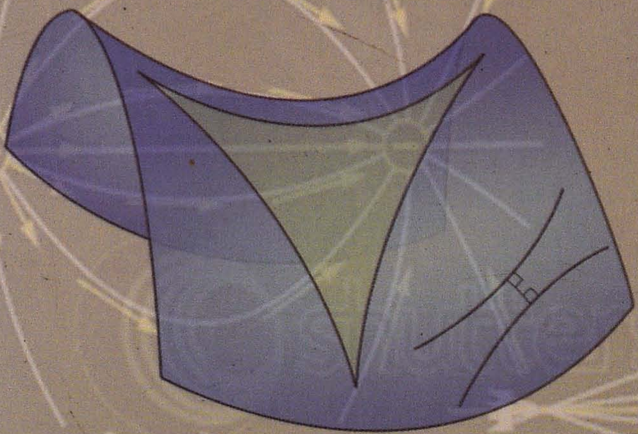
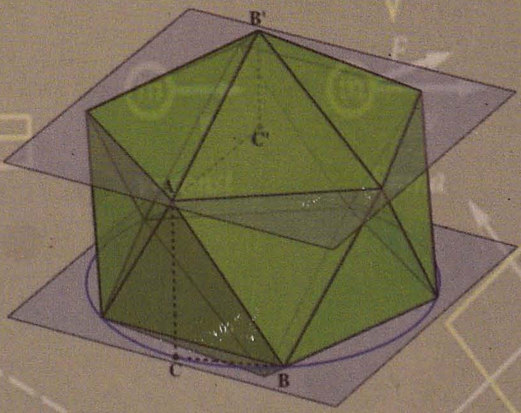
கணித இயற்பியல்

பகுதி-II





O. ராஜகோபாலன்

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
காமராஜர் சாலை, சென்னை-600 005.

கணித இயற்பியல்

பகுதி - 2

O.ராஜகோபாலன்
இயற்பியல் பேராசிரியர் (பணி நிறைவு)
43, ஆல்பா நகர், மூன்றாம் தெரு,
கருமண்டபம், திருச்சி - 620 001.

TAMILNADU STATE COUNCIL FOR HIGHER EDUCATION
RELEVANCE AND EXCELLENCE

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
விலிங்டன் சீமாட்டி கல்லூரி வளாகம்
காமராசர் சாலை, சென்னை - 600 005

முதற் பதிப்பு : 2011

பதிப்புரிமை : தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை–600 005

நூலின் பெயர் : கணித இயற்பியல்–2

நூலாசிரியர் : முனைவர் O. இராஜகோபாலன்,
இயற்பியல் பேராசிரியர் (ஓய்வு),
43, அல்பா நகர், 3ஆவது தெரு,
கருமண்டபம்,
திருச்சிராப்பள்ளி–630 001

மறு ஆய்வு செய்தவர் : முனைவர் ஆர். சபேசன்,பேராசிரியர்,
துறைத் தலைவர் (ஓய்வு),
இயற்பியல் துறை,
அழகப்பா பல்கலைக்கழகம்,
காரைக்குடி–630 003

தமிழ் திருத்தம் செய்தவர் : முனைவர் வி. ஈசுவரன்,
முதுநிலை விரிவுரையாளர், தமிழ்த்துறை,
அ.மா.ஜெயின் கல்லூரி,
சென்னை–600 114

விலை : ரூ. 85.00

அச்சிட்டோர் : பாவை பிரிண்டர்ஸ் (பி) லிட்.,
142, ஜானி ஜான்கான் சாலை,
இராயப்பேட்டை, சென்னை-600 014.
தொ.பே. 28482441, 28482973

பொருளடக்கம்

1.சிறப்புச் சார்புகள்		பக்கம்
1 .1	காமா மற்றும் பீட்டா சார்புகள் - முன்னுரை	1
1.2	காமா சார்புகள்	1
1.3	காமா சார்பின் நிலை மாற்றங்கள்	8
1.4	பீட்டா சார்புகள்	10
1.5	இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்	18
1.6	சிறப்புப் புள்ளிகள்	19
1.7	தொடர் தீர்வுகள் - ஃபுரோபீனியஸ் முறை	20
1.8	லெஜண்டர் வகைக்கெழு சமன்பாடு	21
1.9	லெஜண்டர் பல்லுறுப்பின் ரோட்ரிக் வாய்பாடு	27
1.10	லெஜண்டர் பல்லுறுப்பின் பிறப்பிக்கும் சார்பு	29
1.11	லெஜண்டர் பல்லுறுப்புகளின் செங்குத்துத்தன்மை	32
1.12	$P_n(x)$ இன் மடங்குகின்ற தொடர்புகள்	36
1.13	லெஜண்டர் பல்லுறுப்புகள்	40
1.14	தொடர்பு கொண்ட லெஜண்டர் சார்புகள்	43
1.15	பெசலின் வகைக்கெழு சமன்பாடு	46
1.16	பிறப்பிக்கும் சார்பு	50
1.17	பெசல் சார்புகளின் செங்குத்துத்தன்மை	51
1.18	$J_n(x)$ இன் மடங்குகின்ற தொடர்புகள்	53
1.19	ஹெர்மைட் சார்புகள்	60

1.20 ஹெர்மைட் பல்லுறுப்பின் பிறப்பிக்கும் சார்பு 64

1.21 ஹெர்மைட் பல்லுறுப்புகளின் ரோட்ரிக் வாய்பாடு 65

1.22 ஹெர்மைட் பல்லுறுப்பின் செங்குத்துப் பண்பு 66

1.23 ஹெர்மைட் பல்லுறுப்பின் மடங்குகின்ற பண்புகள் 68

1.24 ஹெர்மைட்டின் சில பல்லுறுப்புகள் 70

1.25 லாகர் பல்லுறுப்புகள் 77

1.26 லாகர் பல்லுறுப்பின் ரோட்ரிக் வாய்பாடு 79

1.27 லாகர் பல்லுறுப்பின் பிறப்பிக்கும் சார்பு 80

1.28 லாகர் பல்லுறுப்பின் செங்குத்துப்பண்பு 82

1.29 லாகர் பல்லுறுப்பின் மடங்கும் தொடர்புகள் 84

1.30 சில லாகர் பல்லுறுப்புகள் 85

1.31 ஸ்டூம் - லியோலி வகைக்கெழு சமன்பாடு 89

1.32 டிராக்டெல்டா சார்பு 91

<u>2. கலப்பினப் பகுப்பாய்வு</u>

2.1 கலப்பின எண்கள் 97

2.2 கலப்பின எண்களின் சமத்துவம் 97

2.3 ஆர்கன்ட் வரைபடம் 100

2.4 எண்ணளவு மற்றும் கோண வீச்சம் 100

2.5 கலப்பின மாறியின் சார்புகள் 104

2.6 விளக்கங்கள் 105

2.7 காஷி - ரீமான் சமன்பாடுகள் 108

2.8 ஒரு சார்பு f(z) பகுமுறை சார்பாக இருப்பதற்குப் போதுமான நிபந்தனைகள் 111
2.9 காஷி - ரீமான் சமன்பாடுகளின் கோண தூர வடிவம் 113
2.10 கலப்பினத் தொகையீடு 123
2.11 எளிதாக இணைக்கப்பட்ட மண்டலம் 131
2.12 காஷியின் தொகை தேற்றம் 131
2.13 காஷியின் தொகை தேற்றத்தைப் பல் இணைப்பு மண்டலங்களுக்கும் விரிவாக்குதல் 134
2.14 காஷியின் தொகை வாய்பாடு 135
2.15 டெய்லர் தேற்றம் 144
2.16 லாரன்ட் தேற்றம் 153
2.17 சிறப்புப்புள்ளி 161
2.18 m வரிசை முனைவு 162
2.19 எச்சம் 163
2.20 எச்சத்தேற்றம் 169

<u>3. தொகை நிலைமாற்றங்கள்</u>

3.1 ஃபூரியர் தொடர் 175
3.2 டிரிஷ்லெட் நிபந்தனைகள் 180
3.3 ஃபூரியர் சைன் மற்றும் கொசைன் தொடர்கள் 182
3.4 கலப்பின ஃபூரியர் தொடர் 195
3.5 ஃபூரியர் தொடரின் பார்சிவால் முற்றொருமை 199

3.6 ஃபூரியர் தொடரின் இயற்பியல் பயன்பாடுகள் 200

3.7 ஃபூரியர் தொகைகள் 209

3.8 ஃபூரியர் தொகையின் வெவ்வேறு வடிவங்கள் 213

3.9 ஃபூரியர் தொகைகளின் பார்சிவால் முற்றொருமை 216

3.10 ஃபூரியர் நிலை மாற்றங்கள் 216

3.11 ஃபூரியர் நிலைமாற்றங்களின் பயன்பாடுகள் 225

3.12 லாப்லாஸ் நிலைமாற்றங்கள் 231

3.13 ஃபால்டுங் அல்லது மடிப்புத் தேற்றம் 234

3.14 சார்பின் துண்டுதுண்டான தொடர்ச்சி 237

3.15 லாப்லாஸ் நிலை மாற்றத்தின் பண்புகள் 237

3.16 லாப்லாஸ் நிலை மாற்றத்தினைப் பயன்படுத்தி வரம்பு மதிப்புப் பிரச்சினைகளைத் தீர்த்தல் 253

4. குலங்களின் கொள்கை

4.1 நிலைமாற்றங்களின் குலங்கள் 259

4.2 குலம் - வரையறை 262

4.3 குலங்களின் எடுத்துக்காட்டுகள் 264

4.4 பெருக்கல் அட்டவணை 265

4.5 குலங்களின் வகைகள் 268

4.6 வரிசை மாற்றி அமைத்தல் தேற்றம் 269

4.7 முடிவுறு குலத்தின் பிறப்பிப்பான்கள் 270

4.8 இணையிய உறுப்புகள் மற்றும் இனங்கள் 273

4.9 இனங்களின் பெருக்கல் 275

4.10 துணைக்குலங்கள் 276

4.11 வட்டக்குலங்கள் 277

4.12 கூற்றுக்கணங்கள் 277

4.13 துணைக்குலங்கள் பற்றிய ஒரு தேற்றம் 278

4.14 இயல்நிலை துணைக்குலங்கள் 280

4.15 காரணி குலங்கள் 280

4.16 குலங்களின் நேரடிப் பெருக்கல் 281

4.17 ஒரு படித்தான மற்றும் பல படித்தான தன்மைகள் 283

4.18 வகைக்குறிப்புக் கொள்கை 284

4.19 வகைக்குறிப்புகளின் சில பண்புகள் 287

4.20 மாற்றமிலாத்துணை வெளிகளும் ஒடுக்கத்தக்க வகைக்குறிப்புகளும் 288

4.21 ஒருவகைக் குறிப்பின் ஒடுங்கும் தன்மை 289

4.22 வகைக்குறிப்புகள் பற்றிய ஒரு தேற்றம் 291

4.23 ஒடுக்கம் பெறா வகைக்குறிப்புகள் 294

4.24 ஷுரின் துணைக் கோட்பாடுகள் 295

4.25 ஷுரின் முதலாவது துணைக்கோட்பாடு 295

4.26 ஷுரின் இரண்டாவது துணைக்கோட்பாடு 297

4.27 செங்குத்துத் தன்மை தேற்றம் 299

4.28 ஒரு வகைக்குறிப்பின் பண்புக்கோவைகள் 303

4.29 பண்புக்கோவைகளின் செங்குத்துத்தன்மை 304

4.30 C_{3v} இன் பண்புக்கோவை அட்டவணை 305

4.31 C_{4v}குலத்தின் பண்புக்கோவை அட்டவணை 308

4.32 இடப்பெயர்வு குலம் மற்றும் வெளிக்குலம் 312

4.33 அச்சுச்சுழற்சிக்குலம் 316

4.34 புள்ளிக்குலங்கள் 317

4.35 படிகமைப்புப் புள்ளிக்குலங்கள் 318

4.36 32 புள்ளிக்குலங்களின் உருவாக்கம் 319

கணித இயற்பியல் (Mathematical Physics)

பகுதி – 2

1. சிறப்புச் சார்புகள் (Special Functions)

1.1 காமா மற்றும் பீட்டா சார்புகள் (Gamma and Beta functions) –முன்னுரை

ஆய்லரின் தொகைகளில் (Eulerian Integrals) இரண்டு விதமான வரையறுக்கப்பட்ட தொகை (Definite integrals)களை இப்போது காண்போம்.

ஒன்று $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \qquad \rightarrow (1)$

இது காமா சார்பு எனப்படும், இதில் n நேர் எண்ணாகும்.

மற்றது $\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \qquad \rightarrow (2)$

இது பீட்டா சார்பு எனப்படும், இதில் m, n ஆகியவை நேர் எண்களாகும்.

1.2 காமா சார்புகள்

(i) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

இதனை நிரூபிக்க, (1)ல் nக்குப் பதிலாக $(n+1)$ஐப் பிரதியிட,

$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx$. இதனைப் பகுதிகளாகத் (Integrating by parts) தொகை காண,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = [-e^{-x} x^n]_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

$$= 0 + n\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

ஏனெனில் இரு வரையெல்லைக்கும், முதல் உறுப்பு, சுழியாகும். (1) லிருந்து

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ எனலாம். அல்லது

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \quad \rightarrow (3)$$

n = 0, -1, -2, -3…. என்ற மதிப்புகளைத் தவிர மற்ற மதிப்புகளுக்கு $\Gamma(n)$ வரையறுக்கப்படுகிறது.

(ii) (3) லிருந்து

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$n = n-1$ எனில்,

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n-1) = (n-2)\Gamma(n-2)$$

$$\Gamma(n-2) = (n-3)\Gamma(n-3)$$

$$\Gamma(n-3) = (n-4)\Gamma(n-4)$$

…………...

…………...

…………...

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2)$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1)$$

சமன்பாடுகளை ஒவ்வொன்றாக முந்தையதில் பிரதியிட

$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \dots \dots .3.2.1\Gamma(1)$

வரையறையிலிருந்து

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}x^{1-1}dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}dx$$

$$= [-e^{-x}]_0^\infty$$

$$= \left[\frac{-1}{e^x}\right]_0^\infty$$

$$= -0 + \frac{1}{e^0}$$

$$= 1$$

எனவே $\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \dots \dots .3.2.1$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \rightarrow (4)$$

(iii) 4 ல் $n = 0$ என்க

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

$$\therefore \Gamma(1) = 1$$

ஆனால்

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

$n = 0$ எனில் $\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \frac{1}{0} = \infty$ → (5)

(iv) $n = -1$ என்க

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = -\infty$$

$n = -2$ எனில்

$$\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(-1)}{-2} = \infty$$

இவ்வாறே $\Gamma(-n) =$ முடிவிலி எனக்காட்டலாம்.

எனவே $n = 0$, –1, –2, …. ஆகிய மதிப்புகளுக்கு $\Gamma(n)$ன் மதிப்பு முடிவிலியாகும்.

(v) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ஐக் கண்டறிய , $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \, , n > 0$

$x = \varphi^2$ என்க. $dx = 2\varphi d\varphi$

$$\therefore \Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-\varphi^2} \varphi^{2n-1} d\varphi$$

n = ½ என்க

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-\varphi^2} d\varphi \qquad \rightarrow (6)$$

$$I = \int_0^\infty e^{-\varphi^2} d\varphi$$

என்போம்.

$\varphi = \lambda\psi$ எனில், $d\varphi = \lambda d\psi$

$$I = \int_0^\infty e^{-\lambda^2\psi^2}\lambda d\psi$$

இருபுறமும் $e^{-\lambda^2}$ ஆல் பெருக்க

$$Ie^{-\lambda^2} = \int_0^\infty e^{-\lambda^2(1+\psi^2)}\lambda d\psi$$

இருபுறமும் தொகை காண,

$$I\int_0^\infty e^{-\lambda^2}d\lambda = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda^2(1+\psi^2)}\lambda d\lambda d\psi$$

$$= \int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-\lambda^2(1+\psi^2)}\lambda d\lambda\right]d\psi$$

$\lambda^2 = u$ மற்றும் $1+\psi^2 = k$ என்க. $\frac{du}{2} = \lambda d\lambda$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2(1+\psi^2)}\lambda d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-ku}du$$

$$= \left[\frac{e^{-ku}}{-2k}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{2k}\left[\frac{1}{e^{ku}}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{2k}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{e^0}\right] = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2(1+\psi^2)}$$

எனவே

$$I\int_0^\infty e^{-\lambda^2}d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\psi}{1+\psi^2}$$

மாறி λக்குப் பதிலாக φஐப் பயன்படுத்த

$$I\int_0^\infty e^{-\varphi^2}d\varphi = \frac{1}{2}\left[tan^{-1}\psi\right]_0^\infty$$

$$I.I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \rightarrow (7)$$

(6), (7) லிருந்து

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{\Pi}}{2} = \sqrt{\Pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\Pi} \qquad \rightarrow (8)$$

(vi) $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$

இதில் $n = \frac{-1}{2}$ என்க

$$\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{-1}{2}\right)} = -2\sqrt{\Pi}$$

இதே போல், $\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\left(\frac{-3}{2}\right)} = 4\frac{\sqrt{\Pi}}{3}$

<u>மாதிரி 1</u>

மதிப்பிடுக $\int_0^\infty \sqrt[4]{x} e^{-\sqrt{x}} dx$

தீர்வு :

$I = \int_0^\infty x^{\frac{1}{4}} e^{-\sqrt{x}} dx$ என்க $\qquad \rightarrow (1)$

$\sqrt{x} = t$ எனில் $x = t^2$ அல்லது $dx = 2tdt$

(1)ல் பிரதியிட

$$I = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-t} 2tdt = 2\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t} dt$$

வரையறையிலிருந்து

$I = 2\left[\left(\frac{5}{2}\right)\right.$

$\left[(n+1) = n\left[(n)\right.\right.$ ஐப் பயன்படுத்த,

$I = 2\frac{3}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right) = 2.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{\Pi}\right.\right.$ – விடை

மாதிரி – 2

மதிப்பிடுக $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-\sqrt[3]{x}}\, dx$

தீர்வு :

$I = \int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-\sqrt[3]{x}}\, dx$ என்க → (1)

$\sqrt[3]{x} = t$ எனில், $x = t^3$ அல்லது $dx = 3t^2 dt$

(1) இல் பிரதியிட

$$I = \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}}\, e^{-t} 3t^2 dt$$

$$= 3\int_0^\infty t^{\frac{7}{2}}\, e^{-t} dt$$

$= 3\left[\left(\frac{9}{2}\right) = 3.\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{315}{16}\sqrt{\Pi}\right.\right.$ விடை

மாதிரி –3

மதிப்பிடுக $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-h^2x^2} dx$

தீர்வு :

$I = \int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-h^2x^2} dx$ என்க → (1)

$h^2x^2 = t$ எனில், $x = \frac{\sqrt{t}}{h}$ அல்லது $dx = \frac{dt}{2h\sqrt{t}}$

(1) இல் பிரதியிட

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{t}}{h}\right)^{n-1} e^{-t}\, \frac{dt}{2h\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2h^n}\int_0^\infty t^{\frac{n-2}{2}} e^{-t}dt = \frac{1}{2h^n}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{\frac{n}{2}-1}dt$$

$\frac{1}{2h^n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ விடை

மாதிரி 4

மதிப்பிடுக $\int_0^\infty \frac{x^a}{a^x}dx$.

தீர்வு :

$I = \int_0^\infty \frac{x^a}{a^x}dx$ என்க. $\rightarrow (1)$

$a^x = e^t$ எனில் $x\log a = t$ அல்லது $x = \frac{t}{\log a}$

மற்றும் $dx = \frac{dt}{\log a}$ அதை (1) இல் பிரதியிட

$I = \int_0^\infty \left(\frac{t}{\log a}\right)^a e^{-t}\frac{dt}{\log a}$

$= \frac{1}{(\log a)^{a+1}}\int_0^\infty t^a e^{-t}dt = \frac{1}{(\log a)^{a+1}}\Gamma(a+1)$ விடை

மாதிரி – 5

மதிப்பிடுக $\int_0^1 x^{n-1}\left[log_e\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{m-1} dx$

தீர்வு :

$I = \int_0^1 x^{n-1}\left[log_e\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{m-1} dx$ என்க $\rightarrow (1)$

$log_e\left(\frac{1}{x}\right) = t$ எனில் $\frac{1}{x} = e^t$ அல்லது $x = e^{-t}, dx = -e^{-t}dt$

எல்லைகள் $x = 1$ எனில் $t = 0, x = 0$ எனில் $t = \infty$

இம்மதிப்புகளை(1)இல் பிரதியிட

$$I = \int_\infty^0 (e^{-t})^{n-1}\,(t)^{m-1}(-e^{-t}dt)$$

$$= -\int_{\infty}^{0} t^{m-1} e^{-nt} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} t^{m-1} e^{-nt} dt$$

$nt = u$ எனில் $t = \frac{u}{n}$, $dt = \frac{du}{n}$

$I = \int_0^\infty \left(\frac{u}{n}\right)^{m-1} e^{-u} \frac{du}{n} = \frac{1}{n^m}\int_0^\infty u^{m-1} e^{-u} du = \frac{1}{n^m}\Gamma(m)$ –விடை

1.3 காமா சார்பின் நிலைமாற்றங்கள் (Transformations)

$$\Gamma(n) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \qquad \rightarrow (1)$$

(i) $x = \lambda y$ என்க. $dx = \lambda dy$

(1) இல் இருந்து, $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} \lambda^{n-1} y^{n-1} \lambda dy$

$$\frac{\Gamma(n)}{\lambda^n} = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda y} y^{n-1} dy \qquad \rightarrow (2)$$

(ii) (1) இல் $e^{-x} = y$ எனப் பிரதியிட, $x = log\frac{1}{y}$ ஆகும்.

$e^x = \frac{1}{y}$ எனில் எல்லைகள் $\infty \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow 1$

எனவே

$$\Gamma(n) = -\int_{1}^{0} y\left[log\frac{1}{y}\right]^{n-1} \frac{1}{y} dy$$

$$= \int_{0}^{1} \left[log\frac{1}{y}\right]^{n-1} dy \qquad \rightarrow (3)$$

$$\left[\because x = log\frac{1}{y}, dx = y\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = -\frac{dy}{y}\right]$$

(iii) $x = y^{\frac{1}{n}}$ என்க. $y = x^n$, $dy = nx^{n-1}dx$

எனவே $x^{n-1}dx = \frac{dy}{n}$

(1) இல் பிரதியிட,

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y^{\frac{1}{n}}}dy$$

$$\therefore n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-y^{\frac{1}{n}}}dy \qquad \rightarrow (4)$$

கிளைத்தேற்றம் – சமன்பாடு 4இல் $n = \frac{1}{2}$ **எனில்**

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

பயிற்சிகள் 1.1

மதிப்பிடுக

1. (i) $\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)$ (ii) $\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right)$ (iii) $\Gamma\left(\frac{-15}{2}\right)$ (iv) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ (v) $\Gamma(0)$

விடை (i) $-2\sqrt{\Pi}$ (ii) $\frac{4}{3}\sqrt{\Pi}$ (iii) $\frac{2^8\sqrt{\Pi}}{15\times13\times11\times9\times7\times5\times3}$ (iv) $\frac{15\sqrt{\Pi}}{8}$

(v) ∞

2. $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$ விடை $\sqrt{\frac{3}{2}}$

3. $\int_0^\infty x^4e^{-x^2}dx$ விடை $\frac{3\sqrt{\Pi}}{8}$

4. $\int_0^\infty x^{-h^2x^2}dx$ விடை $\frac{\sqrt{\Pi}}{2h}$

5. $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(ax^2+by^2)}x^{2m-1}y^{2n-1}dxdy, a, b, m, n > 0$ விடை $\frac{\Gamma m\Gamma n}{4a^mb^n}$

6. $\int_0^1 \left[log\,\frac{1}{y}\right]^{n-1} dy, n > 0$ விடை $\sqrt{n}$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\log x}}$ விடை $\sqrt{\Pi}$

8. $\int_0^1 (x \log x)^3\, dx$ விடை $\frac{-3}{128}$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x \log\frac{1}{x}}}$ விடை $\sqrt{2\Pi}$

1.4 பீட்டா சார்புகள் (Beta functions)

(i) $\beta(m,n) = \beta(n,m)$ எனக் காட்டுதல்

வரையறைப்படி $\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$

$(1-x)$ ஐ xஇல் பிரதியிட, எல்லைகள் $1 \to 0, \quad 0 \to 1$

$$\beta(m,n) = \int_1^0 (1-x)^{m-1}\{1-(1-x)\}^{n-1}(-dx)$$

$$= -\int_1^0 x^{n-1}(1-x)^{m-1}dx$$

$$= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}dx$$

$\beta(m,n) = \beta(n,m)$ $\to (1)$

(ii) $\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$

$\frac{y}{1+y}$ ஐ xக்குப் பதிலாகப் பிரதியீடு செய்ய, எல்லைகள் $x \to 1$எனில் $y \to \infty, x \to 0$ எனில் $y \to 0$

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m-1}} \frac{1}{(1+y)^{n-1}} \frac{dy}{(1+y)^2} \qquad [\because dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$$

$$\beta(n,m) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$$

$\beta(m,n) = \beta(n,m)$ எனவே

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy \qquad \rightarrow (2)$$

காமா மற்றும் பீட்டா சார்புகளுக்கிடையேயான தொடர்பு

$$\frac{\Gamma(n)}{\lambda^n} = \int_0^\infty e^{-\lambda y} y^{n-1} dy,$$

1.3 சமன்பாடு (2) மற்றும்

$$\frac{\Gamma(m)}{\lambda^m} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{m-1} dx,$$

அல்லது

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty \lambda^m e^{-\lambda x} x^{m-1} dx$$

எனலாம்.

