$v^2 = 2gR$$

$$= 2 \times 32 \times 4000 \times 5280$$

$$\therefore \quad v = 6400\sqrt{33}$$

$$\therefore \quad \text{வேகம்} = 6400\sqrt{33} \quad \text{அடி/விநாடி}$$

$$= 7\text{மைல்/விநாடி} \quad (\text{ஏறக்குறைய})$$

அதாவது 7 மைல்/விநாடி ,வேகத்தில் ஒரு பொருளை பூமியின் மேற் பரப்பிலிருந்து, செங்குத்துயர திசையில் எறிவோமானால் அது பூமிக்குத் திரும்பிவராது; அதாவது அது புவியீர்ப்பு விசை மண்டலத்தைத் தாண்டிச் சென்றுவிடும்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

நியூட்டனின் வெப்ப இழப்பு விதிப்படி (**Newton's law of cooling**) "உயர் வெப்பநிலையிலுள்ள ஒரு பொருளின் வெப்பமிழப்பு, அப்பொருளின் வெப்பநிலைக்கும், சுற்றுப்புற வெப்பநிலைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டிற்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும்." சுற்றுப்புற வெப்பநிலை 30°C ஆக இருக்கும் போது 100°C வெப்பநிலையிலுள்ள ஒரு பொருளின் வெப்பநிலை 15 நிமிடங்களில் 70°Cக்குக் குறைகிறது. எவ்வளவு நேரங் கழித்து, வெப்பநிலை 50°க்கு குறையும்?

t விநாடிகள் கழிந்த போது வெப்பநிலை T°C எனக்கொள்வோம். கணக்கில் கொடுத்தபடி,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-30)$$

$$\text{அதாவது } \frac{dT}{T-30} = -k\,dt$$

$$t=0,\ T=100\ ;\ t=900,\ T=70$$

என்ற இடைவெளிகளில் தொகை காணில்,

$$\int_{100}^{70} \frac{dT}{T-30} = -k\int_{0}^{900} dt$$

அதாவது $\log_e 40 - \log_e 70 = -900k = \log_e \frac{4}{7}$

$$\therefore \quad 900\,k = \log_e \tfrac{7}{4}$$
$$= \log_e 1{\cdot}75$$
$$\therefore \quad k = \frac{\log_e 1{\cdot}75}{900} \text{ எனவரும்.}$$

இப்போது $t=0,\ T=100;\ t=t,\ T=50$

என்ற இடைவெளிகளில் தொகை காணில்,

$$\int_{100}^{50} \frac{dT}{T-30} = -k \int_{0}^{t} dt$$

$$\log_e 20 - \log_e 70 = -\frac{\log_e 1{\cdot}75}{900}\,t$$

$$\therefore \quad 900 \log_e(\tfrac{7}{2}) = \log_e 1{\cdot}75\, t$$

$$t = \frac{900 \log_e(\frac{7}{2})}{\log_e 1{\cdot}75}$$

$\therefore$ கழிந்த காலம் $= 900 \times 2{\cdot}239$ விநாடிகள்

$= 33{\cdot}6$ நிமிடங்கள்.

பயிற்சி 10·2

1. ஒரு துகள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் ஓடுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில், அதன் வேகம், ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலிருந்து உள்ள தூரத்தைவிட 3 அலகுகள் அதிகம். ஆரம்ப வேகம் 5 அலகுகள் ஆனால், அதன் இயக்கச் சமன்பாடென்ன?

2. தொடர்ச்சியான கூட்டுவட்டி 10% வீதம் கூட்டும்போது எத்தனை ஆண்டுகளில் கடன் கொடுத்த முதல் இரட்டிக்கும் எனக் காண்க. $\left(\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{10}\right.$ எனக் கொள்க.$\left.\right)$

3. நியூட்டன் வெப்ப இழப்புவிதியின் அடிப்படையில், 30°C சுற்றுச் சூழலில் உள்ள ஒரு பொருள் 10 நிமிடங்களில் 100°Cஇலிருந்து 60°C வெப்பநிலைக்கு வருகிறது; 40 நிமிடங்களில் அதன் வெப்பநிலையென்ன?

4. ஒருவகைக் கிருமிகளின் வளர்ச்சி விகிதம் எ. கா. 2இல் கூறிய விதிக்குட் பட்டிருக்கிறது. ஒரு மணி நேரத்தில் கிருமிகளின் எண்ணிக்கை இரட்டித்தால் (1) 3 மணி நேரத்தில் (2) 6 மணி நேரத்தில் (3) 45 நிமிடங்களில் எவ்வளவு இருக்கும்?