இருபுறமும் $e^{-\lambda}\lambda^{n-1}$ ஆல் பெருக்கித் தொகையிட

$$\Gamma(m) \int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{n-1} d\lambda = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\lambda(1+x)}\,\lambda^{m+n-1} d\lambda\right] x^{m-1} dx$$

1.3 (2) இல் இருந்து

$$\frac{\Gamma(m+n)}{(1+x)^{m+n}} = \int_0^\infty e^{-\lambda(1+x)} \lambda^{m+n-1} d\lambda,$$

எனலாம். அல்லது

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(m+n)}{(1+x)^{m+n}} x^{m-1} dx$$

$$= \Gamma(m+n) \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

$$= \Gamma(m+n)\ \beta(m,n)$$ – சமன்பாடு 2இன் படி

$$\therefore\ \beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$\rightarrow (3)$

மாதிரி–6

மதிப்பிடுக $\int_0^1 x^4(1-\sqrt{x})^5 dx$

தீர்வு :

$\sqrt{x} = t$ என்க $x = t^2$ அல்லது $dx = 2tdt$

எனவே $\int_0^1 (t^2)^4(1-t)^5 2tdt$

$$= 2\int_0^1 t^9(1-t)^5 dt = 2\beta(10,6) = 2\frac{\Gamma(10)\Gamma(6)}{\Gamma(16)}$$

$$2\frac{9!\,5!}{(15)!} = \frac{2\times1\times2\times3\times4\times5}{15\times14\times13\times12\times11\times10}$$

$= \frac{1}{15015}$ விடை

மாதிரி – 7

மதிப்பிடுக $\int_0^1 (1-x^3)^{\frac{-1}{2}} dx$

தீர்வு :

$x^3 = y$ என்க $x = y^{\frac{1}{3}}$ அல்லது $dx = \frac{1}{3} y^{\frac{-2}{3}} dy$

$$\int_0^1 (1-x^3)^{\frac{-1}{2}} dx = \int_0^1 (1-y)^{\frac{-1}{2}} \left(\frac{1}{3} y^{\frac{-2}{3}} dy\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{-2}{3}}(1-y)^{\frac{-1}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$$ – விடை

மாதிரி – 8

மதிப்பிடுக

$$\int_0^1 \frac{(x^{m-1}+x^{n-1})}{(1+x)^{m+n}}\, dx$$

தீர்வு :

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$$

$$\beta(m,n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx + \int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx \qquad \to (1)$$

$I = \int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$ என்க $\qquad \to (2)$

$x = \frac{1}{t}$ எனில், $dx = \frac{-dt}{t^2}$ எல்லைகள் $x = \infty,\ t = 0,\ x = 1,\ t = 1$

(2)இல் பிரதியிட

$$I = \int_1^0 \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{m-1}}{(1+\frac{1}{t})^{m+n}} \left(\frac{-dt}{t^2}\right)$$

$$= -\int_1^0 \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{t}\right)^2}{(\frac{1}{t})^{m+n}(t+1)^{m+n}}\, dt = -\int_1^0 \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{1-n}}{(t+1)^{m+n}} dt$$

$$= -\int_1^0 \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{m+n}} dt = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{m+n}} dt$$

பொதுவாக, $I = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$ எனலாம். இதை (1)இல் பிரதியிட

$$\beta(m,n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(x^{m-1}+x^{n-1})}{(1+x)^{m+n}} dx$$ -விடை.

மாதிரி – 9

$$\int_0^{\Pi/2} \sin^{p}\theta\ cos^{q}\theta\ d\theta = \frac{\left\lceil\left(\frac{p+1}{2}\right)\left\lceil\left(\frac{q+1}{2}\right)\right.\right.}{2\left\lceil\left(\frac{p+q+2}{2}\right)\right.}$$

எனக் காட்டுக

தீர்வு :

$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ $\rightarrow (1)$

இதில் $x = \sin^2\theta, dx = 2\sin\theta\ \cos\theta\ d\theta$ என்க

$1 - x = 1 - \sin^2\theta = cos^2\theta$ எல்லைகள் $x = 0, \theta = 0, x = 1, \theta = \frac{\Pi}{2}$

(1)இல் பிரதியிட, $\beta(m,n) = \int_0^{\Pi/2} \sin^{2m-2}\theta.\ cos^{2n-2}\theta 2\sin\theta\cos\theta\ d\theta$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma n}{\Gamma(m+n)} = 2\int_0^{\Pi/2} \sin^{2m-1}\theta.\ cos^{2n-1}\theta.d\theta \quad \rightarrow (2)$$

$2m-1=p$ எனில் $m=\frac{p+1}{2}$

$2n-1\ =q$ எனில் $n\ =\frac{q+1}{2}$

$$m+n=\frac{p+q+2}{2}$$

(2)இல் பிரதியிட,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)} = 2\int_0^{\Pi/2} \sin^{p}\theta\ cos^{q}\theta\ d\theta$$

அல்லது

$$\int_0^{\Pi/2} \sin^{p}\theta\ cos^{q}\theta\ d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

மாதிரி – 10

$\int_0^{\Pi/2}\sqrt{cot\theta}\ d\theta=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$ எனக் காட்டுக

$$\int_0^{\Pi/2} \sin^{p}\theta\ cos^{q}\theta\ d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)} \quad \rightarrow (1)$$

$$\int_0^{\Pi/2}\sqrt{cot\theta}\ d\theta = \int_0^{\Pi/2}\frac{cos^{\frac{1}{2}}\theta}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}d\theta = \int_0^{\Pi/2}\sin^{\frac{-1}{2}}\theta\ cos^{\frac{1}{2}}\theta\ d\theta$$

இதை (1) உடன் ஒப்பிட $p=\frac{-1}{2}, q=\frac{1}{2}$

$$\frac{q+1}{2}=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{q+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{p+q+2}{2} = 1 = \lceil(1)$$

எனவே

$$\int_0^{\Pi/2} \sqrt{cot\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\left\lceil\left(\frac{1}{4}\right)\right\lceil\left(\frac{3}{4}\right)$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

மாதிரி – 11.

மதிப்பிடுக: $\int_{-1}^{+1}(1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

தீர்வு :

$x = \cos 2\theta$ என்க ; $dx = -2\, sin2\theta\, d\theta$ — எல்லைகள் $x = 1, \theta = 0$; $x = -1, \theta = \frac{\Pi}{2}$

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$= \int_{\frac{\Pi}{2}}^{0} (1+\cos 2\theta\,)^{p-1}\,(1-\cos 2\theta\,)^{q-1}(-2sin2\theta d\theta)$$

$$= \int_{\frac{\Pi}{2}}^{0} (1+2cos^2\theta-1)^{p-1}(1-1$$

$$+\,2sin^2\theta)^{q-1}(-4\sin\theta\cos\theta d\theta)$$

$$= 4\int_0^{\frac{\Pi}{2}} 2^{p-1}cos^{2p-2}2^{q-1}sin^{2q-2}sin\theta\, cos\theta\, d\theta$$

$$= 2^2 2^{p+q-2} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} sin^{2q-1}\theta cos^{2p-1}\theta \, d\theta$$

$$= 2^{p+q} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} sin^{2q-1}\theta cos^{2p-1}\theta \, d\theta$$

$$= 2^{p+q} \frac{\Gamma\left(\frac{2q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2p}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{2p+2q}{2}}}$$

$$= 2^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$ – விடை.

பயிற்சி 1.2

நிரூபிக்க

1. $\int_0^{\Pi/2} \sin^2\theta \; cos^4\theta \, d\theta = \frac{5\Pi}{256}$

2. $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sin^6\theta \, d\theta = \frac{5\Pi}{32}$

3. (a) $\beta(m+1, n) = \frac{m}{m+n}\beta(m,n)$

   (b) $\beta(m, n+1) = \frac{n}{m+n}\beta(m,n)$

   (c) $\beta(m+1, n) + \beta(m, n+1) = \beta(m,n)$

4. $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt[3]{1-x^2}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)}$

5. $\int_0^1 (1-x^n)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n+2}{2n}\right)}$

6. $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{n}})^m dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

7. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{p+1}(x-1)^q} = \beta(p+q, 1-q), -p < q < 1$ எனில்

8. $\int_0^1 x^m(1-x^n)^p dx = \frac{1}{n}\frac{\left[\left(\frac{m+1}{2}\right)\left[(p+1)\right.\right.}{\left[\left(\frac{m+1}{2}+p+1\right)\right.}$

9. $\int_0^b (x-a)^m(b-x)^n dx = (b-a)^{m+n+1}\beta(m+1, n+1)$

10. $\int_0^{\Pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}sin^2\theta}} = \frac{\left[\left[\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2\right.}{4\sqrt{\Pi}}$

1.5 இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்

(Second order differential equations)

சிறப்புச் சார்புகளை (Special functions) ஆராயப் பயன்படுபவை வகைக்கெழு சமன்பாடுகளாகும் (Differential equations). ஒரு மாறி (variable)யைப் பொருத்து மற்றொரு மாறியின் வருவி (derivative)கள் அல்லது வகைக்கெழு குணங்கள் (Differential Coefficients), முதல் வரிசை (first order) அல்லது இரண்டாம் வரிசையில் அமைவது வகைக்கெழு சமன்பாடுகளாகும்.

இரண்டாம் வரிசை (Second Order) வகைக்கெழு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் போது அவற்றை இருமுறை தொகையிட்டு, அதனால் கிடைக்கும் இரண்டு யாதாமொரு மாறிலி (Arbitrary constants)களை, தொடக்க (initial) அல்லது வரம்பு நிபந்தனைகளை (boundary conditions) பயன்படுத்தி கண்டறிகிறோம். ஒருபடித்தான (homogeneous), இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் பொதுவான தீர்வுகள், மாறிலிகளின் மாற்றம் (Variation of constants), அடுக்குத்தொடர் விரிவாக்கம் (power series expansion) மற்றும் கிரீனின் சார்பு (Green's function) ஆகிய முறைகளைப் பயன்படுத்திப் பெறப்படுகின்றன.

இச்சமன்பாடுகள் $y'' = f(x, y, y')$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

1.6 சிறப்புப்புள்ளிகள் (Singular points) :

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளில், $x = x_0$ல் y மற்றும் y'ன் எந்தக் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கும், y'' குறிப்பிட்ட மதிப்பைப் பெறுமானால் புள்ளி $x = x_0$ ஒரு சாதாரணப் புள்ளி (Ordinary point) எனப்படும். மாறாக $x = x_0$ ல் y மற்றும் y'ன் எம்மதிப்பிற்காவது y'' முடிவிலி மதிப்பைப் பெறுமானால் அப்புள்ளி சிறப்புப்புள்ளி எனப்படும்.

ஒருபடித்தான, இரண்டாம் வரிசை, நேர்கோட்டு (linear) வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

(i) குணகங்கள் $P(x)$ மற்றும் $Q(x), x \rightarrow x_0$ க்கு விரிவடைந்தும் (diverge), $(x - x_0)\,P(x)$ மற்றும் $(x - x_0)^2 Q(x)$ மதிப்புகள் குறிப்பிட்ட அளவைப் பெற்றும் இருக்குமானால், புள்ளி x_0 ஒழுங்கான (regular) அல்லது அவசியமற்ற (non-essential) சிறப்புப்புள்ளி எனப்படும். இந்நிலையில் சமன்பாடுகளின் தீர்வு அடுக்குத்தொடர் விரிவாக்க முறையில் காணப்படலாம்.

(ii) மாறாக $P(x)$ ஆனது $\frac{1}{x - x_0}$ ஐ விட வேகமாக விரிவடைந்து $(x - x_0)\,P(x)$ ஆனது $x \rightarrow x_0$க்கு முடிவிலியை நெருங்கினாலும் அல்லது $\frac{1}{(x - x_0)^2}$ ஐ விட $Q(x)$ வேகமாக விரிவடைந்து $(x - x_0)^2 Q(x)$, $x \rightarrow x_0$ க்கு முடிவிலியை நெருங்கினாலும், புள்ளி $x = x_0$ ஆனது ஒழுங்கற்ற (irregular) அல்லது அவசியமான (essential) சிறப்புப்புள்ளி எனப்படும். இந்நிலையில் சமன்பாட்டிற்குப் பொதுவான தீர்வு அமையாது.

நாம் அறிய வேண்டிய சிறப்புச் சார்புச் சமன்பாடுகளில், பெசல் சமன்பாடான

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \text{ல்}$$

அல்லது $$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \text{ ல்}$$

$x = 0$ ஒரு ஒழுங்கான சிறப்புப் புள்ளியாகும்.

லெஜண்டர் சமன்பாடு

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \text{ ல்}$$

ஒழுங்கான சிறப்புப் புள்ளிகள் $x = -1,1$ மற்றும் ∞ ஆகும்.

லாகர் சமன்பாட்டில் ஒழுங்கான சிறப்புப் புள்ளி $x = 0$, ஒழுங்கற்ற சிறப்புப் புள்ளி $x = \infty$ ஆகும். இச்சமன்பாடு

$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0$ ஆகும்.

1.7 தொடர் தீர்வுகள்– ஃபுரோபீனியஸ் (Frobenius's method) முறை

ஒரு படித்தான, இரண்டாம் வரிசை, நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும். இது ஒழுங்கான சிறப்புப்புள்ளியைத் தவிர மற்ற சிறப்புப் புள்ளிகளைப் பெற்றிருக்கவில்லை எனில் இதன் தீர்வு அடுக்குத்தொடர் விரிவாக்கமாக அமைய முடியும்.

அதன்வடிவம்,

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} \qquad \rightarrow (2)$$

இதன் அடுக்குக்குறி k மற்றும் குணகங்கள் a_r, தீர்மானிக்கப்படவில்லை. அடுக்குக்குறி k முழு எண்ணாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை. இத்தொடரின் முதலாவது கோவையில் xன் அடுக்குச் சாராமாறி (Parameter)யாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

தீர்வு (2) ஐ இருமுறை வகைப்படுத்திச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட வேண்டும்.

அச்சமன்பாட்டின் வலப்புறத்துடன் (சுழியுடன்) ஒப்பிட்டு, xன் ஒவ்வொரு அடுக்குக்குமான குணகங்கள் சுழியுடன் ஒப்பிடப்படுகின்றன.

xன் மிகக் குறைந்த அடுக்கு $(k-2)$ ஆகும். எனவே x^{k-2} ன் குணகத்தைச் சுழியுடன் ஒப்பிட்டு $a_0 k(k-1) = 0$ என்ற சமன்பாடு பெறப்படுகிறது. விரிவாக்கத்தின் முதலாவது குணகம் $a_0 \neq 0$. எனவே $k(k-1) = 0$. kன் இம்மதிப்புகள் தீர்வுகளைத் தீர்மானிப்பதில் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை. அடுத்ததாக x^{k-1}ன் குணகத்தைச் சுழியுடன் ஒப்பிட $a_1(k+1)k = 0$ என்ற சமன்பாடு பெறப்படுகிறது. இதில் $k = 0$ ஆகும். மாறாக $k = 1$ எனில் $a_1 = 0$ ஆகும். இவற்றை ஆராய்வதற்கு முன் நாம் பொதுவான கோவையில் x^{k+j} ன் குணகத்தைக் கருதுவோம். அதிலிருந்து a_{j+2} என்ற குணகம் a_j குணகத்தின் மடங்காக, இரு கோவை (two term) திரும்பு தொடர்பாக (recurrence relation) கிடைக்கப் பெறுகிறது. இதைக் கொண்டு $a_{j+2}, a_{j+4}, a_{j+6}$ .... ஆகிய குணகங்கள் பெறப்படுகின்றன. இவ்வாறு a_0ல் தொடங்கி a_2, a_4, a_6 .... ஆகிய அனைத்து இரட்டைக் குணகங்களையும் பெறலாம்.

மேலும் $k = 0$ எனில் a_1 யாதாமொரு (arbitrary) மதிப்பைப் பெறும். $k = 1$ எனில் $a_1 = 0$ ஆகும். எனவே $a_3, a_5, a_7 \ldots$, போன்ற ஒற்றைக் குணகங்களும் திரும்பு தொடர்பின் படி சுழிகளாகும்.

ஆனால் $k(k-1) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், இரண்டாவது மூலத்(root)தைக் கொண்டு xஇன் ஒற்றைக் குணகங்கள் பெறப்படும்.

1.8 லெஜன்டர் வகைக்கெழு சமன்பாடு (Legendre's differential equation)

லாப்லாஸ் சமன்பாட்டை, கோள ஆயத் தொலைவு (Spherical Polar Coordinates) களில் பிரிக்கும் போது லெஜன்டர் வகைக்கெழு சமன்பாடு கிடைக்கப் பெறுகின்றது.

இது $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$ ஆகும். $\rightarrow (1)$

சமன்பாடு (1)இன் தீர்வு உயரும் அல்லது தாழும் xஇன் அடுக்குகளாக அமையும். இத்தீர்வை xஇன் தாழும் அடுக்குகளில் அமைப்பதாகக் கருதுவோம்.

இச்சமன்பாட்டிற்கான தொடர் தீர்வை,

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k-r} \qquad \rightarrow (2)$$

என்போம். இதை வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (k-r) x^{k-r-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (k-r)(k-r-1) x^{k-r-2}$$

சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(1-x^2)(k-r)(k-r-1)x^{k-r-2} - 2x(k-r)x^{k-r-1} + n(n+1)x^{k-r})]a_r \equiv 0$$

அல்லது

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(k-r) + \{n(n+1) - 2(k-r) - (k-r)(k-r-1)\}x^{k-r}]\, a_r \equiv 0$$

அல்லது

$$\sum_{r=0}^{\infty} \;[(k-r)\,(k-r-1)\,x^{k-r-2}\{n(n+1) - (k-r)\,(k-r+1)\}x^{k-r}] \; a_r \equiv 0 \qquad \rightarrow (3)$$

(2) ஆனது (1) இன் தீர்வாக அமைய வேண்டுமானால், (3) இல் உள்ள xஇன் வெவ்வேறு அடுக்குகளின் குணகங்கள் தனித்தனியாகச் சுழியாக

வேண்டும். அதன்படி $r = 0$ மதிப்பை (3)இல் பிரதியிடக் கிடைக்கும் x^kஇன் குணகம் சுழி எனில்

$$a_0[n(n+1) - k(k+1)] = 0 \text{ ஆகும்.}$$

a_0 எனப்படுவது தொடர் தீர்வின் முதலாவது குணகமாகும். இது சுழியாக முடியாது. எனவே

$n(n+1) - k(k+1) = 0$ ஆகும்.

$n^2 + n - k^2 - k = 0$

$(n^2 - k^2) + (n - k) = 0$

$(n+k)(n-k) + (n-k) = 0$

$(n-k)(n+k+1) = 0$

அதாவது $k = n$ அல்லது $k = -n - 1$ $\rightarrow (4)$

அடுத்து, $r = 1$ என (3) இல் பிரதியிட x^{k-1}இன் குணகத்தைப் பெறலாம். இதனைச் சுழி எனக் கொண்டால்,

$\{n(n+1) - (k-1)k\}a_1 = 0$

(4)இல் இருந்து kஇன் மதிப்பை இதில் பிரதியிட

$$n(n+1) - (k-1)k \neq 0$$

எனவே $a_1 = 0$ ஆகும். $\rightarrow (5)$

மேலும் சமன்பாடு (3) இல் x^{k-r} என்ற பொதுவான xஇன் அடுக்கைக் கண்டறிய, (3)ல் உள்ள $(k-r)(k-r-1)x^{k-r-2}$ என்ற கோவையில் $r = r - 2$ எனப் பிரதியிட இது $(k-r+2)(k-r+1)x^{k-r}$ என்றாகும். எனவே சமன்பாடு (3) இல் இலிருந்து x^{k-r}இன் குணகத்தை எடுக்க அது,

$(k-r+2)(k-r+1)a_{r-2} + \{(n(n+1) - (k-r)(k-r+1)\}a_r = 0$ அல்லது

$$a_r = -\frac{(k-r+2)(k-r+1)}{n(n+1)-(k-r)(k-r+1)}a_{r-2} \quad \rightarrow (6)$$

(4) இல் இருந்து $k = n$இன் மதிப்பைப் பிரதியிட

$$a_r = -\frac{(n-r+2)(n-r+1)}{n(n+1)-(n-r)(n-r+1)}a_{r-2}$$

$$= -\frac{(n-r+2)(n-r+1)}{n^2+n-n^2+nr-n+nr-r^2+r}a_{r-2}$$

$$a_r = -\frac{(n-r+2)(n-r+1)}{r(2n-r+1)}a_{r-2} \quad \rightarrow (7)$$

இப்போது $k = -n-1$ என்ற மதிப்பைப் பிரதியிட

$$a_r = -\frac{(-n-r+1)(-n-r)}{n(n+1)-(-n-r-1)(-n-r)}a_{r-2}$$

$$= -\frac{(n+r-1)(n+r)}{n^2+n-n^2-nr-nr-r^2-n-r}a_{r-2}$$

$$a_r = \frac{(n+r-1)(n+r)}{r(2n+r+1)}a_{r-2} \quad \rightarrow (8)$$

வகை I:

$k = n$ ஆக இருக்கும் போது (7)இல் r மதிப்புகளை 2,3,….. எனக்கொள்ள

$$a_2 = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_0$$

$$a_3 = -\frac{(n-1)(n-2)}{3(2n-2)}a_1$$

$= 0$ ஏனெனில் $a_1 = 0$ சமன்பாடு (5)இன் படி

இவ்வாறே a_5, a_7, a_9 ஒற்றை க் கீழ்க்குறியீடுகள் கொண்ட a மதிப்புகள் சுழியாகும்.

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_2$$

a_2இன் மதிப்பைப் பிரதியிட

$$a_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} a_0$$

எனவே லெஜன்டர் சமன்பாட்டின் தீர்வு (2) இன் படி $k = n$ இக்கு

$$y = a_0 \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.4.6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} a^{n-6} + \cdots \right] \rightarrow (9)$$

இதில் a_0 என்பது யாதாமொரு மாறிலி ஆகும். இதன் மதிப்பு

$$a_0 = \frac{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1)}{n!}$$

இதில் n ஒரு நேர் முழு எண்ணாகும். லெஜன்டர் சமன்பாட்டின் இத்தீர்வு $P_n(x)$ எனப்படும்.

$$P_n(x) = \frac{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1)}{n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \cdots \right] \rightarrow (10)$$

இது லெஜன்டர் சார்பு எனப்படும்.

வகை II:

$k = -n - 1$ எனில், $r = 2$ஐ (8) இல் பிரதியிட

$$a_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} a_0$$

$r = 3$எனில்,

$$a_3 = \frac{(n+2)(n+3)}{3(2n+4)} a_1 \text{ ஆனால் } a_1 = 0$$

அவ்வாறே a_3, a_5, a_7, a_9 .... ஆகியவை சுழியாகும்.

இப்போது $a_4 = \frac{(n+3)(n+4)}{4(2n+5)} a_2$, a_2 இன் மதிப்பைப் பிரதியிட

$$a_4 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)} a_0$$

எனவே சமன்பாட்டின் தொடர் தீர்வு, லெஜண்டர் சார்பு,

$$y = a_0 \left[x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)} x^{-n-5} + \cdots \right] \rightarrow (11)$$

இதில் $a_0 = \frac{n!}{1.3.5.....(2n+1)}$ எனலாம். இத்தீர்வு $Q_n(x)$ எனப்படும்.

$$Q_n(x) = \frac{n!}{1.3.5 \ldots..(2n+1)} \left[x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)} x^{-n-5} + \cdots \right] \rightarrow (12)$$

எனவே லெஜண்டர் சமன்பாட்டின் பொதுவான தீர்வு

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x) \qquad \rightarrow (13)$$

இதில் A, B என்பன யாதாமொரு மாறிலிகளாகும்.

மேற்கண்ட முடிவில்லா தொடர் தீர்வுகள், முடிவுறு தொடர்களாக மாற்றப்படுமானால் அவை பல்லுறுப்புத் (Polynomial) தீர்வுகள் எனப்படும். $P_n(x)$
என்பது முதல்வகை லெஜண்டர் பல்லுறுப்பு எனவும், $Q_n(x)$ இரண்டாம் வகை லெஜண்டர் பல்லுறுப்பு எனவும் வழங்கப்படும்.

இவை குவாண்டம் இயக்கவியலில் (quantum mechanics) கோண உந்த சிறப்பியல் சார்பு (angular momentum eigen functions)களைக் குறிக்கப் பயன்படுபவை.

1.9 லெஜண்டர் பல்லுறுப்பின் ரோட்ரிக் வாய்பாடு (Rodrigues's Formula)

லெஜண்டர் பல்லுறுப்புகளின் செங்குத்துத் தன்மையை (Orthoganality) நிரூபிக்க இவ்வாய்பாடு பயனுள்ளது. முதல்வகை லெஜண்டர் சார்பில் குணகம்

$$a_0 = \frac{1.3.5\ldots\ldots\ldots(2n-1)}{n!}$$

ஆகும். இதனை,

$$a_0 = \frac{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots\ldots(2n-1)2n}{n!\,2.4.6\ldots.2n}$$

எனலாம்.

$$= \frac{1.2.3.\ldots\ldots\ldots 2n}{n!\,2^n(1.2.3\ldots.n)}$$

$$a_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!\,n!} \qquad \rightarrow (14)$$

இருபுறமும் $\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}$ ஆல் பெருக்க

$$a_0\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} = \frac{2n!}{2^n n!\,n!} \times \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}$$

$$= \frac{(2n-2)!.(2n-1).2n.n(n-1)}{2^n(n-2)!.(n-1).n.2.(2n-1)\,n(n-1)!}$$

$$a_0 \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} = \frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!\,(n-2)!} \quad \rightarrow (15)$$

(14), (15) இன் இம்மதிப்புகளை லெஜன்டர் தீர்வு (10) இல் பிரதியிட

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!\,n!} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!\,(n-2)!} x^{n-2} + \cdots$$

x அடுக்கின் மேல் எல்லை ∞ ஆகும்.

$P_n(x)$ ஐப் பல்லுறுப்பாக மாற்ற மேற்கண்ட கோவையின் மேல் எல்லையை ∞ க்குப் பதிலாக $\frac{n}{2}$ எனலாம்.

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n/2} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!\,(n-r)!\,(n-2r)!} x^{n-2r}$$

இதில் x ன் அடுக்கு 0 முதல் n வரையிலானது .

எனவே கீழடுக்கு $n - 2r = 0$ எனில் $r = n/2$ ஆகும்.

மேல் அடுக்கு $n - 2r = n$ எனில் $r = 0$ ஆகும்.

எனவே r இன் எல்லைகள் 0 முதல் $n/2$ வரை உள்ளன.

மேலும் $r = \frac{n}{2} + 1$ எனில் x இன் அடுக்கு –2 ஆகும்.

எனவே $r = n$ எனில் x இன் அடுக்கு $-n$ ஆகும்.

x இன் –2 முதல் $-n$ வரையிலான அடுக்குகள் $P_n(x)$க்கு எதுவும் பங்களிக்கவில்லை. எனினும் வசதிக்காக அவற்றையும் கணக்கில் கொண்டு

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n/2} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!\,(n-r)!\,(n-2r)!} x^{n-2r}$$

என்பதை,

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{2^n r!\,(n-r)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{2n-2r}$$

எனலாம். அல்லது

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{r!\,(n-r)!} x^{2n-2r}$$

இதனை ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி (Binomial Theorem)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

எனலாம். இது ரோட்ரிக் வாய்பாடு எனப்படும்.

1.10 லெஜன்டர் பல்லுறுப்பின் பிறப்பிக்கும் சார்பு (Generating Function)

லெஜன்டர் பல்லுறுப்பைப் பிறப்பிக்கும் சார்பு

$g(t,x) = (1-2xt+t^2)^{-1/2}$ ஆகும்.

ஏனெனில் $(1-2xt+t^2)^{-1/2}$ இன் விரிவாக்கத்தில் t^n இன் குணகமே $P_n(x)$ எனக் காட்டலாம். ஈருறுப்பு விரிவாக்கப்படி,

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = [1-t(2x-t)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{t}{2}(2x-t) + \frac{1.3}{2.4}t^2(2x-t)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}t^3(2x-t)^3$$

$$+ \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} t^n (2x-t)^n + \cdots$$

இதில் t^n இன் குணகம்,

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}(2x)^n - \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}(2x)^{n-2}\,{}_{n-1}C_1$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-5)}{2.4.6\ldots(2n-4)}(2x)^{n-4}\,{}_{n-2}C_2 - \cdots$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2.2!\,(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right]$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right]$$

$= P_n(x)$

எனவே

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

மாதிரி 12.