5. ஒரு சதுரத்தொட்டி 180 செ.மீ. நீளம், 270 செ.மீ. உயரம்; 2·5 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டஓட்டை வழியாக தண்ணீர் வெளியேற முடியும். எவ்வளவு நேரத்தில் தண்ணீர் நிறைந்த தொட்டி முழுவதும் காலியாகும்? (எ. கா. 4இல் உள்ளபடி வெளியேறும் வேகம் $4{\cdot}8\sqrt{30h}$ செ.மீ./விநாடி)

6. ஒரு உருளைவடிவமான தொட்டியின் ஆரம் 64 செ.மீ., உயரம் 400 செ.மீ. 2 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்ட ஓட்டைவழியாக தண்ணீர் வெளியேற முடியும். எவ்வளவு நேரத்தில் தண்ணீர் நிறைந்த தொட்டி முழுவதும் காலியாகும்? (எ. கா. 4இல் உள்ளபடி வெளியேறும் வேகம் $4{\cdot}8\sqrt{30h}$ செ.மீ./விநாடி)

7. எ. கா. 8இல் பொதுவாக ஒரு பொருள் பூமியின் பரப்பிலிருந்து செங்குத்தாக V என்ற வேகத்தோடு வீசி எறியப்படுமானால், (அதாவது $s=0$ எனும்போது $v=V$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்) $v^2=\dfrac{2gR^2}{s}+(V^2-2gR)$ என நிறுவுக. நிறுவியபின், s கந்தழி எல்லையை நெருங்கும்போது, $v>0$ஆக இருக்கவேண்டுமாயின் $V^2\geqslant 2gR$ஆக இருக்கவேண்டுமென நிறுவுக; இந்தக் கட்டுப்பாட்டில், $g=32$ அடி/விநாடி^{2}; $R=4000$ மைல் என ஈடுசெய்து, Vஇன் மீச்சிறு மதிப்பையறிக. எ. கா. 8இல் கண்ட கட்டுப்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

8. எ. கா. 8இல், ஒரு பொருள் h என அளவிட்ட மிகமிக உயரத்திலிருந்து விழுமானால், அது பூமியைச் சேரும்போது பெற்றிருக்கும் வேகம் $\sqrt{\dfrac{2ghR}{(R+h)}}$ என நிறுவுக.

9. ஒழுங்கான குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு (cross sectional area) A உள்ள ஒரு தொட்டியில் AH (Volume) தண்ணீர் இருக்கிறது. குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு a அளவுள்ள ஒரு ஓட்டைவழியாகத் தண்ணீர் வெளியேறுகிறது. தொட்டியில் h உயரம் தண்ணீர் இருக்கும்போது, வெளியேறு வேகம் $\sqrt{2gh}$ என ஏற்று $A\dfrac{dh}{dt}=-a\sqrt{2gh}$ என்ற சமன்பாட்டினைப் பெறுக. தண்ணீர் முழுவதும் வெளியேற எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் $\dfrac{2AH}{a\sqrt{2gh}}$ என்ற பொது வாய்பாட்டினை நிறுவுக.

10. ஓர் ஒழுங்கான குழாயின் உள், வெளி ஆரங்கள் முறையே a, b அதனுள்ளே ஒரு திரவப்பொருள் T_1°C என்ற வெப்பநிலையில் இருத்தப்பட்டிருக்கிறது. வெளிப்புறம் T_0°C $(<T_1)$ வெப்பநிலையில் இருத்தப்பட்டிருக்கிறது. அக்குழாயின் வெப்பங் கடத்துதிறன் K; குழாய்

அச்சிலிருந்து r தூரத்தில் வெப்பநிலை T ஆனுல் வெளியேறு வெப்ப ஓட்டம் Q என்பது $-2\pi r K\left(\frac{dT}{dr}\right)$ என நிறுவுக.

அவ்வழியாக, மாருநிலையில்,

(i) $Q \log_e\left(\frac{b}{a}\right)=2\pi K\,(T_1-T_0)$ எனவும்

(ii) $\frac{T_1-T}{T_1-T_0}=\log_e\left(\frac{r}{a}\right)\div\log_e\left(\frac{b}{a}\right)$ எனவும் நிறுவுக.

(எ. கா. 3இல் காண்க.)