பிறப்பிக்கும் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $P_n(1) = 1$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

$x = 1$ எனில்

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(1) = (1-2t+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= [(1-t)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$(1-t)^{-1} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots$

இருபுறமும் t^n இன் குணகங்களை ஒப்பிட,

$P_n(1) = 1$ ஆகும்.

மாதிரி 13

$$(i)\ P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \quad (ii) P_{2n+1}(0) = 0$$

எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} P_{2n}(x) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} \quad ,$$

$x = 0$ எனில்

$$\sum t^{2n} P_{2n}(0) = (1 + t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)(t^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(t^2)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(t^2)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}(t^2)^n + \cdots$$

இருபுறமும், t^{2n} இன் குணகங்களை ஒப்பிட,

$$P_{2n}(0) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}$$

$$= (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots 2n}$$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

$(ii) t^{2n+1}$ இன் குணகம் $P_{2n+1}(0) = 0$

ஏனெனில் இத்தொடர் லெஜன்டரின் இரட்டைப் பல்லுறுப்புகளைக் கொண்டது. ஆனால் $P_{2n+1}(0)$ ஒற்றைப் பல்லுறுப்பாகும்.

1.11 லெஜண்டர் பல்லுறுப்புகளின் செங்குத்துத்தன்மை (Orthogonality)

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, P_m(x)dx = 0 \qquad ,n \neq m$$

$P_n(x)$ ஆனது $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$ என்ற லெஜண்டர் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும். $\rightarrow (1)$

$P_m(x)$ என்பது $(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - 2x\frac{dz}{dx} + m(m+1)z = 0$வின் தீர்வாகும். $\rightarrow (2)$

(1)ஐ z ஆலும் (2)ஐ y ஆலும் பெருக்கி ஒன்றிலிருந்து மற்றதைக் கழிக்க,

$$(1-x^2)\left[z\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{d^2z}{dx^2}\right] - 2x\left[z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right] + [n(n+1) - m(m+1)]\,yz = 0$$

$$(1-x^2)\left[\left\{z\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\,\frac{dy}{dx}\right\} - \left\{\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + y\frac{d^2z}{dx^2}\right\}\right] - 2x\left[z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right] + (n-m)(n+m+1)yz = 0$$

அல்லது $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left\{z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right\}\right] + (n-m)(n+m+1)yz = 0$

இதனை −1 முதல் +1 வரை தொகையிட,

$$\left[(1-x^2)\left\{z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right\}\right]_{-1}^{+1} + (n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{+1} yzdx = 0$$

$$0 + (n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{+1} y.z.dx = 0$$

$n \neq m$ எனில்

$\int_{-1}^{+1} y.z.dx = 0$ ஆகும். [$\because y$ மற்றும் z முறையே (1) மற்றும் (2) இன் தீர்வுகளாகும்.

அல்லது

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0, \qquad n \neq m$$

மாதிரி– 14 நிரூபிக்க: $\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$

தீர்வு :

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

இருபுறமும் இருமடி காண,

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} P_n^2(x) + 2\sum t^{m+n} P_m(x)P_n(x)$$

இருபுறமும் –1 முதல் +1 வரை தொகையிட,

வலப்புற இரண்டாம் கோவை, லெஜன்டர் பல்லுறுப்புகளின் செங்குத்துத் தன்மையினால் சுழியாகின்றது. எனவே,

$$\int_{-1}^{+1} \sum t^{2n} P_n^2(x)dx = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1 - 2xt + t^2}$$

$$\sum t^{2n} P_n^2(x)dx = -\frac{1}{2t}[\log(1 - 2xt + t^2)]_{-1}^{+1}$$

$$= -\frac{1}{2t} log\left(\frac{1 - 2t + t^2}{1 + 2t + t^2}\right) = -\frac{1}{2t} log\left(\frac{1 - t}{1 + t}\right)^2$$

$$= -\frac{2}{2t} log\left(\frac{1 - t}{1 + t}\right)$$

$$= -\frac{1}{t}log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$$

$$= \frac{1}{t}log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \frac{1}{t}[log(1+t) - \log(1-t)]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots\right)\right.$$

$$\left. - \left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots - \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{2}{t}\left[t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right]$$

$$= 2\left(1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \cdots + \frac{t^{2n}}{2n+1} + \cdots\right)$$

இருபுறமும் t^{2n} இன் குணகங்களை ஒப்பிட

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

மாதிரி–15

ஒரு m படி (Degree m) பல்லுறுப்பு லெஜன்டர் பல்லுறுப்புகளில்,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(x)$$

எனில்,

$$c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx$$

எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(x)$$

$$f(x) = c_o P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \cdots + c_m P_m(x) + \cdots$$

இருபுறமும் $P_m(x)$ ஆல் பெருக்கி **–1** முதல் **+1** வரை தொகையிட

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, P_m(x) dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left[c_o P_0(x) P_m(x) + c_1 P_1(x) P_m(x) + c_2 P_2(x) P_m(x) + \cdots\right.$$

$$\left. + c_m {P_m}^2(x) + \cdots \right] dx$$

பல்லுறுப்புகளின் செங்குத்துத்தன்மைப்படி, வலப்புறம்

$$= C_m \int_{-1}^{+1} [0 + 0 + \cdots + P_m^2(x) + 0 \ldots]\, dx$$

$$= C_m \int_{-1}^{+1} P_m^2(x) dx$$

$$= C_m \left(\frac{2}{2m+1}\right)$$

எனவே

$C_m = \left(\frac{2m+1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} f(x)\, P_m(x) dx$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

1.12 $P_n(x)$ இன் மடங்குகின்ற தொடர்புகள் (Recurrence relations)

வாய்பாடு I: $nP_n = (2n-1)xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}$

தீர்வு :

$$(1-2xt+t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum t^n P_n(x)$$

t ஐப் பொருத்து வகையிட,

$$\frac{-1}{2}(1-2xt+t^2)^{\frac{-3}{2}}(-2x+2t) = \sum nt^{n-1} P_n(x)$$

இருபுறமும் $(1-2xt+t^2)$ ஆல் பெருக்க

$$(1-2xt+t^2)^{\frac{-1}{2}}(x-t) = (1-2xt+t^2)\sum nt^{n-1} P_n(x)$$

$$(x-t)\sum t^n P_n(x) = (1-2xt+t^2)\sum nt^{n-1}P_n(x)$$

$$(x-t)(t^nP_n(x)+t^{n-1}P_{n-1}(x)+t^{n-2}P_{n-2}(x)+\cdots)$$

$$= \sum nt^{n-1}P_n(x) - 2x\sum nt^n P_n(x) + \sum nt^{n+1} P_n(x)$$

$$= \sum nt^{n-1}P_n$$
$$- 2x\{nt^n P_n + (n-1)t^{n-1}P_{n-1} + (n-2)t^{n-2}P_{n-2}$$
$$+ \cdots\}$$
$$+ \{nt^{n+1} P_n + (n-1)t^nP_{n-1} + (n-2)t^{n-1}P_{n-2} + ..\}$$

t^{n-1} இன் குணகங்களை ஒப்பிட

$$xP_{n-1} - P_{n-2} = nP_n - 2x(n-1)P_{n-1} + (n-2)\, P_{n-2}$$

$$nP_n = (2n-1)xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}$$

வாய்பாடு II:

$$xP_n' - P_{n-1}' = nP_n$$

தீர்வு :

$$(1-2xt+t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum t^n P_n(x) \qquad \to (1)$$

(1)ஐ tஐப் பொருத்து வகையிட

$$\frac{-1}{2}(1-2xt+t^2)^{\frac{-3}{2}}(-2x+2t) = \sum nt^{n-1} P_n \qquad \to (2)$$

(1)ஐ xஐப் பொருத்து வகையிட

$$\frac{-1}{2}(1-2xt+t^2)^{\frac{-3}{2}}(-2t) = \sum t^n P_n' \qquad \to (3)$$

(2)ஐ (3)ஆல் வகுக்க

$$\frac{x-t}{t} = \frac{\sum nt^{n-1} P_n}{\sum t^n P_n{}'}$$

$$(x-t)\sum t^n P_n{}' = t\sum nt^{n-1} P_n$$

t^n இன் குணகங்களை இருபுறமும் ஒப்பிட

$$xp_n' - P_{n-1}{}' = nP_n$$

வாய்பாடு III:

$$P_n' - xP_{n-1}' = nP_{n-1}$$

தீர்வு :

வாய்பாடு I இன் படி $nP_n = (2n-1)xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}$

xஐப் பொருத்து வகையிட

$$nP_n' = (2n-1)P_{n-1} + (2n-1)xP_{n-1}' - (n-1)P_{n-2}'$$

$$nP_n' = (2n-1)P_{n-1} + nxP_{n-1}' + (n-1)xP_{n-1}' - (n-1)P_{n-2}'$$

$$n[P_n' - xP_{n-1}'] = (n-1)[xP_{n-1}' - P_{n-2}'] + (2n-1)P_{n-1}$$

(வாய்பாடு II லிருந்து $xP_{n-1}' - P_{n-2}' = (n-1)P_{n-1}$ எனவே)

$$n[P_n' - xP_{n-1}'] = (n-1)[(n-1)P_{n-1}] + (2n-1)P_{n-1}$$

$$n[P_n' - xP_{n-1}'] = [(n-1)^2 + (2n-1)]P_{n-1}$$

$$= n^2 P_{n-1}$$

$$\therefore P_n' - xP_{n-1}' = nP_{n-1}$$

வாய்பாடு IV: $(x^2-1)P_n' = n[xP_n - P_{n-1}]$

தீர்வு

$P_n' - xP_{n-1}' = nP_{n-1}$ வாய்பாடு III $\rightarrow (1)$

$xP_n' - P_{n-1}' = nP_n$ வாய்பாடு II $\rightarrow (2)$

(2) ஐ x ஆல் பெருக்கி (1) இல் இருந்து கழிக்க

$(1-x^2)P_n' = n(P_{n-1} - xP_n)$

$(x^2-1)P_n' = n(xP_n - P_{n-1})$

வாய்பாடு V:

$$(x^2-1)P_n' = (n+1)(P_{n+1} - xP_n)$$

தீர்வு :

$np_n = (2n-1)xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}$ வாய்பாடு I $\rightarrow (1)$

nக்குப் பதிலாக $n+1$ஐப் பிரதியிட

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+2-1)xP_n - nP_{n-1}$$

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$$

$$(n+1)P_{n+1} = (n+1)xP_n + nxP_n - nP_{n-1}$$

$$(n+1)P_{n+1} = (n+1)xP_n + n(xP_n - P_{n-1})$$

$(x^2-1)P_n' = n(xP_n - P_{n-1})$ வாய்பாடு IV $\rightarrow (2)$

எனவே $(n+1)P_{n+1} = (n+1)xP_n + (x^2-1)P_n'$

$(x^2-1)P_n' = (n+1)(P_{n+1} - xP_n)$

மாதிரி 16

$$\int_{-1}^{+1} x^2 P_{n+1}(x) P_{n-1}(x)\,dx = \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

வாய்பாடு I இன் படி $nP_n = (2n-1)xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}$

அல்லது, $(2n-1)xP_{n-1} = nP_n + (n-1)P_{n-2}$ $\rightarrow (1)$

இதில், nஐ $n+2$ஆல் இடப்பெயர்வு செய்ய,

$$(2n+3)xP_{n+1} = (n+2)P_{n+2} + (n+1)P_n \quad \rightarrow (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஐப் பெருக்கி -1 முதல் $+1$ வரை தொகையிட

$$(2n+3)(2n-1)\int_{-1}^{+1} x^2 P_{n+1} P_{n-1}\,dx$$

$$= (n+2)n\int_{-1}^{+1} P_{n+2}P_n\,dx$$

$$+ (n+2)(n-1)\int_{-1}^{+1} P_{n+2}P_{n-2}\,dx + n(n+1)\int_{-1}^{+1} {P^2}_n\,dx$$

$$+ (n+1)(n-1)\int_{-1}^{+1} P_nP_{n-2}\,dx$$

பல்லுறுப்புகளின் செங்குத்துத் தன்மைப் படி

$$= 0 + 0 + n(n+1)\int_{-1}^{+1} P^2{}_n \, dx + 0$$

$$= n(n+1)\frac{2}{2n+1}$$

எனவே

$$\int_{-1}^{+1} x^2 P_{n+1} P_{n-1} dx = \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

1.13 லெஜன்டர் பல்லுறுப்புகள் (Legendre polynomials)

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ – ரோட்ரிக் வாய்பாடு

$n = 0$ எனில், $P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!} = 1$

$n = 1$ எனில், $P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1) = \frac{1}{2}2x = x$

$n = 2$ எனில், $P_2(x) = \frac{1}{2^2.2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{8}\frac{d}{dx}[2(x^2-1)2x]$

$$= \frac{1}{8}\frac{d}{dx}(4x^3-4x) = \frac{1}{8}(12x^2-4) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

இவ்வாறே, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

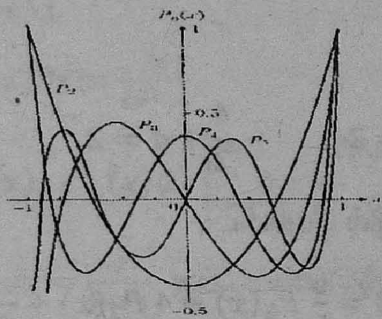
பொதுவாக,

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{N} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n r! (n-r)! (n-2r)!} x^{n-2r}$$

n இரட்டை எனில் $N = \frac{n}{2}$

n ஒற்றை எனில் $N = \frac{1}{2}(n-1)$

இவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரைபடத்தில் காட்டலாம்.



படம் 1.1 லெஜன்டர் பால்லுறுப்புகள்

மாதிரி – 17

x இன் சார்பு $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 7x + 2$ஐ லெஜன்டர் பல்லுறுப்புகளில் காட்டுக.

தீர்வு:

$$4x^3 + 6x^2 + 7x + 2 = a\,P_3(x) + b\,P_2(x) + c\,P_1(x) + d\,P_0(x) \quad \to (1)$$

$$= a\left[\frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}\right] + b\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}\right] + c(x) + d(1)$$

$$= \frac{5}{2}ax^3 - \frac{3ax}{2} + \frac{3bx^2}{2} - \frac{b}{2} + cx + d$$

$$= \frac{5}{2}ax^3 + \frac{3}{2}bx^2 + \left(c - \frac{3a}{2}\right)x - \frac{b}{2} + d$$

x இன் சமமான அடுக்குகளை ஒப்பிட

$\frac{5a}{2} = 4$ அல்லது $a = \frac{8}{5}$

$\frac{3b}{2} = 6$ அல்லது $b = 4$

$$c - \frac{3a}{2} = 7, \quad c - \frac{3}{2}\frac{8}{5} = 7, \quad c - \frac{12}{5} = 7, \; c = 7 + \frac{12}{5}$$
$$= \frac{47}{5}$$

$$-\frac{b}{2} + d = 2 \qquad -\frac{4}{2} + d = 2, \qquad d = 4$$

இம்மதிப்புகளை (1) இல் பிரதியிட

$4x^3 + 6x^2 + 7x + 2 = \frac{8}{5}\, P_3(x) + 4\, P_2(x) + \frac{47}{5}\, P_1(x) + 4\, P_0(x)$

ஆகும்.

பயிற்சி 1.3

1. கீழ்க்கண்ட சார்புகளை லெஜன்டர் பல்லுறுப்புகளில் காட்டுக.

$a)\ 1 + x - x^2 \quad b) x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$c) 1 + 2x - 3x^2 + 4x^3$

$d)\ x^3 + 1$ விடைகள். $a) -\frac{2}{3}\, P_2(x) + \; P_1(x) + \frac{2}{3}\, P_0(x)$

$$b) \frac{8}{35}\, P_4(x) + \frac{2}{5}\, P_3(x) + \frac{26}{21}\, P_2(x) + \frac{8}{5}\, P_1(x) + \frac{23}{15}\, P_0(x)$$

$$c) \frac{8}{5}\, P_3(x) - \; 2P_2(x) + \frac{22}{5}\, P_1(x)$$

$$d) \frac{2}{5}\, P_3(x) + \frac{3}{5}\, P_1(x) + \; P_0(x)$$

2. $a) x^5 = \frac{8}{63}\left[P_5(x) + \frac{7}{2}\, P_3(x) + \frac{27}{8}\, P_1(x) \right]$ எனக் காட்டுக.

கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க.

3. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

4. $\frac{1+t}{t(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty}[P_n(x) + P_{n+1}(x)]\, t^n$

5. $(a) \int_{-1}^{+1} P_n(x)dx = 0 \quad (n \neq 0) \qquad (b) \int_{-1}^{+1} x^3 P_3(x)dx = \frac{4}{35}$

6. $\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{(1-2xt+t^2}} = \frac{2t^n}{2n+1}$

7. $\int_{-1}^{+1} xP_n(x)\, P_{n-1}(x)dx = \frac{2n}{4n^2-1}$

8. $\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\; P'_m(x).\; P'_n(x)dx \begin{cases} = & 0, m \neq n \\ = \frac{2n(n+1)}{2n+1} & , m = n \end{cases}$

இதில் $\int_{-1}^{+1} P^2{}_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}$ ஐப் பயன்படுத்துக.

1.14 தொடர்பு கொண்ட லெஜண்டர் சார்புகள்

(Associated Legendre Functions)

ஒரு புள்ளி மின்னூட்டம் q, நமது ஆயங்களின் ஆதி (orgin) யில் அமைவதாகக் கருதுவோம். இதனால் r தொலைவிலுள்ள புள்ளியில் மின்புலச் செறிவு

$$\vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

ஆகும். இச்சமன்பாட்டின் காஸ் வடிவம் (Gauss Form)

$$\int_s \vec{E}.d\vec{\sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

ஆகும். s பரப்பிற்குள் அமையும் மின்னூட்டப் பங்கீட்டை

$q = \int_v \rho d\tau$ எனலாம்.

எனவே $\int_s \vec{E}.d\vec{\sigma} = \int_v \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau \quad ; \quad \int_v \vec{\nabla}.\vec{E}\, d\tau = \int_v \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau$

நாம் எடுத்துக் கொண்ட கனஅளவு யாதாமொரு கன அளவாகையினால்,

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

இது மேக்ஸ்வெலின் ஒரு சமன்பாடாகும். மின்புலச்செறிவை மின் அழுத்தத்தில் மாற்றி எழுத $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ ஆகும். φ – திசையிலி சார்பாகும். எனவே $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$ இது பாய்சான் சமன்பாடு எனப்படும். இதில் $\rho = 0$ எனில் மேற்கண்ட சமன்பாடு $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi = 0$ ஆகும். இது லாப்லாஸ் சமன்பாடாகும்.

மேற்கண்ட லாப்லாஸ் சமன்பாட்டை, மிகப்பெரிய கோளம் ஒன்றின் பரப்பில் ஏற்படும், வெப்பநிலை பகிர்விற்குப் பயன்படுத்துவோம். வெப்பநிலை பகிர்வைக் குறிக்கும் திசையிலி சார்பு (Scalar function) $\psi(r = a, \theta, \varphi) = \psi_0(\theta, \varphi)$ என்போம். வெப்பமூலம் கோளத்தின் பரப்பு $r = a$இல் உள்ளது. கோளத்தின் ஆரம் a. இதற்கான லாப்லாஸின், கோளக கோண தூர அயங்களில் (Spherical polar coordination) அமையும் சமன்பாடு

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] = 0$$ ஆகும்.

இதன் தீர்வு $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ என்க. இந்தப் பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டிலிருந்து, ஆயக்கூறுகளைப் பிரிக்க, θ கோண ஆயத்திற்கான சமன்பாடு $\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{sin^2\theta}\Theta + Q\theta = 0$ ஆகும்.

இச்சமன்பாட்டில் $Q = n(n+1)$; n நேர்முழு எண் எனில் இச்சமன்பாடு தொடர்பு கொண்ட லெஜன்டர் சமன்பாடு எனப்படும். எனவே இதனை ,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP_n^m(cos\theta)}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{sin^2\theta}\right]P_n^m(cos\theta) = 0 \rightarrow (1)$$

எனலாம்.

$cos\theta = x$ எனில், இச்சமன்பாடு

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n^m(x) - 2x\frac{d}{dx}P_n^m(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m(x) = 0$$

$\rightarrow (2)$

இச்சமன்பாட்டில் m^2 என்ற திசைவில் பிரிப்பு மாறிலி (azimuthal separation constant) சுழி எனில் மேற்கண்ட சமன்பாடு லெஜண்டர் சமன்பாட்டை ஒத்திருக்கும். மேற் கண்ட சமன்பாடு **(2)** இன் தீர்வுகள்,

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

இவை லெஜண்டர் தொடர்புச் சார்புகள் எனப்படும். இதில் $m > n$ எனில் $P_n^m(x) = 0$ ஆகும்.

<u>லெஜண்டர் தொடர்பு சார்புகளின் பிறப்பிக்கும் சார்பு</u>

$$\frac{(2n)!\,(1-t^2)^{\frac{n}{2}}}{2^n n!\,(1-2hx+h^2)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n+k}^n(t)\,h^k$$

எனவே தொடர்புடைய லெஜண்டர் சார்புகளின் பிறப்பிக்கும் சார்பு,

$$\frac{(2n)!\,(1-t^2)^{\frac{n}{2}}}{2^n n!\,(1-2hx+h^2)^{n+1}}$$

ஆகும்.

<u>ரோட்ரிக் வாய்பாடு</u>

$m \geq 0$ மற்றும் $0 \leq m \leq n$க்கு, லெஜண்டர் தொடர்பு சார்பு,

$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$ எனில், $\rightarrow (1)$

இதன் ரோட்ரிக் வாய்பாடு,

$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$ ஆகும். $\rightarrow (2)$

சமன்பாடு (1), $m \geq 0$ மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே பொருந்துவது. ஆனால் ரோட்ரிக் வாய்பாடு m இன் எதிர் (negative) மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும். அதாவது $n + m \geq 0$ அல்லது $m \geq -n$. இதற்கான சமன்பாடு,

$$P_n^{-m}(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n \quad \rightarrow (3)$$

லெஜன்டர் தொடர்பு சார்புகளின் செங்குத்துத் தன்மை.

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x)\ P_l^m(x)\, dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nl}, & n = l \\ 0, & n \neq l \end{cases} \text{ எனில்} \quad \rightarrow (4)$$

மடங்கும் தொடர்புகள்

$$(2n+1)x\ P_n^m(x) = (n-m+1)\ P_{n+1}^m(x) + (n+m)\ P_{n-1}^m(x) \quad \rightarrow (5)$$

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad \rightarrow (6)$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_n^m(x) = P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-2}^{m+1}(x) \quad \rightarrow (7)$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_n^m = \frac{1}{2} P_n^{m+1}(x) - \frac{1}{2}(n+m)(n-m+1)\ P_n^{m-1}(x) \quad \rightarrow (8)$$

(5). (6). (7) மற்றும் (8) லெஜன்டர் தொடர்பு சார்புகளின் சில, மடங்கும் தொடர்புகளாகும்.

1.15 பெசலின் வகைக்கெழு சமன்பாடு (Bessel's Differential equation)

ஒரு உருளையினுள் ஒலி அலைவுகளை ஆராய்ந்து பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடானது உருளை ஆயங்களில் (cylindrical coordinates) பிரிக்கப்பட்டு, ஆர (radial) வகை மற்றும் கோண (angular)

மாறிகளில் சமன்பாடுகள் அமைக்கப்படும் போது பெசல் சமன்பாடு பெறப்படுகிறது. பெசலின் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

என்ற வடிவில் அமையும்.

$x = 0$ என்ற புள்ளி சிறப்புப் புள்ளியாகும் (Singular point). எனினும் இது களையத்தக்க சிறப்புப்புள்ளியாகும். எனவே பூஸ் தேற்றப்படி (fusch theorem) மேற்கண்ட சமன்பாடு, தொடர் தொகையிடல் மூலம் தீர்க்கக் கூடியதாகும்.

உயரும் x ன் அடுக்குகளைக் கொண்ட தொடராக அமையும் தீர்வை

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r}$$

எனலாம். எனவே

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (k+r) x^{k+r-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}$$

இம்மதிப்புகளை (1) இல் பிரதியிட,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left[(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} + \frac{1}{x}(k+r)x^{k+r-1} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)x^{k+r}\right] a_r \equiv 0$$

அல்லது

$$\sum_{r=0}^{\infty}[\{(k+r)(k+r-1)+(k+r)-n^2\}x^{k+r-2}+x^{k+r}]a_r \equiv 0$$

அல்லது

$$\sum_{r=0}^{\infty}[\{(k+r)^2-n^2\}x^{k+r-2}+x^{k+r}]a_r \equiv 0 \qquad \rightarrow (2)$$

சமன்பாடு (2) ஒரு முற்றொருமையாகும் (identity). எனவே xஇன் வெவ்வேறு அடுக்குகளைச் சுழிக்குச் சமமெனலாம். சமன்பாடு (2)ல், $r = 0$ மதிப்பிற்கு x^{k-2}இன் குணகம் $(k^2-n^2)a_0 = 0$ இது முதலாவது கோவையாக இருப்பதால் $a_0 \neq 0$.

எனவே $k^2-n^2 = 0$ அல்லது $k = \pm n$ $\qquad \rightarrow (3)$

அடுத்ததாக $r = 1$ மதிப்பிற்கு x^{k-1}இன் குணகம் $\{(k+1)^2-n^2\}a_1 = 0$

kஇன் மதிப்பு $\pm n$ எனில் $(k+1)^2-n^2 \neq 0$ எனவே $a_1 = 0$.

எனவே பொதுவான கோவையில் x^{k+r}இன் குணகம்,

$$\{(k+r+2)^2-n^2\}a_{r+2}+a_r = 0$$

இது சமன்பாடு (2) இல் $r = r+2$ என்ற மதிப்பைப் பிரதியிடப் பெறப்பட்டதாகும். எனவே,

$$a_{r+2} = -\frac{a_r}{(k+r+2-n)(k+r+2+n)} \qquad \rightarrow (4)$$

<u>வகை I</u> $\quad k = +n$ எனில் $a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)}$, $r = 0$க்கு

மேலும் $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2n+4)} = \frac{a_0}{2.4(2n+2)(2n+4)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2n+6)} = -\frac{a_0}{2.4.6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}$$

....

....

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r a_0}{2.4.6 \ldots 2r(2n+2)(2n+4) \ldots (2n+2r)}$$

எனவே தொடர் தீர்வானது

$$y = a_0 \left[x^n - \frac{x^{n+2}}{2(2n+2)} + \frac{x^{n+4}}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \ldots \right]$$

$$= a_0 x^n \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \ldots \frac{(-1)^r x^{2r}}{2.4 \ldots 2r(2n+2)(2n+4) \ldots (2n+2r)} + \cdots \right]$$

$$y = a_0 x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{2^r r!\, 2^r (n+1)(n+2) \ldots (n+r)} \qquad \rightarrow (5)$$

இதில் a_0 யாதாமொரு மாறிலியாகும்.

$a_0 = \frac{1}{2^n \lceil(n+1)}$ எனில் மேற்கண்ட தீர்வு $J_n(x)$ எனப்படும், பெசல் சார்பாகும். எனவே

$$J_n(x) = \frac{1}{2^n \lceil(n+1)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{n+2r}}{2^{2r} r!\,(n+1)(n+2) \ldots (n+r)}$$

$\lceil(n+1) = n!$ எனவே

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{n+2r}}{2^{n+2r} r!\, n!\,(n+1)(n+2) \ldots (n+r)}$$

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

வகை II $k = -n$ எனில்

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(-n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

எனவே பெசல் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$

இதில் A, B என்பன யாதாமொரு மாறிலிகளாகும்.

1.16 பிறப்பிக்கும் சார்பு (Generating function)

- பெசல் சார்புகள் (குணகங்கள்) கீழ்க்கண்ட சார்பின் விரிவாக்கத்தில், t அடுக்குகளின் குணகங்களாக அமையும். பிறப்பிக்கும் சார்பு,

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

$$= e^{\frac{xt}{2}} . e^{\frac{-x}{2t}}$$

விரிவாக்க,

$$e^{\frac{xt}{2}} = 1 + \frac{xt}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{t^2}{2!} + \left(\frac{x}{2}\right)^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r t^r}{2^r r!}$$

$$e^{\frac{-x}{2t}} = 1 - \frac{x}{2}\frac{t^{-1}}{1!} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{t^{-2}}{2!} - \left(\frac{x}{2}\right)^3 \frac{t^{-3}}{3!} + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^s}{2^s t^s s!}$$

$$\therefore e^{\frac{xt}{2}} \cdot e^{\frac{-x}{2t}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r t^r}{2^r r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^s}{2^s t^s s!}$$

இத்தொடரில், t^nஇன் குணகத்தைப் பெற $r = n + s$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

$$e^{\frac{xt}{2}} \cdot e^{\frac{-x}{2t}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{n+s}(-1)^s}{2^{n+s}(n+s)!} \frac{x^s}{2^s s!} t^n$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \frac{1}{s!\,(n+s)!} t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) t^n$$

t^{-n} இன் குணகத்தைப் பெற $s = n + r$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

எனவே $e^{\frac{xt}{2}} \cdot e^{\frac{-x}{2t}} = (-1)^n J_n(x)$

$$= \sum J_{-n}(x)$$

இவற்றை இணைத்து

$$e^{\frac{xt}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x)$$

எனலாம்.

1.17 பெசல் சார்புகளின் செங்குத்துத் தன்மை (Orthogonality of Bessel functions)

$$\int_0^1 x J_n(\propto x) \,.\, J_n(\beta x) dx = 0$$

இதில் $\propto, \beta$ என்பன $J_n(x) = 0$ ன் வெவ்வேறு மூலங்களாகும்.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\propto^2 x^2 - n^2)y = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

$$x^2 \frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} + (\beta^2 x^2 - n^2)z = 0 \qquad \rightarrow (2)$$

(1) இன் தீர்வு $y = J_n(\propto x)$

(2) இன் தீர்வு $z = J_n(\beta x)$

(1)ஐ $\frac{z}{x}$ ஆலும் (2)ஐ $-\frac{y}{x}$ ஆலும் பெருக்கி அவற்றைக் கூட்ட

$$x\left[z\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{d^2z}{dx^2}\right]+\left[z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right]+(\propto^2-\beta^2)xyz=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\left\{z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right\}\right]+(\propto^2-\beta^2)xyz=0 \qquad \rightarrow (3)$$

தொகையிட,

$$x\left[z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right]_0^1+(\propto^2-\beta^2)\int_0^1 xyzdx=0$$

$$(\beta^2-\propto^2)\int_0^1 xyzdx=\left[x\left\{z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right\}\right]_0^1$$

$$=\left[z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right]_{x=1} \qquad \rightarrow (4)$$

ஆனால் $y=J_n(\propto x)$

$$\frac{dy}{dx}=\propto J_n{}'(\propto x)$$

$$z=J_n(\beta x)$$

$$\frac{dz}{dx}=\beta J_n{}'(\beta x)$$

இம்மதிப்புகளை (4) இல் பிரதியிட

$$(\beta^2-\propto^2)\int_0^1 xJ_n(\propto x)\,J_n(\beta x)dx$$

$$=[\propto J_n{}'(\propto x)J_n(\beta x)-\beta J_n{}'(\beta x)J_n(\propto x)]_{x=1}$$

$$=[\propto J_n{}'(\propto)J_n(\beta)-\beta J_n{}'(\beta)J_n(\propto)] \qquad \rightarrow (5)$$

$\propto$ மற்றும் β, $J_n(x)=0$இன் மூலங்கள். எனவே $J_n(\propto)=J_n(\beta)=0$ (5) இல் பிரதியிட

$$(\beta^2-\propto^2)\int_0^1 xJ_n(\propto x).J_n(\beta x)dx=0$$

$$\therefore \int_0^1 xJ_n(\propto x).J_n(\beta x)dx=0$$

இது பெசல் சார்பின் செங்குத்துத் தொடர்பாகும்.

1.18 $J_n(x)$இன் மடங்குகின்ற தொடர்புகள் (Recurring Relations of Bessel Functions)

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

இதில் n ஒரு நேர் முழு எண்ணாகும்.

$$J_n'^{(x)} = \frac{d}{dx}\{J_n(x)\}$$

எனவே

$$J_n'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s(n+2s)}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$xJ_n'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s(n+2s)}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s n}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} + \left(\frac{x}{2}\right)\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s 2s}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s-1}$$

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) + x\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s-1)!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s-1}$$

இரண்டாவது கோவையில் $s = 0$ எனில், $(s-1)! = -1!$ இம்மதிப்பை அனுமதிக்க முடியாது. எனவே அதன் எல்லை $s = 1$ முதல் $s = \infty$ வரையாகும்.

வாய்பாடு-I $s = r + 1$ எனில்,

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) + x\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r!\,(n+r+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r+1}$$

$$= nJ_n(x) - x\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,(n+r+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r+1}$$

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \qquad \rightarrow (1)$$

வாய்பாடு-II

$$J_n'(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(n+2s)}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$xJ_n'(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(n+2s)}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(2n+2s)}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} - n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

$$= x\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(n+s)}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\frac{2}{x} - n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

$$= x\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,(n+s-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s-1} - n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

$$x\,J_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \qquad \rightarrow (2)$$

வாய்பாடு-III

சமன்பாடு (1), $xJ_n{}'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$

சமன்பாடு (2), $xJ_n{}'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$

(1) மற்றும் (2)ஐக் கூட்ட $2xJ_n{}'(x) = xJ_{n-1}(x) - xJ_{n+1}(x)$

அல்லது $2J_n'^{(x)} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$ $\rightarrow (3)$

வாய்பாடு-IV

சமன்பாடு (1) இல் இருந்து (2)ஐக் கழிக்க,

$$0 = 2nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) - xJ_{n-1}(x)$$

அல்லது $2nJ_n(x) = x[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$ $\rightarrow (4)$

வாய்பாடு-V

வாய்பாடு-I இ ன் படி $x\,J_n{}'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$ இதை x^{-n-1} ஆல் பெருக்க

$x^{-n}\,J_n' = nx^{-n-1}\,J_n - x^{-n}J_{n+1}$

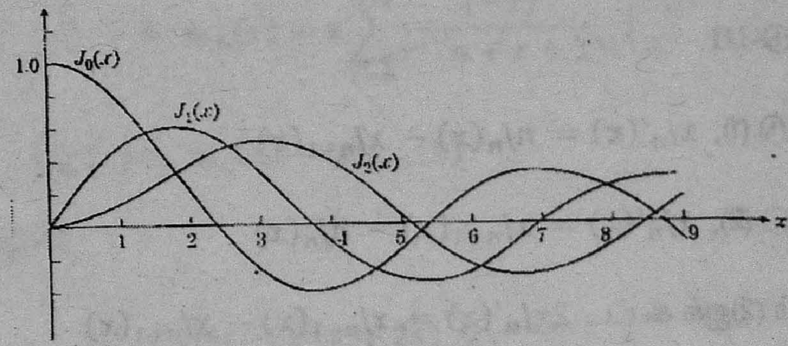
$x^{-n}\,J_n' - nx^{-n-1}\,J_n = -x^{-n}J_{n+1}$ அல்லது $\frac{d}{dx}[x^{-n}Jn] = -x^{-n}J_{n+1}$ $\rightarrow (5)$

வாய்பாடு-VI

வாய்பாடு IIலிருந்து $x\,J_n' = -nJ_n + xJ_{n-1}$ இதை x^{n-1}ஆல் பெருக்க

$x^n\,J_n' = -nx^{n-1}J_n + x^nJ_{n-1}$

$x^n\,J_n' + nx^{n-1}J_n = x^nJ_{n-1}$ அல்லது $\frac{d}{dx}[x^nJn] = x^nJ_{n-1}$ $\rightarrow (6)$



படம் 1.2 பெசல் சார்புகள்

மாதிரி–18

நிரூபிக்க $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, n ஒரு நேர் முழு எண்.

தீர்வு :

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,(-n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

$-n+r+1 = 0$ எனில் $r = n-1$ மற்றும் $\Gamma(0) = \infty$ எனவே $r = n-1$ வரையிலான கோவைகள் மேற்கண்ட கூட்டுத்தொகையில் சுழியாகும். எனவே கீழ் எல்லையை $r = n$ லிருந்து எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். எனவே

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=n}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,(-n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

இப்போது $r = n+s$ என்க

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{n+s} \frac{1}{(n+s)!\,(-n+n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2n+2s}$$

$$= (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s!\,(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

எனவே, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

மாதிரி–19.

நிரூபிக்க $J_2'(x) = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) J_1(x) + \frac{2}{x} J_0(x)$, இதில் $J_n(x)$ முதல் வகை பெசல் சார்பு.

தீர்வு :

(2)வது மடங்கும் விதிப்படி

$$xJ_n'(x) = -nJ_n + xJ_{n-1} \qquad \rightarrow (1)$$

$n = 2$ எனில், $xJ_2'(x) = -2J_2 + xJ_1$

$$J_2'(x) = \frac{-2}{x} J_2 + J_1 \qquad \rightarrow (2)$$

(1)வது மடங்கும் விதிப்படி, $xJ_n'(x) = nJ_n - xJ_{n+1}$ $\rightarrow (3)$

(1) மற்றும் (3) இல் இருந்து, $-nJ_n + xJ_{n-1} = nJ_n - xJ_{n+1}$

$n = 1$ எனில், $-J_1 + xJ_0 = J_1 - xJ_2$ அல்லது $\frac{-J_1}{x} + J_0 = \frac{J_1}{x} - J_2$ அல்லது

$$J_2 = \frac{2}{x} J_1 - J_0 \qquad \rightarrow (4)$$

(4)ஐ (2) இல் பிரதியிட

$$J_2' = \frac{-2}{x}\left(\frac{2}{x}J_1 - J_0\right) + J_1 = \frac{-4}{x^2}J_1 + \frac{2}{x}J_0 + J_1$$

$$J_2' = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) J_1 + \frac{2}{x} J_0 \,.$$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

மாதிரி–20

$\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$$x^n J_n(x) = x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,(n+r)!} \frac{x^{2n+2r}}{2^{n+2r}}$$

$$\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2n+2r)}{r!\,(n+r)!\,2^{n+2r}} x^{2n+2r-1}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2(n+r)}{r!\,(n+r)!} \frac{x^{n+2r-1}}{2^{n+2r}}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,(n+r-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}$$

$$= x^n J_{n-1}(x)$$

எனவே $\frac{d}{dx}\{x^n J_n\} = x^n J_{n-1}$

மாதிரி–21.

நிரூபிக்க $\frac{d}{dx}\{x J_n J_{n+1}\} = x(J_n^2 - J_{n+1}^2)$

தீர்வு :

$$\frac{d}{dx}\{x J_n J_{n+1}\} = J_n J_{n+1} + x \frac{d}{dx}(J_n J_{n+1})$$

$$= J_n J_{n+1} + x(J_n J'_{n+1} + J'_n J_{n+1})$$

$$= J_n J_{n+1} + (xJ'_n)J_{n+1} + J_n(xJ'_{n+1}) \quad \rightarrow (1)$$

மடங்கும் பண்பு (1) இல் இருந்து , $xJ'_n = nJ_n - xJ_{n+1}$ $\rightarrow (2)$

மடங்கும் பண்பு (2) இல் இருந்து, $xJ'_n = -nJ_n + xJ_{n-1}$

இதில் nக்குப் பதிலாக $n+1$ ஐப் பிரதியிட

$$xJ'_{n+1} = -(n+1)J_{n+1} + xJ_n \quad \rightarrow (3)$$

(2) மற்றும் (3)ஐ (1) இல் பிரதியிட

$$\frac{d}{dx}\{xJ_n J_{n+1}\} = J_n J_{n+1} + (nJ_n - xJ_{n+1})J_{n+1} + J_n[-(n+1)J_{n+1} + xJ_n]$$

$$= (1 + n - n - 1)J_n J_{n+1} + x(J_n^2 - J_{n+1}^2)$$

$$\frac{d}{dx}\{xJ_n J_{n+1}\} = x(J_n^2 - J_{n+1}^2)$$

MADURAI KAMARAJ UNIVERSITY * DR. T.P.M. LIBRARY *

பயிற்சி 1.4

நிரூபிக்க

1. $J_3(x) + 3J'_0(x) + 4J'''_0(x) = 0$
2. $\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x)$
3. a) $\int_0^{\pi} x^{n+1}J_n(x)dx = x^{n+1}J_{n+1}(x), \quad n > -1$

   b) $x^2J''_n(x) = (n^2 - n - x^2)J_n(x) + xJ_{n+1}(x)$
4. $\int x^2 J_0 J_1 dx = \frac{1}{2}x^2 J'_0 + c$

5. $J_1'' = \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)J_1(x) - \frac{1}{x}J_0(x)$

6. $4J_0'''(x) + 3J_0(x) + J_3(x) = 0$

7. $\int J_3(x)dx = c - J_2(x) - \frac{2}{x}J_1(x)$

8. $\int xJ_0^2(x)dx = \frac{1}{2}x^2[J_0^2(x) + J_1^2(x)]$

1.19 ஹெர்மைட் சார்புகள் (Hermite Functions)

குவாண்டம் இயற்பியலில் எளிய சீரிசை அலைவி (Simple harmonic oscillator)யின் இயக்கச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாக ஹெர்மைட் பல்லுறுப்புகள் அமைகின்றன.

ஹெர்மைட்டின் வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2\lambda y = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

இதில் λ ஒரு மாறிலி. இச்சமன்பாட்டிற்கான தளத்தில் சிறப்புப் புள்ளிகள் இல்லை (No singularities). எனவே இது தொடர் தீர்வைக் கொண்டிருக்கும். இத்தீர்வை,

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} \qquad \rightarrow (2)$$

என்போம். இதன் வகைக்கெழு,

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(k+r)x^{k+r-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}$$

இவற்றைச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட

$$\sum_{r=0}^{\infty}[(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}-2(k+r-\lambda)x^{k+r}]\,a_r \equiv 0 \quad \rightarrow (3)$$

வெவ்வேறு அடுக்கைக் கொண்ட x ன் குணகங்கள் தனித்தனியாகச் சுழிக்குச் சமமாக வேண்டும்.

(2) இன் படி r இன் மதிப்பு எதிர் மதிப்பாக இருக்க முடியாது. எனவே r இன் சிறும மதிப்பு, சுழியாகும். இதன்படி (3) இல் x இன் குறைந்த அடுக்கு $k-2$ ஆகும். (3) இல் x^{k-2}இன் குணகம்

$$a_0k(k-1)=0 \quad \rightarrow (4)$$

$a_0 \neq 0$ எனவே $k=0$ அல்லது $k=1$

x^{k-1} இன் குணகம் $k(k+1)a_1=0 \quad \rightarrow (5)$

$k=0$ எனில் (5) இன் படி k மற்றும் a_1 சுழியாகலாம். $k=1$ எனில் (5) இன் படி $a_1=0$

x^{k+2} இன் குணகங்களைச் சமன்பாடு (3) இல் ஒப்பிட, பொதுவான தொடர்பைப் பெறலாம்.

$$a_{r+2}(k+r+2)(k+r+1)-2a_r(k+r-\lambda)=0$$

$$a_{r+2}=\frac{2(k+r-\lambda)}{(k+r+2)(k+r+1)}a_r \quad \rightarrow (6)$$

இது குணகங்களின் மடங்கும் தொடர்பாகும் (Recurrence relation). எனவே a_0 தெரியுமானால் a_2, a_4, a_6 … ஆகியவை அறியப்படும். a_0 யாதாமொரு மாறிலியாகும். kஇன் 0 மற்றும் 1 என்ற மதிப்புகளுக்கு இரு வகை தீர்வுகள் கிடைக்கப்பெறும்.

வகை I

$k = 0$க்கு சமன்பாடு (6) ஆனது

$$a_{r+2} = \frac{2r - 2\lambda}{(r+2)(r+1)} a_r \qquad \rightarrow (7)$$

$r = 0$ என்க

$$a_2 = \frac{-2\lambda}{2!} a_0$$

$$a_3 = \frac{-2(\lambda - 1)}{3.2} a_1 = \frac{-2(\lambda - 1)}{3!} a_1$$

$$a_4 = \frac{-2(\lambda - 2)}{4.3} a_2 = \frac{(-2)^2 \lambda(\lambda - 2)}{4!} a_0$$

$$a_5 = \frac{(-2)^2 (\lambda - 1)(\lambda - 3)}{5!} a_1$$

$$a_{2r} = \frac{(-2)^r \lambda(\lambda - 2) \dots (\lambda - 2r + 2)}{(2r)!} a_0$$

$$a_{2r+1} = \frac{(-2)^r (\lambda - 1)(\lambda - 3) \dots (\lambda - 2r + 1)}{(2r+1)!} a_1$$

$a_1 = 0$ எனில் $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 \dots = 0$

$a_1 \neq 0$ எனில் $k = 0$க்கு (2) இல் இருந்து

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 \dots$$

$$= a_0 \left[1 - \frac{2\lambda}{2!} x^2 + \frac{2^2 \lambda(\lambda - 2)}{4!} x^4 - \dots + \frac{(-1)^r 2^r \lambda(\lambda - 2) \dots (\lambda - 2r + 2) x^{2r}}{(2r)!} + \dots \right]$$

$$+ a_1 x \left[1 - \frac{2(\lambda - 1)}{3!} x^2 + \frac{2^2 (\lambda - 1)(\lambda - 3)}{5!} x^4 + \dots (-1)^r \frac{2^r (\lambda - 1)(\lambda - 3) \dots (\lambda - 2r + 1)}{(2r+1)!} x^{2r} \dots\dots\dots \right] \qquad \rightarrow (8)$$

$$= a_0\left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r 2^r}{(2r)!} \lambda(\lambda-2),,,(\lambda-2r+2)x^{2r}\right]$$

$$+ a_1\left[x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r 2^r}{(2r+1)!} (\lambda-1)(\lambda-3),,,(\lambda-2r+1)x^{2r+1}\right] (9)$$

வகை II

$k = 1$ எனில் $a_1 = 0$ (6) இல் $r = 0, 1,2,3\ldots..$ எனப் பிரதியிட

$$a_2 = \frac{-2(\lambda-1)}{3!} a_0$$

$$a_4 = \frac{(-2)^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} a_0$$

....

$$a_{2r} = (-1)^r \frac{2^r(\lambda-1)(\lambda-3)\ldots(\lambda-2r+1)}{(2r+1)!} a_0$$

எனவே தீர்வு

$$y = a_0 x\left[1 - \frac{2(\lambda-1)}{3!}x^2 + \frac{2^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^r 2^r(\lambda-1)(\lambda-3)\ldots(\lambda-2r+1)}{(2r+1)!}x^{2r} + \cdots\right] \rightarrow (10)$$

தீர்வு (10) ஆனது தீர்வு (8) இல் அடங்கும். ஹெர்மைட் சமன்பாடு இரண்டு தன்னிச்சையான தீர்வுகளைப் பெற $k = 0$ ஆனாலும் a_1உம் சுழியாக வேண்டும். எனவே 8–லிருந்து

$$y = a_0\left[1 - \frac{2\lambda}{2!}x^2 + \frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4\right.$$

$$\left. + (-1)^r\frac{2^r}{(2r)!}\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)\ldots(\lambda-2r+2)x^{2r} + \ldots\right] \rightarrow (11)$$

(1) இன் முழுத்தீர்வு

$$y = A\left[1 - \frac{2\lambda}{2!}x^2 + \frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4 - \cdots\right] + B\left[1 - \frac{2(\lambda-1)}{3!}x^2 + \frac{2^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^4 + \cdots\right] \rightarrow 12)$$

A மற்றும் B யாதாமொரு (Arbitrary) மாறிலிகளாகும்.

1.20 ஹெர்மைட் பல்லுறுப்பின் பிறப்பிக்கும் சார்பு (Generating Function)

$$e^{[x^2-(t-x)^2]} = e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \rightarrow (1)$$

ஹெர்மைட் பல்லுறுப்பானது, n இன் முழு எண் மதிப்புகளுக்கும், x இன் மெய் (Real) மதிப்புகளுக்கும் (1) இன் படி வரையறை செய்யப்படுகிறது.

மேற்கண்ட அடுக்குத் தொடரில் t^nஇன் குணகங்களைக் காண வேண்டும்.

$$e^{-t^2+2tx} = e^{-t^2}.e^{2tx} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^s}{s!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2tx)^r}{r!}$$

$$= \sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(2x)^r}{s!\,r!}t^{r+2s}$$

sஇன் குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு $r + 2s = n$ எனக் கொண்டு t^nஇன் குணகங்களைப் பெறலாம். $r = n - 2s$ எனில், t^nஇன் குணகம்

$$= \sum \frac{(-1)^s (2x)^{n-2s}}{s!\,(n-2s)!}$$

$r = n - 2s$; rஇன் எல்லை ≥ 0 எனவே $n - 2s \geq 0;$ $\quad s \leq \frac{n}{2}$

n இரட்டை எனில் $s = \frac{n}{2}$

n ஒற்றை எனில் $s = \frac{n-1}{2}$

எனவே e^{-t^2+2tx}ல் t^nஇன் குணகம்

$$\sum_{s=0}^{n/2} (-1)^s \frac{1}{s!\,(n-2s)!} (2x)^{n-2s}$$

சமன்பாடு (1)உடன் ஒப்பிட

$$H_n(x) = \sum_{s=0}^{n/2} (-1)^s \frac{n!}{s!\,(n-2s)!} (2x)^{n-2s}$$

1.21 ஹெர்மைட் பல்லுறுப்பின் ரோட்ரிக் வாய்பாடு

ஹெர்மைட்டின் பிறப்பிக்கும் சார்பை, t ஐப் பொருத்து n தடவைகள் வகையீடு கண்டு அதில் tஐச் சுழிக்குச் சமமாகக் கொண்டால் கிடைப்பதே $H_n(x)$ இன் ரோட்ரிக் வாய்பாடு ஆகும். இது

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ ஆகும்.

டெய்லர் தேற்றத்தின் படி

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^n F}{dt^n}\right)_{t=0} \frac{t^n}{n!}$$

$$G(x,t) = e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

$$H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}(e^{2tx-t^2})\right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2-(x-t)^2}\right]_{t=0}$$

$$= \left[e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}$$

ஆனால் $\frac{\partial}{\partial t} f(x-t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x-t)$

அல்லது $\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(x-t) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x-t)$

எனவே $H_n(x) = e^{x^2}(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(x-t)^2}\Big|_{t=0}$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-x^2}$$

இது ஹெர்மைட் பல்லுறுப்பின் ரோட்ரிக் வாய்பாடு எனப்படும்.

1.22 ஹெர்மைட் பல்லுறுப்புகளின் செங்குத்துப் பண்பு (Orthogonal Property)

பிறப்பிக்கும் சார்பிலிருந்து,

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \quad \rightarrow (1)$$

$$e^{-s^2+2sx} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x)\frac{s^m}{m!} \quad \rightarrow (2)$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2tx} . e^{-s^2+2sx} . e^{-x^2} dx$$ என்க $\rightarrow (3)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-s^2} . e^{-x^2+2x(t+s)} dx$$

ஆனால் $-x^2 + 2(t+s)x = -x^2 + 2(t+s)x + (s+t)^2 - (s+t)^2$

$$= -[x-(s+t)]^2 + (s+t)^2$$

எனவே

$$I = e^{-t^2-s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+t)^2-[x-(s+t)]^2} dx$$

$$= e^{-t^2-s^2} . e^{(s+t)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[x-(s+t)]^2} dx$$

$x-(s+t) = u$ என்க

$dx = du$

எனவே

$$I = e^{-t^2-s^2+s^2+t^2+2st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = e^{2st} \sqrt{\pi} \quad \left[\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}\right]$$

அல்லது $I = \sqrt{\pi} \sum \frac{2^n t^n s^n}{n!}$ $\rightarrow (4)$

(3) இல் இருந்து

$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \frac{t^n s^m}{n!m!}$ $\rightarrow (5)$

(4) மற்றும் (5)ஐ ஒப்பிட ,

$t^n s^m$ இன் குணகங்கள் $n \neq m$ எனில் சுழியாகும்.

$n = m$ எனில்

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\; H_n(x)\, H_m(x) dx = \; 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\,,$$

எனவே (4), (5) இல் இருந்து, செங்குத்துப் பண்பை,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\; H_n(x)\, H_m(x) dx = \; 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\;\; \delta_{mm}$$

எனலாம். க்ரானேக்கர் டெல்டா, $\delta_{mm} \begin{cases} = 1, & n \neq m \\ = 0, & n = m \end{cases}$ எனில்.