11. சென்ற கணக்கில் $a=10$ செ.மீ.; $b=16$ செ.மீ.; $k=0{\cdot}0003$ $T_1=200°C$, $T_0=30°C$ எனக் கொண்டு $Q=0{\cdot}6814$ கலோரி/விநாடி எனவும் ஒரு மீட்டர் நீளத்திற்கு ஒரு மணி நேரத்தில் கடத்தப்படும் வெப்பம், ஏறக்குறைய 245,000 கலோரிகளெனவும் நிறுவுக.

12. m அளவு பொருண்மையுள்ள ஒரு உந்து கூண்டு (அல்லது ஏவுகணை Rocket) செங்குத்தாக v என்ற வேகத்தோடு ஏவப்படுகிறது; அதன் பின்புறத்திலிருந்து u சார்வேகத்தில் எரிந்த பொருள் பின் தள்ளப்படுகிறது. காற்றெதிர்ப்பு ஏதுமில்லை யெனக்கொண்டு $m\frac{dv}{dt}+u\frac{dm}{dt}=-mg$ என நிறுவுக. ஆரம்பத்தில் ஏவுகணையின் பொருண்மை M; t விநாடிகளுக்குப் பின்பு அதன் பொருண்மை $M-ct$; T விநாடிகள் அது எரிகிறது; T விநாடிகளில் அது பெறும் வேகம், $u\,log\left(\frac{M}{M-ct}\right)-gT$ என நிறுவுக.

(உந்து கூண்டு - அகளரிபொருளாற்றலால் தொலைக்கு அல்லது உயரத்திற்கு உந்தப்படும்)

13. ஒரு புனல் (funnel) மேல்விட்டம் 10 அங்குலம், கீழ்விட்டம் 1 அங்குலம், உயரம் 24 அங்குலம் உள்ளது. அது நிறையத் தண்ணீரிருந்தால் அது காலியாக ஏறக்குறைய 13·7 விநாடிகளாகுமென நிறுவுக. (வெளியேறு வேகம் $4{\cdot}8\sqrt{h}$ அடி/விநாடி)

விடைகள்

பயிற்சி 10·2

1. $s=5e^t-3$. 2. 6·93 ஆண்டுகள். 3. 25°C.

4. (i) 8 மடங்கு; (ii) 64 மடங்கு; (iii) 1·682 மடங்கு

5. 34 நி. 15 வி. 6. 26 நி. 7. $V \geqslant 6{\cdot}96$ மைல்/விநாடி.

கலைச்சொற்கள்

A

Absolute — தனி
Absolute Value — தனி/மட்டுமதிப்பு
Absolute Error — தனி/மட்டுப் பிழை
Acceleration — முடுக்கம்
Acceleration due to gravity — புவிஈர்ப்பு முடுக்கம்
Accurate — மிகச் சரியான
Ad Infinitum — முடிவின்றி
Add — கூட்டு
Addition — கூட்டல்
Adjacent — அடுத்துள்ள
Admissible solution — ஏற்கத்தக்க தீர்வு
Air resistance — காற்றெதிர்ப்பு, காற்றுத் தடை
Algebra — இயற் கணிதம்
Algebraic Expression — இயற் கணிதக் கோவை
Algebraic function — இயற் கணிதச் சார்பு
Algebraic identity — இயற் கணித முற்றொருமை
Algebraic operator — இயற் கணிதச் செயலி
Algebraic symbol — இயற் கணிதக் குறி
Alternate — ஒன்றுவிட்ட
Analysis — பகுப்பாய்வு, பகுவியல்
Analytic function — பகுமுறைச் சார்பு
Analytic method — பகுமுறை
Angle — கோணம்
Angle of inclination — சாய்வு, சாய்வுக் கோணம்
Answer — விடை
Antilogarithm — எதிர்மடக்கை, இனமடக்கை
Applied mathematics — பயன்முறைக் கணிதம்
Approximate — தோராயமான, ஏறக்குறைய, ஏறத்தாழ
Approximate value — தோராய மதிப்பு
Arbitrary ஏதாமொரு, யாதாமொரு
Arbitrary constant — ஏதாமொரு (யாதாமொரு) மாறிலி
Arc — வில்

Argument of a function — சார்பின் மாறி
Asymptote — ஈற்றணுகி, கந்தழித்தொடு வரை, கந்தழித் தொடு கோடு
Atmosphere — வளி மண்டலம்
Attraction — கவர்ச்சி, ஈர்ப்பு
Auxiliary Equation — துணைச் சமன்பாடு
Auxiliary function — துணைச் சார்பு
Auxiliary series — துணைத் தொடர்
Auxiliary solution — துணைத் தீர்வு
Axes of co-ordinates — கிடை, நிலை அச்சுகள், ஆய அச்சுகள், ஆயங்கள், x, y அச்சுகள்
Axis — அச்சு, ஆயம்

B

Bacteria — கிருமிகள்
Beam — வளை, உத்திரம்
Binomial — ஈருறுப்பு
Binomial co-efficient — ஈருறுப்புக் கெழு
Bisect — இருசமக் கூறிடு
Bisector — இருசம வெட்டி
Body — பொருள்

C

Calculate — கணக்கிடு
Calculation — கணக்கீடு, கணிப்பு
Calculus — நுண் கணிதம்
Calculus differential — வகை நுண்கணிதம்
Calculus integral — தொகை நுண்கணிதம்
Cancel — நீக்கு
Capacity — கொள்ளளவு
Cardioide — நெஞ்சுவளை
Case — வகை
Case, general — பொதுவகை
Case, particular — குறிப்பிட்ட வகை
Case, Singular — தனிச் சிறப்பு வகை
Case, Special — சிறப்பு வகை
Centre — மையம்
Centre of curvature — வளைவு மையம்

Centre of gravity — புவியீர்ப்பு மையம்
Centre of mass — பொருண்மை மையம்
Cipher — பூச்சியம்
Circle — வட்டம்
Circle of curvature — வளைவு வட்டம்
Circular function — வட்டச் சார்பு
Circular measure — வட்ட அளவை
Co-efficient — கெழு
Co-efficient differential — வகைக்கெழு
Co-efficient partial differential — பகுப்பு வகைக்கெழு
Co-efficient successive — அடுத்தடுத்த வகைக்கெழு
Co-efficient Total differential — கூடிய (முற்று) வகைக்கெழு
Coincide — பொருந்து, ஒன்றுபடு
Compare — ஒப்பிடு
Comparison — ஒப்பீடு
Complete integral — முழுத்தீர்வு, முழுத்தொகை
Complete primitive — முற்றிய மூலி, முழு முதற் சார்பு
Complex root — சிக்கல் மூலம், சிக்கல் தீர்வு
Complementary function — துணைச்சார்பு, துணைத்தீர்வு
Concentric — ஒருமைய, பொதுமையமுள்ள
Concentric circle — ஒருமைய வட்டங்கள்
Conclusion — முடிவு
Cone — கூம்பு
Confocal conics — பொதுக் குவிய கூம்புவளைவுகள்/வெட்டுகள்
Conic — கூம்புவளைவு/வெட்டு
Conic section — கூம்பின் வெட்டு முகக் கோடு
Conjugate roots — இணைமூலங்கள்
Constant (adjective) — மாறா
Constant (noun) — மாறிலி
Constant arbitrary — ஏதாமொரு/யாதாமொரு மாறிலி
Contact — தொடுகை
Contiguous — அருகமைந்த
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous — தொடர்ச்சியான
Continuous curve — தொடர் வரை

Continuous function — தொடர்ச்சியான சார்பு
Continuous variable — தொடர் மாறிலி
Convention — மரபு
Converse — மறுதலை
Conversely — மறுதலையாக
Co-ordinates — ஆயத் தொலைகள்
Co-ordinates polar — போலர் ஆயத்தொலைகள்
Co-ordinates Rectangular — செங்குத்தச்சு ஆயத் தொலைகள்
Cross-section — குறுக்கு வெட்டுமுகம்
Cross-section uniform — ஒழுங்கான குறுக்கு வெட்டு முகம்
Cross-sectional area — குறுக்கு வெட்டு முகப்பரப்பு
Curvature — வளைவு
Curvature, centre of — வளைவு மையம்
Curvature, circle of — வளைவு வட்டம்
Curvature, radius of — வளைவாரை
Curve — வளைவு, வளைகோடு, வளைவரை
Curves, family of — வளைவரைக் குடும்பம்

D

Damped Harmonic motion — தணித்த இசையியக்கம்
Damped Oscillations — தணித்த அலைவுகள்
Damped Vibrations — தணித்த அதிர்வுகள்
Definite — வரையறுத்த, குறிப்பிட்ட
Definite Integral — வரையறுத்த தொகை(யீடு)
Definite Integration — வரையறுத்த தொகை காணல் தொகையீடு செய்தல்
Degree (angle) — பாகை (கோணம்)
Degree of a differential equation — வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுப் படி
Density — அடர்த்தி
Dependent — சார்ந்த
Dependent function — சார் சார்பு
Dependent variable — சார்புடை மாறி
Derivative — வகைக்கெழு (வாகப்பெறுதி)
Derived — வழிவந்த
Derived equation — வழிச் சமன்பாடு
Derived function — வழிச் சார்பு
Describe — வரை, விளக்கிக்கூறு