1.23 ஹெர்மைட் பல்லுறுப்பின் மடங்குகின்ற பண்புகள் (Recurring relations)

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \qquad \rightarrow (1)$$

$(i)\ 2n\, H_{n-1}(x) = H_n'(x)$

(1)ஐ xஐப் பொருத்து வகையிட,

$$2te^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n$$

$$2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n$$

$$2 \sum \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = \sum \frac{H_n'(x)}{n!} t^n$$

இருபுறமும் t^n இன் குணகங்களை ஒப்பிட

$$2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_n'(x)}{n!} = \frac{H_n'(x)}{n(n-1)!}$$

$$2n\,H_{n-1}(x) = H_n'(x) \qquad \rightarrow (2)$$

(ii) $\boldsymbol{2x\,H_n(x) - 2n\,H_{n-1}(x) = H_{n+1}(x)}$

சமன்பாடு (1)ஐ tஐப் பொருத்து வகையிட

$$(2x-2t)e^{2tx-t^2} = \sum \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1}$$

$$= \sum \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1}$$

வலப்புறக்கோவையில் $n = 0$வுக்கான கோவை இருக்க முடியாது.

$$2xe^{2tx-t^2} - 2te^{2tx-t^2} = \sum \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1}$$

$$2x\sum \frac{H_n(x)}{n!} t^n - 2\sum \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = \sum \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1}$$

t^nஇன் குணகங்களை ஒப்பிட,

$$2x\frac{H_n(x)}{n!} - 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_{n+1}(x)}{n!}$$

$$2x\frac{H_n(x)}{n!} - 2n\frac{H_{n-1}(x)}{n!} = \frac{H_{n+1}(x)}{n!}$$

அல்லது $2x\,H_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = H_{n+1}(x)$ $\rightarrow (3)$

(iii) $\boldsymbol{H_n''(x) = 2\,H_n(x) + 2xH_n'(x) - H'_{n+1}(x)}$

சமன்பாடுகள் (2) மற்றும் (3) ஐக் கூட்ட

$$2x\,H_n(x) = H_n'(x) + H_{n+1}(x)$$

அல்லது $H_n'(x) = 2x\, H_n(x) - H_{n+1}(x)$ $\rightarrow (4)$

சமன்பாடு (4)ஐ வகையிட

$$H_n''(x) = 2\, H_n(x) + 2x\, H_n'(x) - H_{n+1}'(x) \rightarrow (5)$$

ஹெர்மைட்டின் சமன்பாட்டைப் பெறுதல்

சமன்பாடு (2) இல் nக்கு $n+1$ஐப் பிரதியீடு செய்ய,

$$2(n+1)\, H_n(x) = H_{n+1}'(x)$$

$H_{n+1}'(x)$இன் இம்மதிப்பைச் சமன்பாடு (5) இல் பிரதியிட

$$H_n''(x) = 2\, H_n(x) + 2x\, H_n'(x) - 2(n+1)\, H_n(x)$$

$$= 2\, H_n(x) + 2x\, H_n'(x) - 2n\, H_n(x) - 2H_n(x)$$

அல்லது $H_n''(x) - 2x\, H_n'(x) + 2n\, H_n(x) = 0$

இது ஒரு ஹெர்மைட் சமன்பாடாகும். எனவே $y = H_n(x)$இதன் தீர்வு என்பது தெளிவாகிறது.

1.24 ஹெர்மைட்டின் சில பல்லுறுப்புகள்

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ ரோட்ரிக் வாய்பாடு

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2} \frac{d^0}{dx^0}\left(e^{-x^2}\right) = 1$$

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right) = -e^{x^2}(-2x)e^{-x^2} = 2x$$

$$H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right) = e^{x^2} \frac{d}{dx}\left[-2xe^{-x^2}\right]$$

$$= e^{x^2}\left[(-2x)(-2x)e^{-x^2} - 2e^{-x^2}\right]$$

$$= e^{x^2}\left[4x^2 - 2\right]e^{-x^2} = 4x^2 - 2$$

இவ்வாறு

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

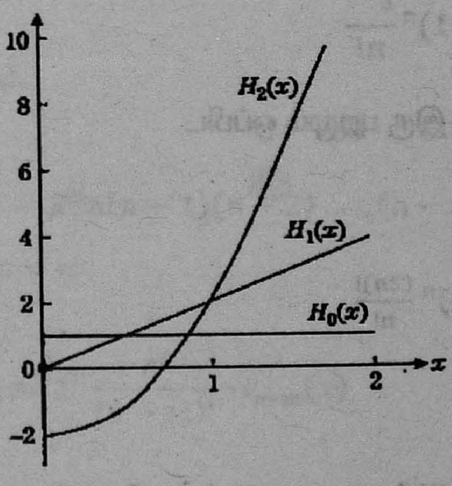
$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$

$$H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$$

$$H_9(x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$$

$$H_{10}(x) = 1024x^{10} - 23040x^8 + 161280x^6 - 403200x^4 + 312400x^2 - 30240$$



படம் 1.3 ஹெர்மைட் பல்லுறுப்புகள்

மாதிரி–22

நிரூபிக்க $(i)\ H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{2n!}{n!}$

$(ii)\ H_{2n+1}(0) = 0$

தீர்வு :

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

$x = 0$ என்க.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(0) = e^{-t^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$$

t^{2n}இன் குணகங்களை இரு புறமும் ஒப்பிட

$$\frac{H_{2n}(0)}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

எனவே $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$

$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$

இக்கோவை இரட்டை அடுக்குகளை மட்டுமே கொண்டது. எனவே ஒற்றைப் பல்லுறுப்பு $H_{2n+1}(0)$இன் மதிப்பு சுழியாகிறது.

எனவே $H_{2n+1}(0) = 0$

மாதிரி–23

நிரூபிக்க $\frac{d^m}{dx^m}\{ H_n(x)\} = \frac{2^m n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x), \qquad m < n$

தீர்வு :

சமன்பாடு (2) இல் கண்டபடி ஹெர்மைட்டின் மடங்கும் பண்பு

$H'_n(x) = 2n\, H_{n-1}(x)$ ஐக் கருதுவோம்.

இதனை $\frac{d}{dx}[H_n(x)] = 2n\, H_{n-1}(x)$ எனலாம்.

$$\frac{d^2}{dx^2}\{ H_n(x)\} = 2n \frac{d}{dx}\{ H_{n-1}(x)\} = 2n\, H'_{n-1}(x)$$

சமன்பாடு (2) இல் இருந்து $H'_{n-1}(x) = 2(n-1)\, H_{n-2}(x)$ ஆகும்.

எனவே $\frac{d^2}{dx^2}\{ H_n(x)\} = 2^2 \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\, H_{n-2}(x)$

இதேபோல் $\frac{d^3}{dx^3}\{ H_n(x)\} = 2^3 \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\, H_{n-3}(x)$

இதே முறையில்

$$\frac{d^m}{dx^m}\{ H_n(x)\} = 2^{\mathrm{m}} \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2) \ldots\ldots (\mathrm{n}-\mathrm{m}+1)\, H_{n-m}(x),$$

$$m < n$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\{ H_n(x)\} = 2^{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{m})!} H_{n-m}(x)$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

மாதிரி–24

$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$H_n(x) = \sum_{s=0}^{n/2} (-1)^s \frac{n!\,(2x)^{n-2s}}{s!\,(n-2s)!}$$

xக்குப் பதிலாக $-x$ஐப் பிரதியிட

$$H_n(-x) = \sum_{s=0}^{n/2} (-1)^s \frac{n!\,(-2x)^{n-2s}}{s!\,(n-2s)!}$$

$$= \sum_{s=0}^{n/2} (-1)^s \frac{(-1)^{n-2s} n!\,(2x)^{n-2s}}{s!\,(n-2s)!}$$

$$= (-1)^n \sum_{s=0}^{n/2} (-1)^s \frac{n!\,(2x)^{n-2s}}{s!\,(n-2s)!} \qquad [(-1)^{-s} = (-1)^s$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

மாதிரி–25

நிரூபிக்க

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, dx = \sqrt{\pi}\left[2^{n-1} n!\,\delta_{m,n-1} + 2^n (n+1)!\,\delta_{m,n+1}\right]$$

தீர்வு :

$$H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x)$$

$$x\, H_n(x) = n\, H_{n-1}(x) + \frac{1}{2}\, H_{n+1}(x)$$

(ஹெர்மைட் பல்லுறுப்புகளின் மடங்கும் பண்பு (3) இன் படி)

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} \frac{1}{x}\left[n\, H_{n-1}(x) + \frac{1}{2}\, H_{n+1}(x)\right]\; H_m(x)dx$$

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, H_{n-1}(x)\, H_m(x)\, dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, H_{n+1}(x)\, H_m(x)\, dx$$

$$= n2^{n-1}(n-1)!\,\sqrt{\pi}\delta_{m,n-1} + \frac{1}{2}\, 2^{n+1}(n+1)!\,\sqrt{\pi}\delta_{m,n+1}$$

$$= \sqrt{\pi}\left[2^{n-1}n!\,\delta_{m,n-1} + 2^n(n+1)!\,\delta_{m,n+1}\right].$$

மாதிரி–26

நிரூபிக்க

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\{\, H_n(x)\}^2\, dx = \sqrt{\pi}2^n n!\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

மடங்கும் பண்பு சமன்பாடு (3) இன் படி

$$2x\, H_n(x) = \; H_{n+1}(x) + 2n\, H_{n-1}(x)$$

இருமடிகான

$$4x^2\{\, H_n(x)\}^2 = \{\, H_{n+1}(x)\}^2 + 4n^2\{\, H_{n-1}(x)\}^2 + 4n\{\, H_{n+1}\, H_{n-1}\}$$

e^{-x^2} ஆல் பெருக்கி, தொகை காண

$$4\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\{H_n(x)\}^2\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\{H_{n+1}(x)\}^2\,dx + 4n^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\{H_{n-1}(x)\}^2\,dx$$

$$+ 4n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, H_{n+1}(x)\, H_{n-1}(x)\,dx$$

$$= 2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi} + 4n^2 2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi} + 0$$

$$= 2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi} + n2^{n+1}n!\sqrt{\pi}$$

$$= 2^{n+1}n!\sqrt{\pi}[(n+1)+n] = 2^{n+1}n!\sqrt{\pi}(2n+1)$$

$$= 2^{n+2}n!\sqrt{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^2.2^n.n!\sqrt{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\{H_n(x)\}^2\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

பயிற்சி 1.5

1. ஹெர்மைட் வகைக்கெழு சமன்பாடு

   $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2\lambda y = 0$ன் பல்லுறுப்புத் தீர்வு $(4x^2 - 2)$ எனக்காட்டுக.

2. நிரூபிக்க $\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2}\, H_n(x)dx = 0, \quad 0 \le m \le n-1$

3. காட்டுக.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, H_n(x)dx = \begin{cases} 0 & ,\ \text{ஒற்றை } n \text{ க்கு} \\ \dfrac{2\pi n!}{(\frac{n}{2})!} & ,\ \text{இரட்டை } n \text{ க்கு} \end{cases}$$

1.25 லாகர் பல்லுறுப்புகள் (Laguerre Polynomials)

லஈகர் பல்லுறுப்புகள் ஹைட்ரஜன் அணுவின் அலை சார்பு(wave function) களில் அமைகின்றன.

லாகரின் வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+\lambda y=0 \quad \rightarrow (1)$$

x ஆல் வகுக்க, இச்சமன்பாடு $x=0$வில் ஒழுங்கான சிறப்புப் புள்ளி (Regular singularity) யைப் பெற்றிருக்கிறது எனத் தெரிகிறது. இதனால் (1) இன் தொடர் தீர்வு :

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{k+r}, \qquad a_0\neq 0 \quad \rightarrow (2)$$

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{r=0}^{\infty}a_r(k+r)\,x^{k+r-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{r=0}^{\infty}a_r(k+r)(k+r-1)\,x^{k+r-2}$$

(1) இல் பிரதியிட

$$\sum_{r=0}^{\infty}[(k+r)(k+r-1)x^{k+r-1}+(k+r)x^{k+r-1}-(k+r)x^{k+r}+\lambda x^{k+r}]a_r$$
$$=0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}[(k+r)^2x^{k+r-1}-(k+r-\lambda)x^{k+r}]a_r=0 \quad \rightarrow (3)$$

x^{k-1}இன் குணகத்தைச் சுழியுடன் ஒப்பிட, $a_0k^2=0$

$a_0\neq 0$ எனில் $k=0$ $\rightarrow (4)$

x^{k+r}இன் குணகத்தைச் சுழியுடன் ஒப்பிட,

$(k+r+1)^2a_{r+1}-(k+r-\lambda)a_r=0$

இதிலிருந்து மடங்குகின்ற தொடர்பு,

$$a_{r+1} = \frac{k+r-\lambda}{(k+r+1)^2} a_r \qquad \rightarrow (5)$$

$k = 0$க்கு, இது

$a_{r+1} = \frac{r-\lambda}{(r+1)^2} a_r$ ஆகும்.

$$a_1 = \frac{-\lambda}{1} a_0 = (-1)\lambda a_0$$

$$a_2 = \frac{(1-\lambda)}{2^2} a_1 = \frac{(-1)^2 \lambda(\lambda-1)}{(2!)^2} a_0$$

$$a_3 = \frac{-(\lambda-2)}{3^2} a_2 = \frac{(-1)^3 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{(3!)^2} a_0$$

....

....

....

$$a_r = \frac{(-1)^r \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-r+1)}{(r!)^2} a_0$$

எனவே தீர்வு

$$y = a_0 \left[1 - \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{(2!)^2} x^2 - \cdots \frac{(-1)^r \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-r+1)}{(r!)^2} x^r + \cdots\right] \qquad \rightarrow (6)$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda!}{(k!)^2 (\lambda-k)!} x^k \qquad \rightarrow (7)$$

$\lambda = n$ என்ற நேர்முழு எண் எனில், அதற்கான லாகர் சமன்பாடு

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \qquad \rightarrow (8)$$

$\lambda = n$ என்ற நேர்முழு எண் மற்றும் $a_0 = n!$ எனில் சமன்பாடு (8) இன் தீர்வானது L_n எனப்படும் nம் படி (n^{th} degree) லாகர் பல்லுறுப்பாகும்.

எனவே

$$y = n!\, L_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{(k!)^2 (n-k)!} x^k$$

$$= n!\left[\frac{(-1)^n n!\,x^n}{(n!)^2(n-n)!} + \frac{(-1)^{n-1} n!\,x^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!\,(n-(n-1))!}\right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n-2} n!\,x^{n-2}}{(n-2)!\,(n-2)!\,(n-(n-2))!} + \dots\dots\dots\right]$$

$$= n!\left[\frac{(-1)^n x^n}{n!\,0!} + \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1} n!}{(n-1)!\,(n-1)!\,1!} + \frac{(-1)^{n-2} x^{n-2} n!}{(n-2)!\,(n-2)!\,2!}\right.$$

$$\left. + \cdots\right]$$

$$= n!\,(-1)^n\left[\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1} n!\,n^2}{n!\,n!\,1!} + \frac{x^{n-2} n!\,n^2(n-1)^2}{n!\,n!\,2!} - \cdots\right]$$

$$L_n(x) = n!\frac{(-1)^n}{n!}\left[x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} - \cdots\right]$$

$$L_n(x) = (-1)^n\left[x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} - \cdots\right] \qquad \to (9)$$

லாகர் சமன்பாட்டின் தீர்வு $y = AL_n(x)$ ஆகும்.

A – யாதாமொரு மாறிலி ஆகும்.

1.26 லாகர் பல்லுறுப்பின் ரோட்ரிக் வாய்பாடு

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

இதுவே லாகர் பல்லுறுப்பின் ரோட்ரிக் வாய்பாடாகும்.

நிருபணம்

லீபினிட்ஸ் (Leibnitz's) தேற்றப்படி ஒரு பெருக்கலின் n ஆவது வகைக்கெழு,

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{r=0}^{n} nC_r \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}u \quad \frac{d^r}{dx^r}v$$

ஆகும். எனவே,

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\ \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}(x)^n\ \frac{d^r}{dx^r}(e^{-x})$$

இதில்

$$\frac{d^p}{dx^p}x^q = q(q-1)\dots(q-p+1)x^{q-p}\ ,\quad q > p$$

$$= \frac{q!}{(q-p)!}x^{q-p}$$

எனவே,

$$\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}(x)^n = \frac{n!}{\{n-(n-r)\}!}x^{n-(n-r)}$$

$$= \frac{n!}{r!}x^r$$

$$\frac{d^r}{dx^r}(e^{-x}) = (-1)^r e^{-x}$$

எனவே

$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\ \frac{n!}{r!}x^r(-1)^r e^{-x}$$

$$= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(n-r)!\,(r!)^2}x^r$$

சமன்பாடு (7)உடன் ஒப்பிட

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

1.27 லாகர் பல்லுறுப்பின் பிறப்பிக்கும் சார்பு

$G(x,t) = \frac{e^{\left\{\frac{-xt}{(1-t)}\right\}}}{(1-t)}$ ன் விரிவாக்கத்தில் t^nஇன் குணகமே லாகர் பல்லுறுப்பாகும். எனவே இது லாகர் பல்லுறுப்பின் பிறப்பிக்கும் சார்பு எனப்படும்.

அதாவது

$$\frac{e^{\left\{\frac{-xt}{(1-t)}\right\}}}{(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad \rightarrow (1)$$

nஇன் முழு எண் மதிப்புகளுக்கும், xஇன் மெய் மதிப்புகளுக்கும் (1) என்ற இம்முற்றொருமை வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$G(x,t) = \frac{e^{\left\{\frac{-xt}{(1-t)}\right\}}}{(1-t)} \quad \text{என்க.} \qquad \rightarrow (2)$$

$$= \frac{1}{(1-t)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{-xt}{1-t}\right)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{x^r t^r}{(1-t)^{r+1}}$$

ஆனால், ஈருறுப்பு தேற்றத்தின் படி

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = 1 + (r+1)t + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}t^2 + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}t^3 + \cdots$$

இதில்,

$$\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!} = \frac{r!\,(r+1)(r+2)(r+3)}{r!\,3!} = \frac{(r+3)!}{r!\,3!}$$

பொதுவான கோவை

$$\frac{(r+s)!}{r!\,s!}t^s$$

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(r+s)!}{r!\,s!}t^s$$

எனவே

$$G(x,t) = \sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^r\frac{x^r t^r}{r!}\frac{(r+s)!}{r!\,s!}t^s$$

$$= \sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(r+s)!}{(r!)^2 s!}t^{r+s}x^r \qquad \rightarrow (3)$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் rஇன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு, t^nஇன் குணகத்தைக் காண $r + s = n$ என்க அல்லது $s = n - r$.

எனவே (3) இல் இருந்து,

$$(-1)^r \frac{n!}{(r!)^2(n-r)!} x^r$$

t^nஇன் மொத்த குணகத்தைக் கண்டறிய rஇன் அனைத்து மதிப்புகளின் கூடுதல் காண வேண்டும். மேலும் $s = n - r$ ஆனால் $s \geq 0$ எனவே $n - r \geq 0$ அல்லது $r \leq n$. இதுவே n இன் எல்லையை தீர்மானிப்பது.

எனவே

$$G(x,t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n!}{(r!)^2(n-r)!} x^r t^n = \sum_{r=0}^{n} L_n(x) t^n$$

$$\therefore L_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n!}{(r!)^2(n-r)!} x^r$$

1.28 லாகர் பல்லுறுப்பின் செங்குத்துப் பண்பு

பிறப்பிக்கும் சார்பு $G(x,t)$இல் இருந்து

$$G(x,t) = \frac{1}{1-t} e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \quad \rightarrow (1)$$

$$\frac{1}{1-s} e^{\frac{-xs}{1-s}} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) s^m \quad \rightarrow (2)$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{e^{\left\{\frac{-xt}{(1-t)}\right\}}}{(1-t)} \cdot \frac{e^{\left\{\frac{-xs}{(1-s)}\right\}}}{(1-s)} dx \quad \rightarrow (3)$$

என்போம்.

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^\infty e^{-x - \frac{xt}{(1-t)} - \frac{xs}{(1-s)}} dx$$

$x + \frac{xt}{(1-t)} + \frac{xs}{(1-s)} = mx$ என்போம். எனவே,

$$I = \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^\infty e^{-mx} dx$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \left[\frac{e^{-mx}}{(-m)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \cdot \frac{1}{m}$$

ஆனால்

$$m = 1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s} = \frac{(1-t)(1-s) + (1-s)t + s(1-t)}{(1-t)(1-s)}$$

$$= \frac{1 + ts - t - s + t - ts + s - ts}{(1-t)(1-s)} = \frac{1-ts}{(1-t)(1-s)}$$

$$\therefore I = \frac{1}{(1-t)(1-s)} \cdot \frac{(1-t)(1-s)}{1-ts} = \frac{1}{1-ts} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n s^n$$

(1), (2), (3) ஐ ஒப்பிட

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) . t^n s^m = \sum_{n=0}^{\infty} t^n s^n$$

$n = m$ எனில், $t^n s^m$இன் குணகம் 1

$n \neq m$ எனில், $t^n s^m$இன் குணகம் 0 எனவே,

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}$$

1.29 லாகர் பல்லுறுப்பின் மடங்கும் தொடர்புகள்

(Recurrence Relations)

லாகர் பல்லுறுப்பின் பிறப்பிக்கும் சார்பானது,

$$e^{\frac{-xt}{1-t}} = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, t^n \qquad \rightarrow (1)$$

i) $\boldsymbol{(n+1)\, L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)}$

பிறப்பிக்கும் சார்பு

$$G(x,t) = \frac{1}{1-t}\, e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

$$e^{\frac{-xt}{1-t}}$$

$$= (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad \rightarrow (1)$$

சமன்பாடு (1)ஐ t ஐப் பொருத்து வகையிட

$$\frac{-x}{(1-t)^2}\, e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum L_n n t^{n-1} - \sum L_n(n+1)t^n$$

$$\frac{-x}{(1-t)}\sum L_n\,(x)t^n = \sum L_n n t^{n-1} - \sum L_n(n+1)t^n$$

$$-x\sum L_n\, t^n = (1-t)\left[\sum nL_n t^{n-1} - \sum (n+1)L_n t^n\right]$$

$$= \sum nL_n t^{n-1}$$

$$- \sum (n+1)L_n t^n - \sum nL_n t^n - \sum (n+1)L_n t^{n+1}$$

t^nஇன் குணகங்களை ஒப்பிட,

$$-xL_n = (n+1)$$

1.30 சில லாகர் பல்லுறுப்புகள் (Laguerre Polynomials)

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!\ (r!)^2}\ x^r$$

$L_0(x)$ என்ற கோவைக்கு $n = r = 0$ எனவே $L_0(x) = x^0 = 1$, $L_1(x)$க்கு

$r = 0,\ \ r = 1$

$$L_1(x) = \frac{0!}{(0!)^2 1!} x^0 + (-1)^1 \frac{1!}{(1!)^2 0!} x' = 1 - x$$

$$L_2(x) = (-1)^0 \frac{2!}{(0!)^2 (2-0)!} x^0 + (-1)^1 \frac{2!}{(1!)^2 (2-1)!} x^1$$

$$+ (-1)^2 \frac{2!}{(2!)^2 (2-2)!} x^2$$

$$= x^0 - 2x + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}(2 - 4x + x^2)$$

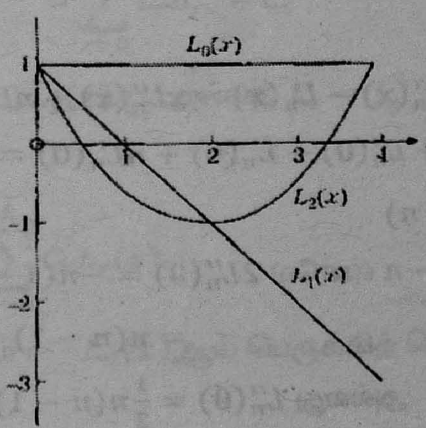
$$L_3(x) = (-1)^0 \frac{3!}{(0!)^2 3!} x^0 + (-1)^1 \frac{3!}{(1!)^2 2!} x^1 + (-1)^2 \frac{3!}{(2!)^2 1!} x^2$$

$$+ (-1)^3 \frac{3!}{(3!)^2 0!} x^3$$

$$= 1 - 3x^1 + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}$$

$$= \frac{1}{3!}(6 - 18x + 9x^2 - x^3)$$

$$L_4(x) = \frac{1}{4!}(24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4)$$



படம் 1.4 லாகர் பல்லுறுப்புகள்

மாதிரி–27

நிரூபிக்க $i) L_n(0) = 1$ $ii) L'_n(0) = -n$ $iii) L''_n(0) = \frac{1}{2}n(n-1)$

தீர்வு :

பிறப்பிக்கும் சமன்பாட்டின்படி

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{L_n}(x)t^n = \frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

$x = 0$ என்க.

$$\sum L_n(0)t^n = \frac{1}{1-t}e^0 = \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-1}$$

$$= 1 + t + t^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

இருபுறமும் குணகங்களை ஒப்பிட $L_n(0) = 1$

$ii) L_n(x)$ என்ற பல்லுறுப்பு $x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0$

என்ற லாகர் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும். எனவே

$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$ இதில் $x = 0$ என்க.

$0 + L'_n(0) + nL_n(0) = 0$ இதில் $L_n(0) = 1$ எனவே $L'_n(0) = -n$

$iii)$ லாகர் சமன்பாடு $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$ஐ xஐப் பொருத்து வகையிட,

$$xL'''_n(x) + L''_n(x) + L''_n(x) - L'_n(x) - xL''_n(x) + nL'_n(x) = 0$$

$x = 0$ எனில், $L''_n(0) + L''_n(0) - L'_n(0) + nL'_n(0) = 0$

$$2L''_n(0) = L'_n(0)(1-n)$$

$ii)$ இன் படி $L'_n(0) = -n$ எனவே $2L''_n(0) = -n(1-n)$

$$= n(n-1)$$

அல்லது $L''_n(0) = \frac{1}{2}n(n-1)$

மாதிரி–28

mபடி கொண்ட பல்லுறுப்பு $f(x)$ எனில் இதனை லாகர் பல்லுறுப்புகளைக் கொண்டு

$$f_m(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r L_r(x)$$

எனக் காட்டமுடியுமெனில்

$$i)\ C_r = \int_0^{\infty} e^{-x} L_r(x) f(x) dx$$

என நிரூபிக்க. இதிலிருந்து

$$ii)\ \int_0^{\infty} e^{-x} x^k L_n(x) dx = \begin{cases} 0, & k < n \\ (-1)^n n!, & k = n \end{cases}$$ என்பதை வருவிக்க.

தீர்வு :

$L_n(x)$ஒரு எளிய பல்லுறுப்பு எனவே,

$$f_m(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r L_r(x)$$

இருபுறமும் $e^{-x} L_s(x)$ ஆல் பெருக்கித் தொகையிட,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_s(x) dx = \sum_{r=0}^{m} C_r \int_0^{\infty} e^{-x} L_s(x) L_r(x) dx$$

$$= \sum_{r=0}^{m} C_r \delta_{rs} = C_s$$

$\therefore C_s = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_s(x) dx$ அல்லது $C_r = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_r(x) dx$

$$ii)\ f(x) = x^k = \sum_{r=0}^{k} C_r L_r(x)$$

என்க. இருபுறமும் $e^{-x} L_n(x)$ஆல் பெருக்கித் தொகையிட,

$$\int_0^\infty e^{-x}x^k L_n(x)dx = \sum_{r=0}^{k} c_r \int_0^\infty e^{-x} L_r(x)L_n(x)\,dx$$

$$= \sum_{r=0}^{k} C_r\delta_{rn}$$

$k < n$ எனில் $r \le k < n,$ எனவே $r \ne n$ அனைத்து rஇன் மதிப்புகளுக்கும் $\delta_{rn} = 0,$ $r \ne n$ எனவே தொகையின் மதிப்பு, சுழியாகிறது. $L_n(x)$இன் முதலாவது கோவை $\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ ஆகும்.

எனவே $x^n = (-1)^n n!\, L_n(x) + P_{n-1}(x)$

இதில் $P_{n-1}(x)$ எனப்படுவது, xஇன் கீழ் அடுக்குகள் அடங்கிய $L_{n-1}(x)$இன் நேர்கோட்டு தொடர்புகளாகும். இதை $e^{-x}L_n(x)$ ஆல் பெருக்கித் தொகையிட,

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n\, L_n(x)dx$$

$$= (-1)^n n! \int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2 dx + \int_0^\infty e^{-x}P_{n-1}(x)L_n(x)dx$$

செங்குத்துத் தன்மையினால் வலப்புற இரண்டாம் கோவை சுழியாகிறது.