Determinant	—	அணிகோவை
Determinant, element of	—	அணிகோவையின் மூலகம்
Diagonal	—	மூலைவிட்டம்
Diagram	—	வரிப்படம், விளக்கப்படம்
Diameter	—	விட்டம்
Difference	—	வேறுபாடு
Differentiable	—	வகைக்கெழு காணத்தக்க
Differential	—	வகையீடு, வகையீட்டு நுண் எண்
Differential calculus	—	வகைநுண் கணிதம்
Differential equation	—	வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Differential, degree of	—	வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுப் படி
Differential, order of	—	வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டு வரிசை
Differential partial	—	பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Direct proportion	—	நேர்விகிதம்
Direction	—	திசை
Directrix	—	இயக்குவரை
Discontinuous	—	தொடர்ச்சியில்லாத
Discontinuous function	—	தொடர்ச்சியற்ற சார்பு
Discriminant	—	தன்மை காட்டி
Displacement	—	இடப்பெயர்ச்சி
Distance	—	தூரம்
Distance perpendicular	—	செங்குத்துத் தூரம்
Domain	—	அரங்கம்

E

Earth	—	பூமி, புவி
Earth's attraction	—	புவியீர்ப்பு
Eliminant	—	நீக்கற்பலன், நீக்குறு
Eliminate	—	நீக்கு
Elimination	—	நீக்கல், விலக்கல்
Ellipse	—	நீள்வட்டம்
Envelope	—	தொடு வளைவரை
Equiangular	—	சமக்கோண
Equiangular spiral	—	சமகோணச்சுருள்
Equiangular triangle	—	சமகோண முக்கோணம்
Equidistant	—	சமதூரமான

Equilateral	— சமபக்க
Equilateral triangle	— சமபக்க முக்கோணம்
Equivalent	— சமம், ஒத்த, பொருத்தமான
Equivalent equation	— ஒத்த (பொருந்திய) / பொருத்தமான சமன்பாடு
Evaluate	— மதிப்பிடு
Evolute	— வரை செங்கோட்டுத் தழுவி வெளிச்சுருள்
Exact	— திருத்தமான
Exact differential	— பொருத்தமான வகைக்கெழு
Exact differential equation	— பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

F

Factor	— சினை, காரணி
Factor common	— பொதுச் சினை, பொதுக் காரணி
Factorisation	— காரணிப்படுத்தல்/காணல்
Foci	— குவியங்கள்
Foci conjugate	— இணைக் குவியங்கள்
Focus	— குவியம்
Force	— விசை
Form	— வடிவம், உருவம், அமைப்பு
Form Standard	— திட்டமான அமைப்பு
Formula	— வாய்பாடு; சூத்திரம்
Function	— சார்பு
Function Algebraic	— இயற்கணிதச் சார்பு
Function Auxiliary	— துணைச் சார்பு
Function Explicit	— வெளிப்படைச் சார்பு
Function Homogeneous	— சமபடிச் சார்பு, ஒருபடித்தான சார்பு
Function Implicit	— உட்படு சார்பு
Function Inverse	— நேர்மாறு சார்பு
Function Polynomial	— பல்லுறுப்புச் சார்பு
Functional Relation	— சார்புடைத் தொடர்பு

G

Generalisation	— பொதுவுரை, பொதுவிதி
Generalise	— பொதுவிதி காண்
General	— பொதுவான

Geometry — வடிவ கணிதம்
Geometry Analytical — இயல்முறை வடிவ கணிதம்
Gradient — சரிவு, சாய்வு விகிதம்
Gradient of a curve — வளைகோட்டுச் சரிவு
Gravitation — ஈர்ப்பு
Gravity — புவியீர்ப்பு

H

Height — உயரம்
Height of an arc — வில்லின் உயரம்
Hyperbola — அதிபரவளைவு
Hypoteneuse — செம்பக்கம்

I

Identical — சர்வசம
Identity — முற்றொருமை
Imaginary — கற்பனையான, மெய்யிலா
Imaginary root — கற்பனைத் தீர்வு/மூலம்
Inclination — சாய்வு
Indefinite — வரையறுக்கப்படாத
Indefinite Integral — வரையறாத தொகை(யீடு)
Independent — சாராத, சார்பற்ற, சார்பிலா
Independent Variable — சாராமாறி
Indeterminate — தேரப் பெறாத, தேரா
Indeterminate quantity — தேராக் கணியம்
Infinite — முடிவிலா, கந்தழி
Infinite Integral — கந்தழி எல்லைத்தொகை
Infinite simal — நுண்ணெண்
Infinity — முடிவிலி, கந்தழி, எண்ணிலி
Initial — தொடக்கத்திலுள்ள
Initial line (Polar Co ordinate) — ஆதிக்கோடு
Initial velocity — தொடக்க / ஆரம்ப வேகம்
Instant — கணம்
Integer — முழு எண்
Integral — தொகை
Integral Calculus — தொகை நுண் கணிதம்
Integral Definite — வரையறுத்த தொகை

Integrand — தொகைச் சார்பு
Integrate — தொகைகாண்
Integrating Factor — தொகையீட்டுக் காரணி, தொகைக் காரணி, தொகை காண் காரணி
Integration — தொகையிடல்/காணல்
Intercept — வெட்டுத்துண்டு
Intersect — வெட்டு
Interval — இடைவெளி
Intrinsic equation — உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு
Invariable — மாறாத, மாற்றமில்லாத
Involute — உட்சுருள்
Irrational — அளவுக்கிணங்காத, விகிதமுறாத
Irregular — ஒழுங்கற்ற
Isosceles — இருசம
Isosceles trapezium — இரு சமபக்கச் சரிவகம்
Isosceles triangle — இரு சமபக்க முக்கோணம்
Item — உறுப்பு

J

Joint — கூட்டு

K

Kilogram — கிலோ கிராம்
Kilometre — கிலோ மீட்டர்

L

Lakh — இலட்சம்
Latus-rectum — செவ்வகலம்
Law — விதி
Limit — எல்லை
Limited — எல்லைக்குட்பட்ட
Line — கோடு, வரி, வரை
Line curved — வளைகோடு
Line horizontal — கிடைக்கோடு
Line Straight — நேர்க்கோடு
Line Vertical — நிலைக்குத்துக் கோடு

Linear — ஒருபடிக்குரிய
Linear differential equation — ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Locus — இயங்கு வழி, இயங்கு பாதை
Logarithm — மடக்கை
Logarithm common — பொது மடக்கை
Logarithm Naperian — நேப்பியரின் மடக்கை

M

Magnitude — பருமன், அளவு
Mass — பொருண்மை, திணிவு, நிறை
Mass, centre of — $\frac{\text{பொருண்மை}}{\text{திணிவு}}$ மையம்
Mathematics — கணிதம்
Maximum — மீப்பெரு
Maximum value — மீப்பெரு மதிப்பு
Measure — அளவு, அளவை
Mechanics — நிலையியக்கவியல், இயந்திரவியல்
Method — வழி, செய்முறை
Metre — மீட்டர் (மீ)
Metre centi — சென்டி மீட்டர் (செ.மீ.)
Middle — நடுவான, மையமான
Minimum — மீச்சிறு
Minimum value — மீச்சிறு மதிப்பு
Minus — கழி, குறை
Minute (angle) — கலை (கோணம்)
Minute (Time) — நிமிடம் (நேரம்)
Modulus — மட்டு மதிப்பு, எண்ணளவு
Motion — இயக்கம்
Multiple — மடங்கு
Multiple roots — மடங்கு தீர்வுகள்/மூலங்கள்

N

Newton's Law of cooling — நியூட்டனின் வெப்ப இழப்பு விதி
Newton's laws of motion — நியூட்டனின் இயக்க விதிகள்
Nodal Locus — கணுவியங்கு பாதை, கணுவொழுக்கு

Node — கணு, சந்திப்புள்ளி, பிரிமுனை, கோள் சந்தி
Non-homogeneous — ஓரினமில்லாத, சமபடியில்லாத
Non-Linear — ஒருபடி யில்லாத
Normal — செங்கோடு
Normal to a curve — வரைச் செங்கோடு
Notation — குறியீடு, குறியீட்டு முறை
Number — எண்
Number Imaginary — கற்பனை எண்
Number Irrational — அளவுக்கிணங்காத எண், விகிதமுரு எண்
Number Rational — அளவுக்கிணங்கிய எண், விகிதமுறு எண்