எனவே $\int_0^\infty e^{-x}x^n\, L_n(x)dx = (-1)^n n!$ $\quad \therefore \int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2 dx = 1$

எனவே $n = k$ எனில் $\int_0^\infty e^{-x}x^k\, L_n(x)dx = (-1)^n n!$

பயிற்சி 1.6

நிரூபிக்க

1. $a)\ \frac{d}{dx}\{L_3(x)\} = -18 + 18x - 3x^2$

   $b)\ \frac{d^2}{dx^2}\{L_4(x)\} = 144 - 96x + 12x^2$

   $d)\ \frac{d^4}{dx^4}\{L_4(x)\} = 24$

2. $L_n(2x) = n! \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{n-m}(-1)^m}{m!\,(n-m)!} L_{n-1}(x),\ n > m$

எனக்காட்டுக.

1.31 ஸ்டூம் – லியோலி (Sturm – Liouville) வகைக்கெழு சமன்பாடு

இத்தகைய வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் பொதுவான அமைப்பு,

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [\lambda q(x) + r(x)]y = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

இச்சமன்பாட்டில் λ ஒரு மெய் மாறிலியாகும். வழக்கமான வகைக்கெழு சமன்பாடுகளுக்கான தொடக்க நிபந்தனை(Initial Conditions)களுக்குப் பதிலாக ஸ்டூம் லியோலி சமன்பாடுகள், சில வரம்பு நிபந்தனை(Boundary Conditions)களுக்குக் கட்டுப்பட்டதாக இருக்கும். பொதுவான வரம்பு நிபந்தனைகள்,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{array}\right\} \qquad \rightarrow (2)$$

ஆகும்.

இவற்றில் $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ மாறிலிகளாகும்.

நிபந்தனைகள் (2)க்குக் கட்டுப்பட்ட சமன்பாடு (1)இன் பொருளமைந்த தீர்வுகள் மாறிலி λஇன் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே அமையும். λஇன் இம்மதிப்புகள் சிறப்பியல் மதிப்புகள் (Characteristic values or eigen values) எனப்படும்.

இத்தகைய சிறப்பியல் மதிப்புகளுக்கான, சமன்பாடு (1) இன் தீர்வுகள் சிறப்பியல் சார்புகள் (Characteristic functions or Eigen functions) எனப்படும்.

வரம்புகளுக்குக் கட்டுப்பட்ட ஸ்டூம் லியோலி சமன்பாடு, ஸ்டூம் லியோலி பிரச்சினை (Sturm Lioville Problem) எனப்படும்.

λன் λ_i என்ற குறிப்பிட்ட மதிப்பு i ஆவது சிறப்பியல் மதிப்பு எனப்படும். இதற்கான (1) இன் தீர்வு y_i ஆனது i ஆவது சிறப்பியல் சார்பு என்று வழங்கப்படும்.

மேற்கண்ட, சிறப்பியல் சார்புகளின் மிக முக்கியமான ஒரு பண்பை ஆராய்வோம்.

(2) இல் காணும் வரம்பு நிபந்தனைகளில் $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0$ என்போம்.

இப்போது $y(a) = y(b) = 0$ $\rightarrow (3)$

இருவேறு சிறப்பியல் மதிப்புகள் λ_i மற்றும் λ_j என்போம். இவற்றிற்கான சிறப்பியல் சார்புகள் y_i மற்றும் y_j என்க. இவற்றிற்கான ஸ்டூம் லியோலி சமன்பாடுகள்,

$$\frac{d}{dx}\left[P\frac{dy_i}{dx}\right] + (\lambda_i q + r)y_i = 0 \qquad \rightarrow (4)$$

$$\frac{d}{dx}\left[P\frac{dy_j}{dx}\right] + (\lambda_j q + r)y_j = 0 \qquad \rightarrow (5)$$

(4)ஐ y_j ஆலும் (5)ஐ y_i ஆலும் பெருக்கி, கழிக்க,

$$(\lambda_i - \lambda_j)q y_i y_j = \frac{d}{dx}\left[P\frac{dy_j}{dx}\right]y_i - \frac{d}{dx}\left[P\frac{dy_i}{dx}\right]y_j \qquad \rightarrow (6)$$

x_1 முதல் x_2 வரை, இரு புறமும் தொகைகாண,

$$(\lambda_i - \lambda_j)\int_{x_1}^{x_2} q y_i y_j dx = \int_{x_1}^{x_2} y_i \frac{d}{dx}\left[P\frac{dy_j}{dx}\right]dx - \int_{x_1}^{x_2} y_j \frac{d}{dx}\left[P\frac{dy_i}{dx}\right]dx$$

வலப்புறக் கோவைகளைப் பகுதிகளாகத் தொகை காண,

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_{x_1}^{x_2} q y_i y_j dx = \left[P(y_i y_j' - y_j y_i')\right]_{x_1}^{x_2}$$

நிபந்தனை (3) இன் படி, $i \neq j$ எனில் வலப்புறக் கோவை சுழியாகும். எனவே,

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_{x_1}^{x_2} q(x) y_i(x) y_j(x) dx = 0, i \neq j$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j$$

மேலும் x_1, x_2 இடைவெளியில் $q(x)$நிறையிடும் சார்பு (weighting function) எனப்படும். பெரும்பாலும் இதன் மதிப்பு 1 ஆகும். எனவே,

$$\int_{x_1}^{x_2} y_i(x) y_j(x) dx = 0, \quad i \neq j$$

இது சிறப்பியல் சார்புகளின் செங்குத்துப் (Orthogonal) பண்பைக் குறிக்கும்.

1.32 டிராக் டெல்டா சார்பு (Dirac Delta Function)

இயற்பியல் நிகழ்வுகளில் சில கணத்தாக்குத் (Implulsive) தன்மை கொண்டவையாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு மின்சுற்றில், மின்தூண்டல் காரணமாகத் தோன்றும், மின்னியக்கு விசை, இயக்கவியலில் கணத்தாக்கினால் உருவாகும் இயக்கங்கள் ஆகியவற்றை ஆராயப் பயன்படும் சார்பே டிராக்–டெல்டா சார்பாகும். இது $\delta(x)$ என்று குறிக்கப்படும்.

இச்சார்பானது அதன் பண்புகளைக் கொண்டு வரையறுக்கப்படுகிறது. அவையாவன,

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \qquad \rightarrow (1)$$

$f(x)$ ஒரு ஒழுங்கான சார்பு எனில்,

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \qquad \rightarrow (2)$$

அல்லது குறிப்பாக

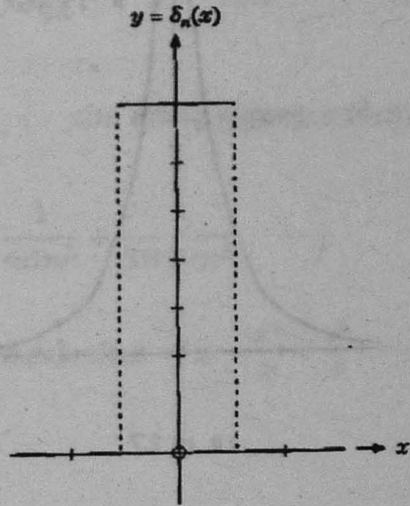
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad \rightarrow (3)$$

அதாவது $x = 0$ புள்ளியில் $\delta(x)$இன் மதிப்பு அளவிட முடியாத அளவு அதிகமானதாகவும், $x = 0$ க்குச் சற்றே விலகினால் அம்மதிப்பு, சுழியாகவும் அமைகிறது.

சமன்பாடு (2) இல் காணப்படும் பண்பைக் கொண்டு, சார்புத் தொடர் (sequence of function) பங்கீட்டின் (distribution) எல்லையைத் தீர்மானிக்க முடியும். எடுத்துக்காட்டாக, n முடிவிலியை $(n \rightarrow \infty)$ நெருங்கும் போது nஇன் சார்புத் தொடர்களை ஏறக்குறைய டிராக் டெல்டா சார்பாகக் கொள்ள லாம்.

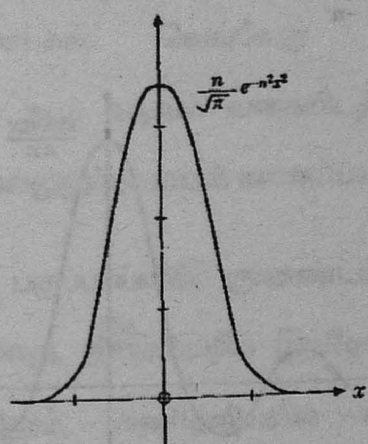
$$i)\ \delta_n(x) = \begin{cases} 0, x < \frac{1}{2n} \\ n, -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0, x > \frac{1}{2n} \end{cases} \qquad \rightarrow (4)$$

இதற்கான வரைபடம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.



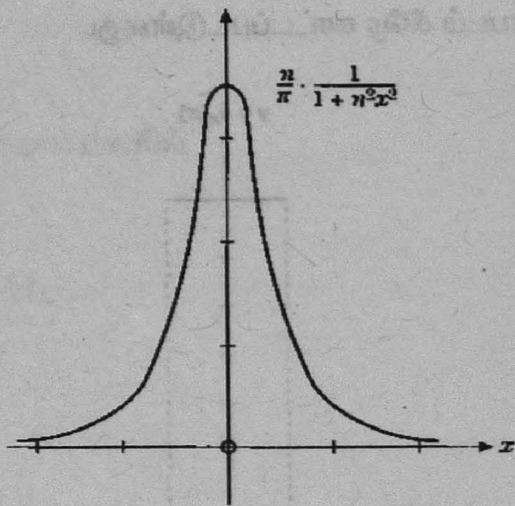
படம் 1.5

$ii) \delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$ → (5)



படம் 1.6

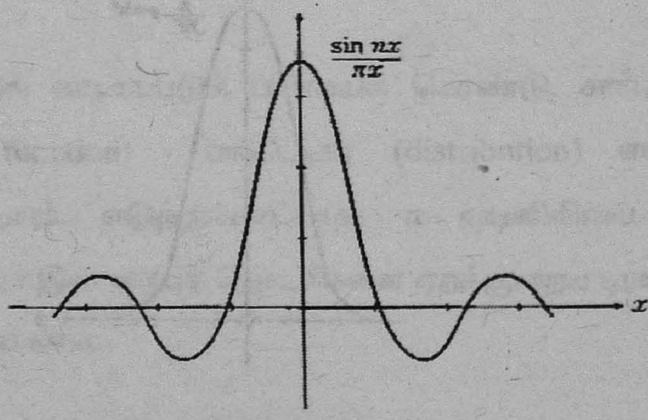
$iii) \ \delta_n(x) = \frac{n}{\pi} . \frac{1}{1 + n^2x^2}$ → (6)



படம் 1.7

$$iv)\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ixt}dt \quad \rightarrow (7)$$



படம் 1.8

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,\delta(x)dx$ என்ற தொகையைக் கருதுவோம். சமன்பாடு (2) இன் படி $\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,\delta(x)dx = \cos 0 = 1$இதனைச் சமன்பாடு (4)ஐக் கொண்டு மதிப்பிடுவோம்.

$$\int_{-1/2n}^{1/2n} n\cos x\,dx = n(\sin x)\Big|_{\frac{-1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} = n\left[sin\left(\frac{1}{2n}\right) - sin\left(\frac{-1}{2n}\right)\right]$$

$= n\left[sin\left(\frac{1}{2n}\right) + sin\left(\frac{1}{2n}\right)\right]$ ($\because$ sin சார்பு, ஒற்றை சார்பாகும்)

$$= 2n\sin\frac{1}{2n} = 2n\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{48n^3} + \frac{1}{3840n^5} - \cdots\right)$$

(மக்லாரின் தொடர் விரிவாக்கம் $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$)

$$= 1 - \frac{2n}{48n^3} + \frac{2n}{3840n^5} - \cdots$$

$n \to \infty$ எனில் இதன் மதிப்பு 1.

சமன்பாடுகள் (4),(5),(6) மற்றும் (7) இல் காட்டப்பட்டுள்ள டிராக் டெல்டா சார்பின் தோராய வடிவங்கள் வெவ்வேறு சூழ்நிலைகளில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. (5) ஆம் வடிவம் வகையிடத்தக்கது. இதன் வகைக்கெழுகள் ஹெர்மைட் பல்லுறுப்புகளைக் காணப்பயன்படுபவை.

(7) ஆம் வடிவம் ஃபூரியர் பகுப்பாய்வில் குவாண்டம் இயக்கவியல் பயன்பாடுகளில் பொருத்தமானது. இயற்பியலில் இத்தோராய மதிப்புகள் போதுமானவையாக இருப்பினும், கணிதவியலில் எல்லை $\delta_n(x)$ அமையவில்லை. எனவே கணிதவியலில் டிராக் டெல்டா சார்பானது ஒரு சார்பாகவே கருதப்படுவதில்லை.

மாதிரி 29

$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sin(2\pi\epsilon x)}{\pi x}$ ஒரு டிராக் டெல்டா சார்பு எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sin(2\pi\epsilon x)}{\pi x}$$

(எல்லை $\epsilon \to 0$)

$$\therefore \delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \quad \rightarrow (8)$$

மேலும்

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\epsilon x)}{\pi x} dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\epsilon x)}{\pi x} dx,$$

(இதில் சார்பு இரட்டை)

$$= \frac{2}{\pi} \ \frac{\pi}{2} = 1 \quad \rightarrow (9)$$

சமன்பாடுகள் (8) மற்றும் (9) இல் இருந்து கொடுக்கப்பட்ட சார்பு, டிராக் டெல்டா சார்பு எனத் தெரிகிறது.

2. கலப்பினப் பகுப்பாய்வு (Complex Analysis)

2.1 கலப்பின எண்கள் (Complex numbers)

முன்னுரை

$a + i\,b$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும் ஒரு எண் கலப்பின எண் எனப்படும். இதில் a, b என்பன மெய் எண்கள் $i = \sqrt{-1}$ ஆகும். இதில் a மெய்ப் பகுதி என்றும் b என்பது கற்பனைப் பகுதி என்றும் வழங்கப்படும்.

கலப்பின எண்ணானது வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எண்களின் சோடியாகும். இதனை $z = (a, b)$ எனலாம்.

மெய்ப் பகுதியை $a = R_z$ அல்லது $R(z)$ அல்லது $Re(z)$ என்றும் கற்பனைப் பகுதியை $b = I_z$ அல்லது $I(z)$ அல்லது $Im(z)$ என்றும் எழுதுவர்.

2.2 கலப்பின எண்களின் சமத்துவம் (Equality of Complex numbers)

இரண்டு கலப்பின எண்கள் $a + ib = c + id$ எனில், $a = b$ மற்றும் $c = d$ ஆகும்.

ஒரு கலப்பின எண் $z = a + ib$ இன் எண் அளவு (modulus) $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ஆகும். எனவே $|z| = 0$ எனில் $a = 0,\ b = 0$ ஆகும். இணையிய எண்கள் (Complex conjugates) $A{:}\,a + ib$ மற்றும் $a - ib$ ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று இணையிய எண்கள் எனப்படும்.

கலப்பின எண்களின் இயற்கணித அடிப்படை விதிகள்:

(1) கூட்டல் : $z_1 = (a, b)$ மற்றும் $z_2 = (c, d)$ என்ற இரு கலப்பின எண்களின் கூடுதல் $z = z_1 + z_2 = (a + c,\ b + d)$

(i) கலப்பின எண்களின் கூட்டல் பரிவர்த்திக்கும் பண்புடையது. அதாவது,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + ib) + (c + id) \\ &= (a + c) + i(b + d) \\ &= (c + a) + i(d + b) \\ &= (c + id) + (a + ib) = z_2 + z_1 \end{aligned}$$

(ii) சேர்ப்பு விதி (Associative Law)

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a + ib) + [(c + id) + (e + if)] \\ &= (a + ib + c + id) + (e + if) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3 \end{aligned}$$

(iii) கூட்டல் முற்றொருமை (Additive identity)

$$z + 0 = z$$

இதில் கூட்டல் முற்றொருமை எண் 0 ஆகும்.

$$(a + ib + 0 + i0) = a + ib$$

(iv) நேர்மாறு

$$z + (-z) = 0$$

z இன் நேர்மாறு $-z$ ஆகும்.

$z = a + ib, \qquad -z = -a - ib$

$z + (-z) = a + ib - a - ib = 0$

2. கழித்தல் : $z_1 = a + ib$ மற்றும் $z_2 = c + id$ எனில்

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

3. பெருக்கல் : $z_1 z_2 = (a + ib)(c + id)$

$$= (ac - bd) + i(bc + ad)$$

4. வகுத்தல் : $z_1 z_2 = z'$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம். இதில்,

$z_1 = a + ib,$ $z_2 = c + id,$ $z' = e + if$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(bc + ad) = e + if$$

எனவே

$$ac - bd = e \quad \rightarrow (1)$$

$$bc + ad = f \quad \rightarrow (2)$$

(1) மற்றும் (2)ஐ த்தீர்க்க

$$c = \frac{ae + bf}{a^2 + b^2}$$

மற்றும்

$$d = \frac{af - be}{a^2 + b^2}$$

இதில் $a^2 + b^2 \neq 0,$ $|z_1| \neq 0$

எனவே $z_2 = \frac{z'}{z_1}$

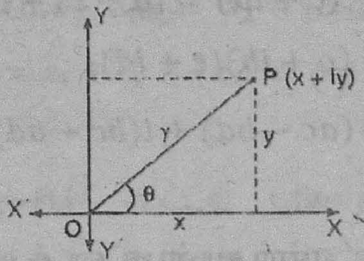
ஒரு கலப்பின எண்ணின் இணையிய எண்

$z = a + ib$ எனில் இதன் இணையிய எண் $\bar{z} = a - ib$ ஆகும்.

எனவே $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\, \bar{z_2}$$

2.3 ஆர்கன்ட் வரைபடம்



(x, y) ஆயத் தொலைவுகளைக் கொண்ட, கலப்பின எண் $x + iy$ ஆனது படத்தில் P என்ற புள்ளியால் குறிக்கப்படுகிறது. x அச்சு, மெய் அச்சு என்றும் y அச்சு, கற்பனை அச்சு என்றும் கொள்ளப்படுகிறது. இத்தகைய வரைபடம் ஆர்கன்ட் வரைபடம் எனப்படுகிறது. இதில் OP என்ற தொலைவு, எண் அளவு (Modulus) என்றும், x அச்சிலிருந்து OPஇன் கோணம், கோண வீச்சம் (argument) எனவும் கூறப்படும்.

2.4 எண்ணளவு மற்றும் கோண வீச்சம் (Modulus and argument)

$x + iy$ ஒரு கலப்பின எண் என்க.

$x = r\cos\theta$ மற்றும் $y = r\sin\theta$ எனில்

$$x^2 + y^2 = r^2cos^2\theta + sin^2\theta = r^2$$

அல்லது $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

r ஆனது கலப்பின எண் $x + iy$ இன் எண் அளவாகும். இதனை $|x + iy|$ என்று குறிப்பிடுவர்.

மேலும் $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ மற்றும் $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\tan\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \div \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x}$$

இதில் $\boldsymbol{\theta}$, கோண வீச்சம் எனப்படும்.

ஒரு கலப்பின எண் $x+iy$ ஆனது z என்று குறிப்பிடப்படும். இதன் கலப்பின இணையிய எண் (complex conjugate) $x-iy$ ஆகும். இது $\bar{z}$ எனக் குறிப்பிடப்படும். ஒரு கலப்பின எண், துருவ ஆய வடிவில் (polar form),

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ஆகும்.

மாதிரி 1

$\frac{(1+i)(2+i)}{3+i}$ என்ற எண்ணை $a+ib$ வடிவில் மாற்றவும்.

தீர்வு :

$$\frac{(1+i)(2+i)}{3+i} = \frac{2+i+2i-1}{3+i} = \frac{1+3i}{3+i} = \frac{(1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{3-i+9i+3}{9+1} = \frac{6+8i}{10} = \frac{6}{10} + \frac{8i}{10}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{i4}{5}$$ – விடை

மாதிரி 2

$$\frac{1+2i}{1-(1-i)^2}$$

இன் எண்ணளவு மற்றும் கோண வீச்சத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{1+2i}{1-(1-i)^2} = \frac{1+2i}{1-(1-1-2i)} = \frac{1+2i}{1+2i} = 1+0\,i$$

எண்ணளவு $= \sqrt{1^2+0^2} = 1$

$\tan\theta = \frac{0}{1} = 0$ எனவே $0 = \tan^{-1} 0 = 0°$ விடை.

மாதிரி 3

$$\frac{1+2i}{1-3i}$$

ஐ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ வடிவில் மாற்றுக.

தீர்வு :

$$\frac{1+2i}{1-3i} = \frac{1+2i}{(1-3i)} \text{ x } \frac{(1+3i)}{(1+3i)} = \frac{(1+3i+2i-6)}{1+9}$$

$$= \frac{(-5+5i)}{10} = \frac{5}{10}\,(-1+i)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

எனவே $r\cos\theta = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow (1)$

$r\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\rightarrow (2)$

இருமடியாக்கிக் கூட்ட $r^2(\cos^2\theta + i\sin^2\theta) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$r^2 = \frac{1}{2}$ அல்லது $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

இம்மதிப்பை (1) மற்றும் (2) இல் பிரதியிட

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = -\frac{1}{2}$ அல்லது $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2}$ அல்லது $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

அல்லது $\theta = \frac{3\pi}{4}$

எனவே $\frac{1+2i}{1-3i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ விடை.

பயிற்சி 2.1

கீழ்க்கண்ட கலப்பின எண்களை $a + ib$ வடிவில் எழுதுக.

1. $\frac{2-3i}{4-i}$ விடை $\frac{11}{17} - \frac{10}{17}i$
2. $\frac{(1+2i)^3}{1+i)(2-i)}$ விடை $\frac{-7}{2} + \frac{1}{2}i$

கீழ்க்கண்ட கலப்பின எண்களின் எண்ணளவு மற்றும் கோண வீச்சங்களைக் காண்க.

3. $-\sqrt{3} - i$ விடை $2, \frac{-5\pi}{6}$
4. $\sqrt{\frac{(1+i)}{(1-i)}}$ விடை $1, \frac{\pi}{4}$
5. $\tan\propto - i$ விடை $\sin\propto, -\left(\frac{\pi}{2} - \propto\right)$

கீழ்க்கண்ட எண்களைத் துருவ ஆய வடிவில் காட்டுக.

6. $\frac{1+i}{1-i}$ விடை $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

7. $\frac{2+6i\sqrt{3}}{5+i\sqrt{3}}$ விடை $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

8. $\frac{(2+5i)(-3+i)}{(1-2i)^2}$ ன் துருவ ஆயங்களைக் காண்க.

விடை $\frac{\sqrt{290}}{5}$, $tan^{-1}\left(-\frac{1}{17}\right)$

2.5. கலப்பினமாறியின் சார்புகள் (Functions of Complex Variables).

முன்னுரை

இயற்பியல் நிகழ்வுகளின் கணிதப்பகுப்பாய்வில், கலப்பின மாறி (complex variable) சார்புகளின் கொள்கையானது (theory of functions) மிகவும் வலிமையான ஆயுதமாகப் பயன்படுகிறது. கலப்பின எண்ணானது இருமெய் எண்களைக் கொண்டு உருவாக்கப்படுகிறது. எனவே கலப்பின எண்களின் புலத்தில், இயற்கையாகவே மெய் எண்களின் புலம் அடங்குகிறது. கலப்பின எண்களின் புலமானது, மெய் எண்களின் புலத்தின் விரிவாக்கம் எனவும் கொள்ளலாம்.

மெய் எண் சார்புகள், முடிவிலி மெய்த் தொடர்கள் (real series) மற்றும் தொகைகள் ஆகியவற்றில் மெய் எண்களுக்குப் பதிலாகக் கலப்பின எண்க்ளைப் பிரதியிட்டுக் கலப்பின எண்களின் கொள்கைகளைப் பெறலாம்.

$x;y$ என்பன மெய்ச் சார்புகள் என்றால் $x+iy=z$. இதில் z என்பது கலப்பின எண் ஆகும். $i=\sqrt{-1}$. xஐ மெய்ப் பகுதி என்றும் yஐக் கற்பனை பகுதி (imaginary part) என்றும் கூறுவர்.

ஒளி விலகல் எண்(index of refraction)ணை மெய் எண்ணாகக் கருதும்போது, ஒளியாற்றல் பொருள்களில் உறிஞ்சப்படுவதை (absorption) கணக்கில் கொண்டு, ஒளிவிலகல் எண் கலப்பின எண்ணாகக் கருதப்படுகிறது. மின்சுற்றுகளில் மின்தேக்கி மற்றும் தூண்டு சுருள்களின் மின்னெதிர்ப்பைக் கணக்கிலெடுக்கும் போது மின்தடையானது கலப்பின எண் $z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

கலப்பின மாறியின் சார்புகளை (functions of complex variable) ஆராய, மெய்மாறி xக்குப் பதிலாகக் கலப்பின மாறி zஐப் பிரதியீடு செய்ய வேண்டும். இதற்குத் தேவையான சில விளக்கங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

2.6 விளக்கங்கள்

(a) ஒரு புள்ளியின் அருகாமைப்பகுதி (Neighbourhood of a point)

ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் (Argand diagram) z_0 புள்ளிக்கு அருகாமைப் பகுதி எனப்படுவது z_0ஐ அடுத்து $|z - z_0| \leq \epsilon$ என்ற நிபந்தனைக்குக் கட்டுப்பட்ட z எனும் அனைத்துப் புள்ளிகளின் கணமாகும். (இதில் ϵ யாதாமொரு மிகச்சிறிய நேர் எண்ணாகும்.

(b) எல்லைப்புள்ளி (Limit point)

ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில் z_0 வின் அருகாமைப் பகுதிகளில் அமையும், சூழியைத் தவிர்த்த மற்ற அனைத்துப் புள்ளிகளும் S என்ற கணத்தின் புள்ளிகளெனில், z_0 ஆனது S கணத்தின் எல்லைப்புள்ளி எனப்படும். எல்லைப்புள்ளிகள் இருவகைப்படும். அவையாவன,

(i) உள்ளடங்கிய புள்ளிகள் (Interior points)

(ii) வரம்புப் புள்ளிகள் (Boundary points)

z_0வின் அருகாமைப்பகுதி s கணத்தின் அனைத்துப் புள்ளிகளையும் உள்ளடக்கி இருப்பின், s கணத்தின் எல்லைப்புள்ளி z_0 வானது உள்ளடங்கிய புள்ளி எனப்படும்.

z_0வின் அருகாமைப்பகுதியிலுள்ள புள்ளிகளனைத்தும் கணம் sஐச் சேர்ந்தது இல்லையெனில், எல்லைப்புள்ளி z_0வானது வரம்புப்புள்ளி எனப்படும்.

(c) மூடிய கணம் (Closed set)

ஒரு கணத்தின் எல்லைப்புள்ளிகள் அனைத்தும் அக்கணத்தில் அடங்குமாயின் அக்கணம் மூடிய கணம் எனப்படும்.

(d) திறந்த கணம் (Open set)

உள்ளடங்கிய புள்ளிகள் அனைத்தும் ஒரு கணத்தில் அடங்குமாயின் அக்கணம் திறந்த கணம் எனப்படும்.

(e) வரம்பு கொண்ட மற்றும் வரம்பற்ற கணம் (bounded and unbounded set)

ஒரு கணத்திலடங்கிய z என்ற புள்ளிகள் அனைத்தும், k என்ற மாறிலியைக் கொண்டு, $|z| \leq k$ என்ற நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட்டு அமையுமானால், அக்கணம் வரம்பு கொண்டது எனலாம்.

அத்தகைய எண் k அமையவில்லையெனில் அக்கணம் வரம்பற்றது எனப்படும்.

(f) அரங்கம் (Domain)

ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில், ஒரு, புள்ளிகளின் கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி புள்ளிகளும் பல்கோணவில் (polygonal arc) லினால் இணைக்கப்படுமானால் அப்புள்ளிகளின் கணம் அரங்கம் எனப்படும்.

கலப்பின மாறியின் சார்புகள்

$w = u + iv$ மற்றும் $z = x + iy$ ஆகியன இரு கலப்பின எண்கள் என்போம். ஒரு அரங்கத்தில், ஒவ்வொரு zஇன் மதிப்பிற்கும், ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட wவின் மதிப்புகள் அமையுமானால், w ஆனது zஇன் சார்பு எனப்படும். இதனை $w = f(z)$ எனலாம்.

ஒரு அரங்கத்தில், zஇன் மதிப்பிற்கு, w ஒற்றை மதிப்பைப் பெறுமானால் அச்சார்பு ஒற்றை மதிப்புச் சார்பு (single valued function) எனப்படும். zஇன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் அல்லது பல மதிப்புகளுக்கு w ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளைப் பெறுமானால் w ஆனது zன் பல்மதிப்புச் சார்பு (Multi valued function) எனப்படும்.

(g) தொடர்ச்சி (Continuity)

ஒரு அரங்கத்தில், z_0 புள்ளியில் கலப்பின மாறி zஇன் சார்பு $f(z)$, தொடர்ச்சியானது எனில் அரங்கத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளியும் $|z - z_0| < \delta$ என்ற நிபந்தனைக்குக் கட்டுப்பட்டு $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ என அமைய வேண்டும்.

$\epsilon > 0$ ஒரு நேர் எண் மற்றும் δ ஆனது ϵ ஐப் பொருத்தது. பொதுவாக $\delta = \varphi(\epsilon, z_0)$

(h) வகையிடத்தக்க தன்மை (Differentiability)

ஆர்கன்ட் வரைபடத்தில், அரங்கம் Dல் $f(z)$ ஒற்றை மதிப்புச் சார்பு என்க. இச்சார்பு புள்ளி z_0 வில் வகையிடத்தக்கது எனில் எல்லை $z \to z_0$ க்கு $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லை மதிப்பை அடை ய வேண்டும்.

(i) பகுமுறைச் சார்பு (Analytic function)

அரங்கம் Dஇல் சார்பு $f(z)$ ஆனது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒற்றை மதிப்புடன், வகையிடத்தக்கதாயும் அமையுமானால் அச்சார்பு பகுமுறைச் சார்பு அல்லது ஒழுங்கான சார்பு எனப்படும்.

(j) சிறப்புப் புள்ளிகள் (Singular points)

ஒரு சார்பு, அரங்கம் Dஇல், ஒரு சில புள்ளிகளில் மட்டும் வகையிடத் தக்கதாக அமையாது. அத்தகைய புள்ளிகள் சிறப்புப் புள்ளிகள் எனப்படும்.

$f(z)$ என்ற சார்பு ஒரு அரங்கத்தில் ஒழுங்கு முறையாக இருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகள்

2.7 காஷி – ரீமான் சமன்பாடுகள்

ஒரு சார்பு $f(z) = u + iv$, அரங்கம் $(Domain)R$ல் அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் பகுமுறைச் சார்பு என்பதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகளாவன (necessary conditions)

$(i) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\qquad$ $(ii) \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$

மேலும் $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ஆகிய அனைத்தும் அமைய வேண்டும் .

நிரூபணம்

அரங்கம் Rஇல் $f(z)$ ஒரு ஒழுங்கான சார்பு என்போம். $f(z) = u + iv$, இதில் u மற்றும் v ஆகியன x மற்றும் yஇன் சார்புகளாகும்.

x, yஇல் சிறிய அதிகரிப்பு δx மற்றும் δyக்கு முறையே u மற்றும் vஇல் அதிகரிப்பு δu மற்றும் δv எனில்

$$f(z + \delta z) = (u + \delta u) + i(v + \delta v)$$

இப்போது

$$\frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} = \frac{(u+\delta u) + i(v + \delta v) - (u + iv)}{\delta z}$$

$$= \frac{\delta u + i\delta v}{\delta z} = \frac{\delta u}{\delta z} + i\frac{\delta v}{\delta z}$$

$$\underset{\delta z \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} = \underset{\delta z \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\delta u}{\delta z} + i\frac{\delta v}{\delta z}$$

அல்லது $f'(z) = \underset{\delta z \to 0}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\delta u}{\delta z} + i\frac{\delta v}{\delta z}\right)$ $\rightarrow (1)$

δz ஆனது சுழியை எப்பாதையிலும் நெருங்கலாம்.

a) மெய் அச்சு (x அச்சு) வழியாக நெருங்க

$z = x + iy$ ஆனால் x அச்சில் $y = 0$

$\therefore z = x$, $\delta z = \delta x$

$\delta y = 0$

இம்மதிப்புகளை (1) இல் பிரதியிட

$$f'(z) = \underset{\delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + i\frac{\delta v}{\delta x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow (2)$$

b) கற்பனை அச்சு (y அச்சு) வழியாக நெருங்க

$z = x + iy$ ஆனால் y அச்சில், $x = 0$

$z = iy,\ \delta x = 0$

$\delta z = i\delta y$

(1) இல் பிரதியிட

$$f'(z) = \underset{\delta y \to 0}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\delta u}{i\delta y} + i\frac{\delta v}{i\delta y}\right) = \underset{\delta y \to 0}{\text{எல்லை}} \left(-i\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y}\right) =$$

$$\left(-i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \to (3)$$

சார்பு $f(z)$ வகையிடத்தக்கது (differentiable) எனில் மேற்கண்ட $f'(z)$இன் இரு கோவைகளும் சமமாகும். (2) மற்றும் (3) இல் இருந்து, சமப்படுத்த,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\}$$

இவை காஷி – ரீமான் சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

2.8 ஒரு சார்பு $f(z)$ பகுமுறை சார்பாக இருப்பதற்குப் போதுமான நிபந்தனைகள். (Sufficient Conditions)

தேற்றம்

ஒரு சார்பு $f(z) = u + iv$, R அரங்கத்தில் (Domain) அனைத்துப் புள்ளி களிலும் பகுமுறை சார்பாக இருப்பதற்குப் போதுமான நிபந்தனைகளாவன.

$$(i)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (ii)\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

ஆகியன R அரங்கத்தில், x மற்றும் yஇன் தொடர்சார்புகளாக (Continuous Function) இருக்க வேண்டும்.

நிரூபணம்

$f(z)$ என்ற சார்பு ஒற்றை மதிப்பு (single valued) சார்பாக, R அரங்கத்தின் அனைத்துப் புள்ளிகளிலும்

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

ஆகிய வகைக்கெழுக்களைப் பெற்றிருக்குமானால், காஷி–ரீமான் சமன்பாடுகளுக்கு அது இணங்கும்.

டெய்லரின் தேற்றப்படி,

$$f(z + \delta z) = u(x + \delta x,\ y + \delta y) + iv(x + \delta x,\ y + \delta y)$$

$$= u(x, y) + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\right] + \cdots + i\left[v(x, y) + \left[\frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y\right] + \cdots\right]$$

$$= [u(x, y) + iv(x, y)] + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\delta x + i\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\right] + \left[\frac{\partial u}{\partial y}\delta y + i\frac{\partial v}{\partial y}\delta y\right] + \cdots$$

$$= f(z) + \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right]\delta x + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right]\delta y + \cdots$$

(இரண்டு மற்றும் அதற்கு அதிகமான அடுக்குகளை ஒதுக்கி விட்டால்)

$$f(z+\delta z)-f(z)=\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right]\delta x+\left[\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right]\delta y \qquad \rightarrow (1)$$

காஷி ரீமான் சமன்பாடுகளின் படி

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ இவற்றை (1) இல் பிரதியிட

$$f(z+\delta z)-f(z)=\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right]\delta x+\left[-\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\right]\delta y$$

$$=\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right]\delta x+\left[i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right]i\delta y$$

$$=\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right].(\delta x+i\delta y)$$

$$=\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right].\delta z$$

அல்லது

$$\frac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

அல்லது

$$\underset{\delta z\rightarrow 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

அல்லது

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

2.9 காஷி – ரீமான் சமன்பாடுகளின் கோண தூர வடிவம் (polar form)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{மற்றும்} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\theta r}$$

நிரூபணம்

ஆயங்கள், கோண தூரங்களில்

$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta$ ஆகும்.

$$z = x + iy = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$u + iv = f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) \qquad \rightarrow (1)$$

(1)ஐ rஐப் பொருத்து வகையிட

$$\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r} = f'(re^{i\theta}).\ e^{i\theta} \qquad \rightarrow (2)$$

(1)ஐ θஐப் பொருத்து வகையிட

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta} = f'\left(re^{i\theta}\right)re^{i\theta}.i \qquad \rightarrow (3)$$

(2) மற்றும் (3)ஐ ஒப்பிட

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)i$$

அல்லது

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta} = ir\frac{\partial u}{\partial r} - r\frac{\partial v}{\partial r}$$

மெய் மற்றும் கற்பனைக் கோவைகளை ஒப்பிட

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

மாதிரி 4

கலப்பின மாறியின் சார்பு $f(z) = |z|^2$, ஆதி(Origin)யில் மட்டுமே வகையிடத்தக்கது எனக் காட்டுக.

$$f(z) = |z|^2 = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

ஆனால் $f(z) = u + iv$

எனவே $u = x^2 + y^2; \qquad v = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

காஷி–ரீமான் சமன்பாட்டின் படி

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ எனவே $2x = 0$ அல்லது $x = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ எனவே $2y = 0$ அல்லது $y = 0$

எனவே $f(z)$, $(0,0)$ வில் அல்லது ஆதியில் மட்டுமே வகையிடத்தக்கது.

மாதிரி 5

சார்பு $e^x(\cos y + i\ \sin y)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு எனக்காட்டு. இதன் வகைக்கெழு காண்க.

$e^x(\cos y + i\ \sin y) = u + iv$ என்க

$$e^x \cos y = u; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$e^x \sin y = v; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

இதிலிருந்து $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ எனத்தெரிகிறது.

எனவே $e^x(\cos y + i\ \sin\ y)$ என்பது ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும்.

மேலும் $f(z) = u + iv = e^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i\, e^x \sin y = e^x(\cos y + i\ \sin y)$$

$$= e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

மாதிரி 6

காஷி – ரீமான் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி, $f(z) = z^3$ ஆனது z தளம் முழுமைக்கும் ஒரு பகுமுறைச் சார்பு எனக்காட்டுக.

$$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy^3)$$

$$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

$$f(z) = u + iv$$

எனவே $u = x^3 - 3xy^2;\ \ v = 3x^2y - y^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \rightarrow (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \qquad \rightarrow (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \qquad \rightarrow (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \rightarrow (4)$$

(1) மற்றும் (4) இல் இருந்து, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(2) மற்றும் (3) இல் இருந்து , $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

எனவே $f(z) = z^3$ ஒரு பகுமுறைச் சமன்பாடாகும்.

மாதிரி 7

சார்பு $w = \sin\ z$ இன் பகுமுறைத்தன்மையை ஆராய்க.

அதிலிருந்து $\frac{d}{d2}(\sin z) = \cos z$ என்பதை தருவிக்க.

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x\ cos\ i\ y + \cos x \sin i\ y$$

$$= \sin x. cos\ hy + i \cos x \sin h\ y$$

எனவே $u = \sin x \cos h\ y$

$v = \cos x \sin h\ y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cos hy\ ;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sin hy\ ;$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \sin h\ y\ ;\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cos hy$

இவற்றிலிருந்து $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

எனவே இச்சார்பு ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும்.

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{d}{dz}(\sin x \cos hy + i\cos x \sin hy)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\sin x \cos h\, y + i \cos x \ \sin hy)$$

$$= \cos x \cos hy - i \, sin \, x \sin hy$$

$$= \cos x \cos \text{i}\, y - \sin x \sin iy)$$

$$= \cos(x + iy) = \cos z$$

மாதிரி 8.

சார்பு $w = \log z$ இன் மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகள், z சுழியல்லாதபோது காஷி–ரீமான் சமன்பாடுகளுக்கு இணங்குகின்றன எனக்காட்டுக.

$$w = \log z = \log(x + iy) \qquad \begin{bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$u + iv = \log \ (r\cos\theta + i\, r\sin\theta)$$

$$= \log r\ (\cos\theta + i \, sin \, \theta) = log_e re^{i\theta}$$

$$= log_e r + log_e e^{i\theta} = log_e r + i\theta$$

$$= log\sqrt{x^2 + y^2} + i \, tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \begin{bmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = tan^{-1}\frac{y}{x} \end{bmatrix}$$

எனவே $u = log\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\log\,(x^2 + y^2)$

$$v = tan^{-1}\, {}^{y}\!/_{x}$$

வகையிட,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2(x^2+y^2)}2x=\frac{x}{(x^2+y^2)} \quad \to (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}.\frac{1}{x}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)}.\frac{1}{x}=\frac{x}{(x^2+y^2)} \quad \to (2)$$

(1), (2) லிருந்து $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$

மீண்டும் வகையிட,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2(x^{2+}y^2)}2y=\frac{y}{(x^2+y^2)} \quad \to (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{-y}{x^2}\right)=\frac{-y}{(x^2+y^2)} \quad \to (4)$$

(3) மற்றும் (4) இல் இருந்து

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

காஷ் ரீமான் சமன்பாடுகளைத் திருப்திப்படுத்துவதால் $x^2+y^2=0$ என்று இல்லாத போது மட்டும் $w=\log z$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும்.

$x^2+y^2=0$ எனில் $x=y=0$ அல்லது $x+iy=0$ அல்லது $z=0$

$w=u+iv$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{(x^2+y^2)}-i\frac{y}{(x^2+y^2)}=\frac{x-iy}{(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{z}$$

மாதிரி 9.

$f(x) = xy^2 + ix^2y$ என்ற சார்பு எந்தப் புள்ளியில் காஷ்–ரீமான் சமன்பாடுகளுக்கு இணங்கும். $f'(z)$ எங்கே உள்ளது? எந்த இடத்தில் $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச்சார்பு எனக்காட்டுக.

$$f(z) = xy^2 + ix^2y = u + iv$$

$$u = xy^2; \qquad v = x^2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2$$

சார்பு, பகுமுறைச்சார்பெனில், இது காஷி–ரீமான் சமன்பாடுகளுக்கு இணங்க வேண்டும். அதாவது

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ அல்லது $y^2 = x^2$ $\rightarrow (1)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ அல்லது $2xy = -2xy$ அல்லது $4xy = 0$ $\rightarrow (2)$

(1) மற்றும் (2) இல் இருந்து $x = y = 0$

எனவே (0,0) என்ற ஆதியில் சார்பானது காஷி–ரீமான் சமன்பாடுகளுக்கு இணங்குகின்றது.

$f'(z)$ ஆதியில் மட்டுமே அமைகிறது. எனவே சார்பு $f(z)$ஆதியில் மட்டுமே பகுமுறைச்சார்பாகும்.

மாதிரி 10

சார்பு $z|z|$ எங்கேயும் பகுமுறைச்சார்பல்ல எனக்காட்டுக

தீர்வு :

$$w = z|z|$$

$w = u + iv$ மற்றும் $z = x + iy$

எனவே $u + iv = (x + iy)\sqrt{x^2 + y^2}$

$$u = x\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$v = y\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2 +} \frac{x.2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + y^2 + x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2 +} \frac{y.2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + y^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ , x = y$$

எனில்

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x.2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y.2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$$

காஷி–ரீமான் சமன்பாடுகளுக்கு இணங்கவில்லை. எனவே $z|z|$ என்ற சார்பு எவ்விடத்திலும் பகுமுறைச்சார்பல்ல.

மாதிரி .11

சார்பு $f(z) = u + iv$ இதில்

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2}, \qquad z \neq 0$$

$$= 0 \qquad z = 0$$

$z = 0$வில் சார்பு காஷி–ரீமான் நிபந்தனைகளுக்கு இணங்குகிறது எனக்காட்டுக. $z = 0$வில் இச்சார்பு ஒரு பகுமுறைச்சார்பா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

தீர்வு :

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} = u + iv$$

எனவே

$u = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$; $\qquad v = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ஆகிய வகைக்கெழுக்கள் (0,0) புள்ளியில் $\frac{0}{0}$ என்ற மதிப்பைப் பெறுகின்றன. எனவே முதல் கொள்கை (First principle) முறையைப் பயன்படுத்துவோம். ஆதி (0,0) வில்,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{u(0+h,0)-u(0,0)}{h} = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{h^3/h^2}{h} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \underset{k \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{u(0,0+k)-u(0,0)}{k} = \frac{-k^3/k^2}{k} = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{v(0+h,0)-v(0,0)}{h} = \frac{h^3/h^2}{h} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \underset{k \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{v(0,0+k)-v(0,0)}{k} = \frac{k^3/k^2}{k} = 1$$

இதிலிருந்து $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. எனவே சார்பு $z = 0$ வில் காஷி–ரீமான் நிபந்தனைகளுக்கு இணங்குகின்றது. மேலும்,

$$f'(0) = \underset{z \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(z)-f(0)}{z}$$

$$\underset{z \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \times \frac{1}{x+iy}\right]$$

$y = x$ வழியாக $z \to 0$ எனில்

$$f'(0) = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{x^3-x^3+i(x^3+x^3)}{x^2+x^2} \cdot \frac{1}{x+ix}$$

$$= \frac{2i}{2(1+i)} = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i(1-i)}{1+1} = \frac{1}{2}(1+i)$$

$y = 0$ வழியாக $z \to 0$ எனில்

$$f'(0) = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{x^3+ix^3}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = (1+i)$$

எனவே $f'(0)$ ஒரே மதிப்பைப் பெறவில்லை. எனவே சார்பு $f(z), z = 0$வில் பகுமுறைச் சார்பல்ல.

பயிற்சி 2.2

கீழ்க்கண்டவற்றில் பகுமுறைச் சார்புகள் எவை எனக் கண்டறிக.

1. $x^2 + iy^2$ — விடை $y = x$ எனும் அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் பகுமுறைச் சார்பாகும்.
2. $2xy + i(x^2 - y^2)$ — விடை பகுமுறையற்றது.
3. $\frac{x-iy}{x^2+y^2}$ — விடை பகுமுறையற்றது.

4. $\frac{1}{(z-1)(z+1)}$ விடை $z = \pm 1$ என்ற புள்ளிகளைத் தவிர

மற்ற அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் பகுமுறை கொண்டது.

5. $\frac{x-iy}{x-iy+a}$ விடை பகுமுறையற்றது.

6. $\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ விடை – பகுமுறைச் சார்பு.

7. $xy + iy^2$ விடை – ஆதியில் மட்டுமே பகுமுறைச் சார்பாகும்.

2.10 கலப்பினத் தொகையீடு (Complex Integration)

மெய் மாறியின் தொகை $\int_a^b f(x)dx$இன் பாதையானது x அச்சில் $x = a$ முதல் $x = b$ வரை அமையும். ஆனால் கலப்பின மாறி $f(z)$ இன் வரையறுக்கப்பட்ட தொகையானது, ஆர்கன்ட் வரை படத்தில் புள்ளி $z = a$ யிலிருந்து புள்ளி $z = b$ வரை எப்பாதையிலாவது, $\int_a^b f(z)dz$ என்ற குறிப்பிட்ட (definite) தொகையாக அமையும்.

இத்தொகையின் மதிப்பு, பாதையைப் பொருத்து அமையும். ஆனால் a யிலிருந்து b வரை உள்ள வரைகோடுகள் பகுமுறை கொண்டவை (Regular) எனில் இத்தொகை மாறா மதிப்பைப் பெறும்.

மாதிரி 12

தொகையின் மதிப்பைக் காண்க. $\int_e (x + y)dx + x^2 y dy$

$a)$ $y = x^2$ வழியாகப் புள்ளி (0,0) முதல் புள்ளி (3,9) வரை

$b)$ $y = 3x$ வழியாக மேற்கண்ட புள்ளிகள் வழியாக

மதிப்புகள் பாதையைப் பொருத்து அமைகின்றனவா ?

தீர்வு :

$$\int_C (x+y)dx + x^2y\,dy \rightarrow (1)$$

$P = x + y.$ $Q = x^2y$ என்க.

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1,$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$ அல்லது $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$

தொகைகள் பாதையைப் பொருத்து அமைகின்றன.

$a)\ y = x^2$ வழியாக. இதில் $dy = 2xdx$ ஆகும்.

இம்மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட

$$\int_0^3 (x+x^2)dx + x^2x^2(2xdx) = \int_0^3 (x + x^2 + 2x^5)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{9}{2} + 9 + 243$$

$$= 256\frac{1}{2}$$

$b)\ y = 3x$ வழியாக $dy = 3dx$ இம்மதிப்புகளை (1) இல் பிரதியிட

$$\int_0^3 (x+3x)dx + x^2\,(3x)(3dx)$$

$$= \int_0^3 (4x + 9x^3)dx$$

$$= \left[2x^2 + \frac{9}{4} \cdot x^4\right]_0^3$$

$$= 18 + \frac{729}{4}$$

$$= 200\frac{1}{4}$$

மாதிரி 13 மதிப்பிடுக

$$\int_{0,0}^{1,1} (3x^2 + 4xy + 3y^2)dx + 2(x^2 + 3xy + 4y^2)dy$$

$a)y^2 = x$ வழியாக $b)y = x^2$ வழியாக $c)y = x$ வழியாக

தீர்வு :

$$\int (3x^2 + 4xy + 3y^2)dx + 2\,(x^2 + 3xy + 4y^2)dy \quad \rightarrow (1)$$

$P = 3x^2 + 4xy + 3y^2, \quad Q = 2x^2 + 6xy + 8y^2$ என்க.

$\frac{\partial P}{\partial y} = 4x + 6y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x + 6y$ அல்லது $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

எனவே தொகையின் மதிப்பு, பாதையைப் பொருத்ததல்ல

$a)y^2 = x$ வழியாக. இதில் $2ydy = dx$

(1)ல் பிரதியிட

$$\int_0^1 (3x^2 + 4x\sqrt{x} + 3x)dx + 2(x^2 + 3x\sqrt{x} + 4x)\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$= \int_0^1 (3x^2 + 4x^{3/2} + 3x + x^{3/2} + 3x + 4x^{1/2})dx$$

$$= \left[x^3 + \frac{2}{5}4x^{5/2} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}x^{5/2} + 3\frac{x^2}{2} + 4\ \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \left[x^3 + 2x^{5/2} + 3x^2 + \frac{8}{3}x^{3/2}\right]_0^1$$

$$= 1 + 2 + 3 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}$$

$b)y = x^2$ வழியாக $dy = 2xdx$

இம்மதிப்புகளை (1) இல் பிரதியிட

$$\int_0^1 (3x^2 + 4x^3 + 3x^4)dx + (2x^2 + 6x^3 + 8x^4)\,2xdx$$

$$= \int_0^1 (3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 4x^3 + 12x^4 + 16x^5)dx$$

$$= \int_0^1 (3x^2 + 8x^3 + 15x^4 + 16x^5)dx$$

$$= \left[x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \frac{8}{3}x^6\right]_0^1$$

$$= 1 + 2 + 3 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}$$

$c) y = x$ வழியாக. இதில் $dy = dx$

(1) இல் இருந்து

$$\int_0^1 (3x^2 + 4x^2 + 3x^2)dx + (2x^2 + 6x^2 + 8x^2)dx$$

$$= \int_0^1 26x^2 dx$$

$$= \frac{26}{3}(x^3)\,\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{26}{3}$$

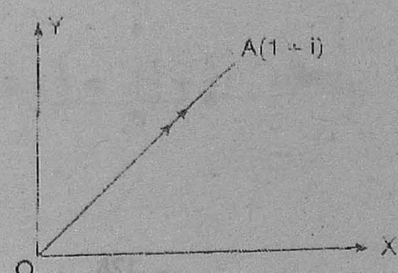
$(a), (b)$ மற்றும் (c) இல் பெறப்பட்ட அனைத்து மதிப்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும். எனவே இத்தொகையானது பாதையைப் பொருத்ததல்ல.

மாதிரி 14

கீழ்க்கண்ட தொகையின் மதிப்பைக் காண்க.

$$\int_0^{1+i} (x - y + ix^2)dz$$

$(a)\, z = 0$ முதல் $z = 1 + i$ வரையிலான நேர்கோட்டில் (b) மெய் ஆயத்தின் வழியாக $z = 0$ முதல் $z = 1$ வரையும் அதைத் தொடர்ந்து கற்பனை அச்சிற்கு இணையாக $z = 1$ முதல் $z = 1 + i$ வரையும்.



தீர்வு :

(a) OA கோட்டின் வழியாக (0,0) மற்றும் (1,1) இன் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டிற்கான சமன்பாடு,

$y-0=\frac{1-0}{1-0}(x-0)$ அல்லது $y=x$

$z=x+i\,y=x+ix=x(1+i)$

$dz=(1+i)dx$

$$\int_{OA}(x-y+ix^2)dz=\int_0^1(x-x+ix^2)(1+i)dx$$

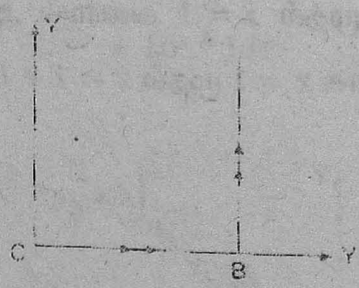
$$=(1+i)\int_0^1 ix^2dx=(1+i)i\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1$$

$$=(1+i)\frac{i}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(i-1)$$

விடை.

(b) OB வழியாகச் சென்று பின் BA வழியாக .



எனவே தொகை,

$$= \int_{OB} (x - y + ix^2)dz + \int_{BA} (x - y + ix^2)dx$$

$\rightarrow (1)$

வலப்புற முதலாவது கோவை,

$$= \int_{OB} (x - y + ix^2)dz = \int_0^1 (x - 0 + ix^2)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + i\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{3}$$

வலப்புற இரண்டாவது கோவை,

$$\int_{BA} (x - y + ix^2)dz = \int_0^1 (1 - y + i)idy$$

$$= i\left[y - \frac{y^2}{2} + iy\right]_0^1 = i\left(1 - \frac{1}{2} + i\right) = i\left(\frac{1}{2} + i\right) = \frac{i}{2} - 1$$

இம்மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட

தொகையின் மதிப்பு

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{3}\right) + \left(\frac{i}{2} + 1\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}i$$ விடை.