O

Object — பொருள்
Operation — செயல், செய்கை
Operation Mathematical — கணிதச் செயல்/செய்கை
Operator — செயலி
Operator differential — வகைக்கெழுச் செயலி
Opposite — எதிரான
Order — வரிசை
Order of a differential equation — வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டு வரிசை
Ordinary — சாதாரண, பொதுவான
Ordinate — குத்தாயம், நிலைத்தூரம்
Origin — ஆதி
Orthogonal — செங்குத்தான
Orthogonal Trajectory — செங்கோண வெட்டுவரை, செங்குத்து வெட்டுவரை
Oscillation — அலைவு, ஊசல்
Oscillation Damped — குறைந்த அலைவு
Oscillation forced — வலிந்த அலைவு
Osculating curve — கொஞ்சுவளை கோடு
Osculating plane — கொஞ்சு தளம்

P

Parabola — பரவளைவு

Parachute	— வான்குடை, மிதவை
Parallel	— ஒருபோகு, இணை
Parallel curves	— இணையான வளைவரைகள்
Parallel lines	— இணைக்கோடுகள்
Parameter	— சாராமாறி, துணையலகு
Parameters, Variation of	— சாராமாறி மாற்றம்
Parameters, Method of, Variation of	— சாராமாறி முறை
Part	— பகுதி
Partial	— பகுதிக்குரிய
Partial Derivative	— பகுதிவகைக்கெழு
Partial fractions	— பகுதிப்பின்னங்கள்
Partial differential co-efficient	— பகுதிவகைக்கெழு
Partial differential equation	— பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Particular	— குறிப்பிட்ட, சிறப்பான
Particular integral	— சிறப்புத்தீர்வு/தொகை
Particular solution	— சிறப்புத்தீர்வு
Path	— வழி, பாதை
Path of a projectile	— எறிபொருட்பாதை
Perimeter	— சுற்றளவு
Perpendicular	— செங்குத்தான, செங்குத்து
Point	— புள்ளி
Point fixed	— நிலைத்தபுள்ளி
Point focal	— குவியப்புள்ளி
Point Nodal	— கணுப்புள்ளி
Point Stationary	— கண நிலைப்புள்ளி
Point Turning	— திரும்பற்புள்ளி
Pole	— முனை, துருவம்
Pole (polar co-ordinates)	— ஆதிப்புள்ளி
Pressure	— அழுத்தம்
Primitive	— மூலம், முதற் சார்பு; மூலச் சார்பு
Primitive complete	— முழு முதற் சார்பு, முழு மூலச் சார்பு, முழு மூலம்
Primitive of a differential Equation	— வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் முதல் / மூலச் சார்பு

Property — தன்மை, பண்பு
Proportion — விகித சமம், விகிதப் பொருத்தம்
Proportion Direct — நேர்விகிதப் பொருத்தம்
Proportion Inverse — நேர்மாறு விகிதப்பொருத்தம்

Q

Quadratic Equation — இருபடிச் சமன்பாடு
Quadratic Expression — இருபடிக் கோவை
Quantity — கணியம்
Quantity known — தெரிந்த கணியம்
Quantity unknown — தேராக் கணியம்
Quotient — ஈவு

R

Radian — ஆரையன்
Radian measure — ஆரையன் அளவு (வை)
Radius — ஆரம்
Range — இடைவெளி, வீச்சம்
Rate — வீதம்
Ratio — விகிதம்
Ratio direct — நேர்விகிதம்
Ratio inverse — நேர்மாறு விகிதம்
Rational — அளவுக்கிணங்கிய, விகிதமுறு
Rational number — அளவுக்கிணங்கிய எண்
Rectangle — செவ்வகம்
Rectangular hyperpola — செவ்வக அதிபரவளைவு
Regular — ஒழுங்கான
Relation — தொடர்பு
Relative — சார், சாருகின்ற
Relative acceleration — சார் முடுக்கம்
Relative motion — சாரியக்கம்
Relative velocity — சார்வேகம்
Resistance — தடை, எதிர்ப்பு
Right angle — செங்கோணம்
Rocket — உந்து கூண்டு
Root — மூலம், தீர்வு
Rule — விதி

S

Second (angle) — விகலை
Second (time) — விநாடி
Sector — வட்டக் கோணப் பகுதி
Segment — துண்டு
Shape — உரு
Shortest distance — மீச்சிறு தூரம்
Side — பக்கம்
Simultaneous equations — ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள்
Simultaneous differential equations — ஒருங்கமை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்
Singular — தனிச் சிறப்பான
Singular point — தனிச் சிறப்புப் புள்ளி
Singular solution — தனிச் சிறப்புத் தீர்வு
Solution — தீர்வு
Solution admissible — ஏற்கத் தக்கத் தீர்வு
Solution general — பொதுத் தீர்வு
Solution particular — சிறப்புத் தீர்வு
Solution singular — தனிச் சிறப்புத் தீர்வு
Solve — தீர்
Sphere — கோளம்
Spiral — சுருளி
Spiral equiangular — சமகோணச் சுருளி
Square — வர்க்கம், சதுரம்
Standard — திட்டமான
Standard form — திட்ட அமைப்பு
Structure — அமைப்பு
Sub-normal — செங்கோட்டடி
Sub-tangent — தொடு கோட்டடி
Substitute — பிரதியிடு, ஈடுசெய்
Successive — தொடர்ந்து, அடுத்தடுத்த
Successive differentiation — தொடர் வகைக்கெழு காணல்
Successive integration — தொடர் தொகை காணல்
Sum — கூட்டுத் தொகை
Surface — மேற் பரப்பு
Surface curved — வளைபரப்பு
Symbol — குறியீடு
Symmetry — சமச்சீரான
Symmetry, Axis of — சமச்சீரச்சு

T

Table	— வாய்பாடு, அட்டவணை
Tangent (geometry)	— தொடுகோடு/வரை
Tangent (Trigonometry)	— கோணக் கணிதத் தகவு, இருக்கை
Term	— உறுப்பு
Theorem	— தேற்றம்
Theoretical	— அறிமுறைக்குரிய
Theoretical Proof	— அறிமுறை நிறுவல்
Theory	— கொள்கை, அறிமுறை
Thermal capacity	— வெப்பக் கொள்ளளவு
Thermal conductivity	— வெப்பங் கடத்துத்திறன்
Thickness	— தடிப்பு, மொத்தம்
Thin	— மெல்லிய
Time	— நேரம்
Trajectory	— சமவெட்டு வளைவரை
Trajectory ω	— ω-சமவெட்டு வளைவரை
Trajectory orthogonal	— செங்கோணவெட்டு வளைவரை

U

Uniform	— ஒரு சீரான, மாறாத
Uniform velocity	— சீரான வேகம், மாறாத வேகம்
Unknown	— தெரியாத
Unlike	— ஒவ்வாத
Unlimited	— எல்லையில்லாத

V

Value	— மதிப்பு, பெறுமானம்
Value Absolute	— மட்டு மதிப்பு, தனிப் பெறுமானம்
Value approximate	— தோராய மதிப்பு
Value maximum	— மீப்பெரு மதிப்பு
Value minimum	— மீச்சிறு மதிப்பு
Vanish	— மறைதல்
Variable	— மாறி
Variable dependent	— சார்புடை மாறி
Variable independent	— சார்பில் மாறி
Variable parameter	— மாறும் சாராமாறி
Variable point	— மாறும் புள்ளி

Variate — மாறி
Variation — மாறல், மாறுபாடு, மாற்றம்
Variation of parameters — சாராமாறி மாற்றம்
Volume — கன அளவு, பருமம்

W

Weight — எடை
Width — அகலம்

X

x-axis — x-அச்சு

Y

y-axis — y-அச்சு

Z

Zero — பூச்சியம்

புத்தகப் பட்டியல்

1. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்—கொள்கையும் கணக்குகளும்
   —ஏயரஸ், F.

   Theory and Problems of Differential Equations
   —*Ayres F.*

2. வகைநுண்கணிதம்
   —எட்வார்டஸ்

   Differential Calculus
   —*Edwards*

3. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் பற்றிய ஆய்வு நூல்
   —ஃபார்ஸித்

   A Treatisen o Differential Equations
   —*Forsyth*

4. தொகைநுண்கணிதம் (தமிழில்)
   —Govindarajan

5. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்
   —ஜான்ஸன்

   Differential Equations
   —*Johnson*

6. பொறியியல், விஞ்ஞான மாணவர்களுக்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்
   —லாம்பே, டிரான்டர்

   Differential Equations for Engineers and Scientists
   —*Lambe and Tranter*

7. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்
   —மர்ரே

   Differential Equations
   —*Murray*

8. தொகைநுண்கணிதம்
   —பிரசாத், கோரக்

   Integral Calculus
   —*Prasad, Gorakh*

9. கனவடிவ கணிதம்
   —ஸ்மித், C.

   Solid geometry
   —*Smith, C.*

10. தொகைநுண்கணிதம்
    —வில்லியம்ஸன்

    Integral Calculus
    —*Williamson*