பயிற்சி 2.3

1. $A(1,1)$ முதல் $B(2,8)$ வரை, $f(z) = x^2 + ixy$ இன் தொகை காண்க. $i)$ AB நேர்கோட்டின் வழியாக

$ii)$ $x = t,\ y = t^3$ என்ற வளைகோடு C இன் வழியாக

விடைகள் $(i) -\frac{1}{3}(147 - 71i)$ $(ii) -\left[\frac{1094}{21} - \frac{124i}{5}\right]$

2. மதிப்பிடுக.

$$\int_{1-i}^{2+i} (2x + iy + 1)dz$$

$i) x = t + 1,\quad y = 2t^2 - 1$ வழியாக

$ii) 1 - i$ மற்றும் $2 + i$ ஐ இணைக்கும் நேர்கோட்டின் வழியாக

விடைகள் $(i)\ 4 + \frac{25}{3}i$ $(ii) 4 + 8i$

3. $\int_c (3y^2dx + 2ydy)$ என்ற தொகையை மதிப்பிடுக. இதில் c என்பது $x^2 + y^2 = 1$ என்ற வட்டம். இவ்வட்டத்தில் (1, 0) புள்ளியிலிருந்து கடிகார முள் சுற்றும் திசைக்கு எதிர் திசையில் (0 , 1) புள்ளி வரை

விடை $= -1$

4. மதிப்பிடுக $\int_0^{2+i} (\bar{z})^2\, dz$

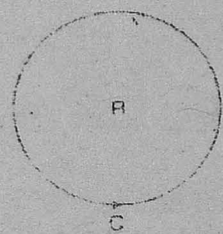
(i) மெய் அச்சில் 2 வரை பின் செங்குத்தாக $2 + i$ வரை

விடை $(i) \frac{1}{3}(14 + 11i)$

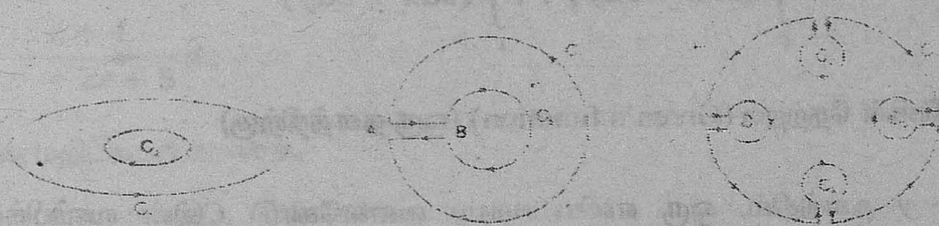
$(ii) y = \frac{x}{2}$ என்ற கோடு வழியாக விடை $(ii) \frac{5}{24}(2 - i)$

2.11 எளிதாக இணைக்கப்பட்ட மண்டலம் (Simply Connected Region)

(i) ஒரு எளிய வளைகோடு Cஇன் வரம்பிற்குட்பட்ட பகுதி R இல் மட்டுமே காஷியின் தொகை தேற்றம் பயன்படும். எளிய வளைகோடு எனப்படுவது தன்னைத்தானே வெட்டிக்கொள்ளாத, மூடிய வளைகோடாகும்.



(ii) பல் இணைப்பு மண்டலம் (Multiple Connected Region) எனப்படுவது, இரண்டிற்கு மேற்பட்ட வளைகோடுகளுக்குள் அடங்குவது.



ஒரு பல் இணைப்பு மண்டலத்தை, ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வெட்டுகள் மூலமாக எளிதாக இணைக்கப்பட்ட மண்டலமாக மாற்றலாம்.

2.12 காஷியின் தொகை தேற்றம் (Cauchy's Integral Theorem)

ஒரு எளிய மூடிய வரைகோடு Cஇன் மேலும், உட்புறமுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளிலும், ஒரு பகுமுறைச்சார்பு $f(z)$இன் வகைக்கெழு $f'(z)$ தொடர்ச்சி (Continuous) யானது எனில்,

$$\int_{c} f(z)dz = 0$$

நிரூபணம்

ஒரு மூடிய வரைகோடு Cஇன் உட்பகுதி அரங்கம் R என்போம்.

$f(z) = u + iv$

$z = x + iy$

$dz = dx + idy$ என்க.

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

கிரீனின் தேற்றம் (Green's function) (ஒரு தளத்திற்கு)

$x - y$ தளத்தில், ஒரு எளிய மூடிய வளைகோடு Cஇன் வரம்பிற்குள் அமையும் அரங்கம் Rஇல், சார்புகள் $\varphi(x,y), \psi(x,y), \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ மற்றும் $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ தொடர்ச்சியானவை எனில்,

$$\oint(\varphi dx + \psi dy) = \iint_R \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dxdy$$

இதன்படி

$$\int_C f(z)dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \iint_R \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] dxdy + i \iint_C \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right] dxdy$$

$$= 0 + i0$$

$$= 0$$

அல்லது

$$\int_C f(z)dz = 0$$

மாதிரி – 15

$|z+1| = 1$ என்பது c என்ற வட்டத்தைக் குறிக்குமானால்,

$$\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz$$

இன் மதிப்பைக் காண்க.

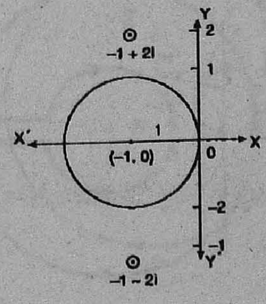
தீர்வு :

தொகை சார்பின் முனைவுகளை (poles)க்காண அதன் பகுதியைச் (Denominator) சுழியுடன் ஒப்பிட வேண்டும்.

$z^2 + 2z + 5 = 0$ அல்லது $z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$

$$= \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

$$= -1 \pm 2i$$



$|z+1|=1$ என்ற வட்டத்தின் மையம் $z=-1$, அதன் ஆரம் ஓரலகு. இவ்வட்டத்தினுள் சிறப்புப்புள்ளிகள் எதுவும் அமையவில்லை. எனவே காஷியின் தொகை வாய்பாட்டின் படி

$$\int_c \frac{z+4}{z^2+2z+5}dz = 0$$

ஆகும்.

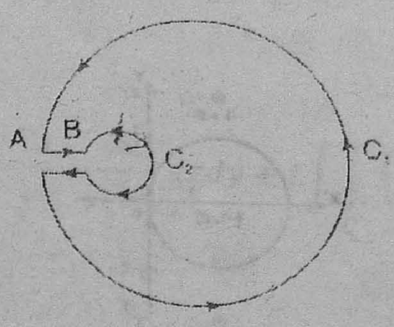
2.13 காஷியின் தொகை தேற்றத்தைப் பல் இணைப்பு மண்டலங்களுக்கும் விரிவாக்குதல்

இரு எளிய மூடிய வளைகோடுகள் C_1 மற்றும் C_2 க்கு இடையே உள்ள பகுதி Rஇல் $f(z)$ ஆனது பகுமுறைச்சார்பு எனில்

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

நிரூபணம்

ஒரு தொகை $f(z)$இன் பாதை AB வழியாக, C_2இல் கடிகார முள் சுற்றும் திசையில், பின் BA வழியாக, இறுதியாக C_1இல் கடிகார முள் சுற்றும் திசைக்கு எதிர் திசையில் எனில்



$$\int f(z)dz = 0$$

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz = 0$$

அல்லது

$$\int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz = 0$$

$$\because \int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$$

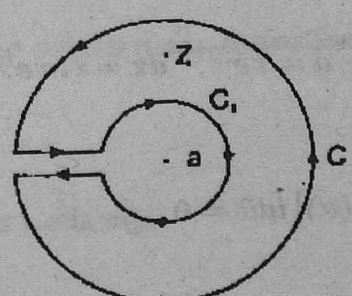
C_2இன் திசையை மாற்றியமைக்க,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

2.14 காஷியின் தொகை வாய்பாடு (Cauchy's Integral formula)

c என்ற மூடிய வளைகோட்டின் மேலும் அதன் உட்புறமும், $f(z)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு என்போம். c யினுள் a ஒரு புள்ளி, எனில்

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-a}dz$$



நிரூபணம்

$\frac{f(z)}{z-a}$ என்ற சார்பு C யினுள், புள்ளி aஐத் தவிர மற்ற அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் பகுமுறைச்சார்பு (analytic) எனலாம்.

புள்ளி a ஐ மையமாக, r ஆரம் கொண்ட C_1 என்ற சிறிய வட்டம் முற்றிலும் C யினுள் அமையுமாறு கருதுவோம்.

C மற்றும் C_1க்கு இடைப்பட்ட பகுதியில் $\frac{f(z)}{z-a}$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பாகும். எனவே காஷியின் தொகை தேற்றப்படி,

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_{C_1} \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_{C_1} \frac{f(z)-f(a)+f(a)}{z-a}dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz + f(a)\int_{C_1} \frac{dz}{z-a} \quad \to (1)$$

C_1 இன் மேல் எப்புள்ளியிலும்,

$$\int_{C_1} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz = \int_{C_1}^{2\pi} \frac{f\left(a+re^{i\theta}\right)-f(a)}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}d\theta$$

$$\left[z-a = re^{i\theta}, \quad dz = ri\, re^{i\theta}d\theta\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[f\left(a+re^{i\theta}\right)-f(a)\right] id\theta = 0$$

(r சுழியை நெருங்க)

$$\int_{c_1} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = i[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

எனவே (1) இல் இருந்து

$$\int_c \frac{f(z)dz}{z-a} = 0 + f(a)2\pi i$$

அல்லது

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-a} dz$$

ஒரு பகுமுறை சார்பின் வகைக்கெழுவுக்கான காஷியின் தொகை வாய்பாடு

$f(z)$ என்ற சார்பு அரங்கம் Rஇல் பகுமுறைச்சார்பு எனில், அதன் வகைக்கெழு, Rஇல் $z = a$ என்ற எந்தப் புள்ளியிலும் பகுமுறை கொண்டது. அதற்கான சமன்பாடு

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

C என்பது Rஇல் $z = a$ ஐச் சுற்றிய மூடிய வளைகோடாகும்.

நிரூபணம்

காஷியின் தொகை வாய்பாடு,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)}dz$$

$$\rightarrow (1)$$

aஐப் பொருத்து வகையிட,

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{z-a}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

இதேபோல்,

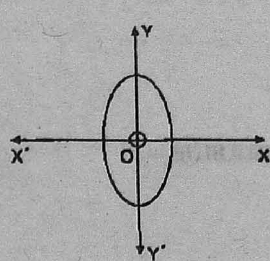
$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$$

மாதிரி 16

$$\int_C \frac{1}{z}\cos z\, dz$$

என்ற தொகையை மதிப்பிடுக. இதில் C ஆனது $9x^2 + 4y^2 = 1$ என்ற நீள்வட்டமாகும்.



தீர்வு

$9x^2 + 4y^2 = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தினுள் $z = 0$ என்ற எளிய முனைவு அமைகிறது. காஷியின் தொகை வாய்பாட்டின்படி,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cos z}{z} dz$$

$f(z) = \cos z, \quad f(0) = \cos 0 = 1$

எனவே

$$\int_C \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i$$

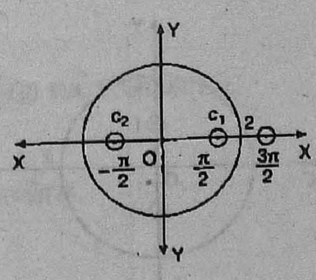
மாதிரி 17

$$\int_C \tan z\, dz$$

என்ற கலப்பினத் தொகையை மதிப்பிடுக. இதில் $|z| = 2$

தீர்வு :

$$\int_C \tan z\, dz = \int_C \frac{\sin z}{\cos z} dz$$



$|z| = 2$ என்பது, 2 அலகு ஆரமும் ஆதியை மையமாகவும் கொண்ட வட்டமாகும். முனைவுகளைக் காண, $\cos z = 0$ என்போம்.

எனவே $z = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \ldots$

வட்டத்தினுள் அமையும் முனைவுகள் $z = -\frac{\pi}{2}$ மற்றும் $z = \frac{\pi}{2}$

காஷி தொகை வாய்பாட்டின்படி,

$$\int_C \frac{\sin z}{\cos z} dz = \int_{C_1} \frac{\sin z}{\cos z} dz + \int_{C_2} \frac{\sin z}{\cos z} dz$$

$$= 2\pi i (\sin z)_{z=\frac{\pi}{2}} + 2\pi i (\sin z)_{z=\frac{-\pi}{2}}$$

$$= 2\pi i(1) + 2\pi i(-1)$$

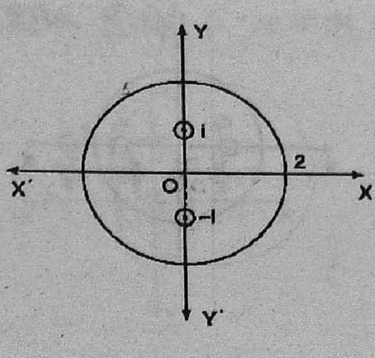
$$= 0$$

மாதிரி 18

$|z| = 2$ என்ற வட்டத்தின் மேல்,

$$\int_{C_2} \frac{e^z}{z^2+1} dz$$

இன் மதிப்பைக் காண்க.



தீர்வு :

தொகை சார்பின் முனைவுகளைக் கண்டறிய, $z^2+1=0$ என்க.

$z^2=-1$ அல்லது $z=\pm i$.

இரண்டு எளிய முனைவுகள் $z=i$ மற்றும் $z=-i$ ஆகும்.

ஆதியில் மையமும் இரண்டு அலகு ஆரமும் கொண்ட வட்டத்தினுள் இவ்விரு முனைவுகளும் அமையும்.

$$\int_C \frac{e^z}{z^2+1}dz=\int_C \frac{1}{2i}\left(\frac{e^z}{z-i}-\frac{e^z}{z+i}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2i}\int_C \frac{e^z}{z-i}dz-\frac{1}{2i}\int_C \frac{e^z}{z+i}dz$$

தொகை தேற்றத்தின்படி,

$$=\frac{1}{2i}2\pi i(e^z)_{z=i}-\frac{1}{2i}2\pi i(e^z)_{z=-i}$$

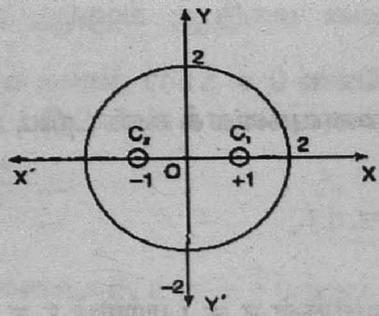
$$=\pi e^i-\pi e^{-i}$$

$$=\pi 2i\frac{(e^i-e^{-i})}{2i}=2\pi i\sin 1$$

மாதிரி 19

C என்பது $x^2+y^2=4$ என்ற வட்டமெனில்,

$\int_C \frac{dz}{z^2-1}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.



தீர்வு :

முனைவுகளைக் காண, $z^2 - 1 = 0$ என்போம். $z = \pm 1$ ஆதியை மையமாகக் கொண்ட 2 அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தினுள் இம்முனைவுகள் அமைகின்றன. எனவே

$$\int_C \frac{dz}{z^2 - 1} = \int_{C_1} \frac{dz}{z^2 - 1} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^2 - 1}$$

$$= 2\pi i(1) + 2\pi i(-1)$$

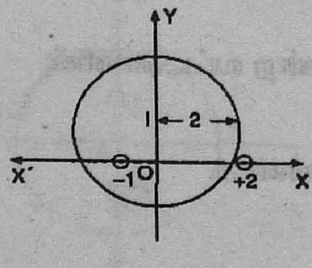
$$= 0$$

மாதிரி 20

C ஆனது $|z - i| = 2$ என்ற வட்டமெனில்,

$$\int_{C_2} \frac{(z-1)}{(z+1)^2(z-2)} dz$$

ஐ மதிப்பிடுக



தீர்வு :

முனைவுகள் $z = -1, -1, 2$. $z = -1$இல் இரண்டாம் வரிசை முனைவும் $z = 2$ இல் ஒரு முனைவும் அமைகின்றன. $z = -1$ மட்டுமே வட்டத்தினுள் அமைகிறது.

$$\int_{C_2} \frac{(z-1)dz}{(z+1)^2(z-2)} = \int_{C_2} \frac{\frac{z-1}{z-2}}{(z+1)^2} dz$$

காஷியின் தொகை வாய்பாட்டின்படி,

$$\int \frac{f(z)}{(z+1)^2} dz = 2\pi i\, f'(-1)$$

$$f(z) = \frac{z-1}{z-2}$$

$$f'(z) = \frac{(z-2)1 - (z-1).1}{(z-2)^2} = \frac{-1}{(z-2)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{(z-2)^2} = -\frac{1}{9}$$

$$\therefore \int \frac{f(z)}{(z+1)^2} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{2\pi i}{9}$$

பயிற்சி 2.4

கீழ்க்கண்டவற்றை மதிப்பிடுக.

1. $\int_c \frac{1}{z-a}dz$, c ஒரு எளிய மூடிய வரைகோடு. புள்ளி $z = a$

   $i)$ c க்கு வெளியே $ii)$ c க்கு உள்ளே விடை $i)0$ $ii)2\pi i$

2. $\int_c \frac{e^z}{z-1}dz$, c என்பது $|z| = 2$ என்ற வட்டம் விடை $2\pi ie$

3. $\int_c \frac{\cos \pi z}{z-1}dz$, $|z| = 3$ வட்டம் c விடை $-2\pi i$

4. $\int_c \frac{\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$, c என்ற வட்டம் $|z| = 3$ விடை $4\pi i$

5. $\int_c \frac{e^{-z}}{(z+2)^5}dz$, c என்ற வட்டம் $|z| = 3$, விடை $\frac{\pi ie^2}{12}$

6. $[P(z)/Q(z)]$ ல் $P(z)$ மற்றும் $Q(z)$ என்பன இரண்டாம்படி (degree two) கலப்பின பல்லுறுப்புகளாகும். $f(0) = f(-1) = 0$ மற்றும் சார்பு $f(z)$இன் இரண்டாம் வரிசை (order 2) சிறப்புப்புள்ளி $z = 1$இல் எச்சம் –1 எனில் $f(z)$ஐக் காண்க.

விடை $f(z) = \frac{-1}{3}\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$

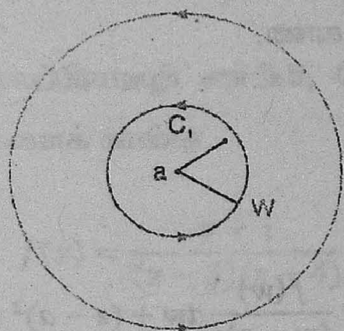
2.15 டெய்லர் தேற்றம் (Taylor's theorem)

aஇல் மையமும் R ஆரமும் கொண்ட ஒரு வட்டம் Cயினுள் அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் $f(z)$ என்ற சார்புப் பகுமுறை (analytic) சார்பு எனில் , ஒவ்வொரு புள்ளியிலும்

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$$

நிரூபணம்

Cயினுள் z என்ற புள்ளியைக் கருதுவோம். aயை மையமாகக் கொண்டு zஐ உள்ளடக்கிய வட்டம் C என்போம். w என்பது C_1 இன் மீது அமைந்த ஒரு புள்ளி, எனில்



$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a+a-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}$$

$$=\frac{1}{(w-a)\quad\left[1-\frac{z-a}{w-a}\right]}$$

$$=\frac{1}{w-a}\left[1-\frac{z-a}{w-a}\right]^{-1}$$

ஈருறுப்புத்தேற்றத் (binomial theorem) தைப் பயன்படுத்த

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}\left[1+\frac{z-a}{w-a}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{w-a}+\frac{(z-a)}{(w-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^3}+\cdots+\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}+\cdots] \quad \rightarrow (1)$$

இதில் $|z-a|<|w-a|$ அல்லது $\frac{|z-a|}{|w-a|}<1$

எனவே தொடர் (1) சீராக ஒருங்கும் (converging) தொடராகும். எனவே இத்தொடர் வகையிடத்தக்கதாகும்.

(1)ஐ $f(w)$ஆல் பெருக்க,

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-a} + \frac{(z-a)f(w)}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2 f(w)}{(w-a)^3} + \cdots + \frac{(z-a)^n f(w)}{(w-a)^{n+1}} + \cdots$$

wஐப் பொருத்துத் தொகை காண,

$$\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$= \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-a} dw + (z-a) \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw + (z-a)^2 \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^3} dw + \cdots$$

$$+(z-a)^n \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw + \cdots$$

$$\rightarrow (2)$$

காஷியின் தொகை வாய்பாட்டின்படி

$$\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i\, f(z)$$

$$\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-a} dw = 2\pi i f(a)$$

$$\int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw = 2\pi i f'(a)$$

…………………………………..

……………………………….

இவற்றை (2) இல் பிரதியிட,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n\,!}(z-a)^n + \cdots$$

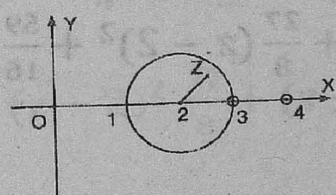
மாதிரி 21

கொடுக்கபட்ட கலப்பினமாறி சார்பின், டெய்லர் தொடருக்கான, முதல் நான்கு கோவைகளைக் காண்க.

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-3)(z-4)}$$

$z = 2$ஐப் பற்றிய இதன் ஒருங்கும் அரங்கத்தையும் காண்க.

தீர்வு :



$$f(z) = \frac{z+1}{(z-3)(z-4)}$$

ஒரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளி $z = 2$ எனில், சிறப்புப்புள்ளிகள் $z = 3$ மற்றும் 4 அம்மையத்திலிருந்து 1 மற்றும் 2 அலகு தூரங்களில் அமைகின்றன. எனவே 1 அலகு ஆரமும் $z = 2$ஐ மையமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் உட்புறம் $|z-2| = 1$ இல், கொடுக்கப்பட்ட சார்பு பகுமுறைச்சார்பாகிறது.

எனவே இதனை டெய்லர் தொடராக விரிக்கலாம். $|z-2| = 1$என்ற வட்டமானது சார்பின் ஒருங்கும் வட்டமாகிறது.

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-3)(z-4)} = \frac{-\ 4}{z-3} + \frac{5}{z-4}$$

(பகுதிப்பின்னங்களாக) (partial fractions)

$$= \frac{-4}{(z-2)-1} + \frac{5}{(z-2)-2} = 4(1-(z-2)^{-1} - \frac{5}{2}\left[1 - \frac{(z-2)}{2}\right]^{-1}$$

$$= 4[1 + (z-2) + (z-2)^2 + (z-2)^3 + \cdots]$$
$$- \frac{5}{2}\left[1 + \frac{(z-2)}{2} + \frac{(z-2)^2}{4} + \frac{(z-2)^3}{8} + \cdots\right]$$

$$= \left(4 - \frac{5}{2}\right) + \left(4 - \frac{5}{4}\right)(z-2) + \left(4 - \frac{5}{8}\right)(z-2)^2 + \left(4 - \frac{5}{16}\right)(z-2)^3 + \cdots$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{11}{4}(z-2) + \frac{27}{8}(z-2)^2 + \frac{59}{16}(z-2)^3 + \cdots$$ விடை.

<u>வேறொரு வழிமுறை :</u>

உருவரை தொகைக்காணும் (contour integral) முறையில் டெய்லர் விரிவாக்கத்தைப் பெறலாம்.

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-3)(z-4)}$$

$$f(2) = \frac{2+1}{(2-3)(2-4)} = \frac{3}{2}$$

$f(z)$ஐப் பகுதிப்பின்னங்களாக்க,

$$\frac{z+1}{(z-3)(z-4)} = \frac{-\ 4}{z-3} + \frac{5}{z-4}$$

$$f'(z) = \frac{4}{(z-3)^2} - \frac{5}{(z-4)^2}, \qquad f'(2) = \frac{4}{(2-3)^2} - \frac{5}{(2-4)^2} = \frac{11}{4}$$

$$f''(z) = \frac{-8}{(z-3)^3} + \frac{10}{(z-4)^3}, \qquad f''(2) = \frac{-8}{(2-3)^3} + \frac{10}{(2-4)^3} = \frac{27}{4}$$

$$f'''(z) = \frac{24}{(z-3)^4} - \frac{30}{(z-4)^4}, \qquad f'''(2) = \frac{24}{(2-3)^4} - \frac{30}{(2-4)^4} = \frac{177}{8}$$

டெய்லர் தொடரானது,

$$f(z) = f(a) + (z-a)\ f'(z) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(z-a)^3}{3!} f'''(a)$$
$$+ \cdots$$

எனவே

$$\frac{z+1}{(z-3)(z-4)} = \frac{3}{2} + (z-2)\frac{11}{4} + \frac{(z-2)^2}{2!}\ \frac{27}{4} + \frac{(z-2)^3}{3!}\ \frac{177}{8}$$

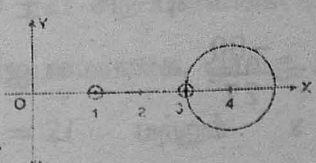
$$= \frac{3}{2} + (z-2)\frac{11}{4} + (z-2)^2\ \frac{27}{8} + (z-2)^3\ \frac{59}{16} + \cdots$$

விடை

மாதிரி 22

$z = 4$ புள்ளியைப் பற்றிக், கலப்பினமாறிச் சார்பு $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ன் டெய்லர் விரிவாக்கத்தைக்காண்க. இச்சார்பின் ஒருங்கும் பகுதியையும் காண்க.

தீர்வு :



$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

$z = 4$ஐ மையமாகவும், 1 அலகு ஆரமும் கொண்ட வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 1 மற்றும் 3 அலகு தொலைவுகளில் சிறப்புப்புள்ளிகள் அமைகின்றன. எனவே வட்டத்தின் உட்புறத்தில் சார்பு, பகுமுறைச்சார்பாகிறது.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} \ , \ f(4) = \frac{1}{(4-1)(4-3)} = \frac{1}{3}$$

பகுதிப் பின்னங்களின்படி

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}\right]$$

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(z-3)^2} + \frac{1}{(z-1)^2}\right]$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2}\right] = -\frac{4}{9}$$

$$f''(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(z-3)^3} - \frac{2}{(z-1)^3}\right]$$

$$f''(4) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{1} - \frac{2}{3^3}\right] = \frac{26}{27}$$

$$f'''(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{-6}{(z-3)^4} + \frac{6}{(z-1)^4}\right]$$

$$f'''(4) = \frac{1}{2}\left[-\frac{6}{1} + \frac{6}{3^4}\right] = \frac{-80}{27}$$

என்வே டெய்லர் தொடரானது,

$$f(z) = f(a) + (z-a)\frac{f'(a)}{1!} + (z-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

$$= \frac{1}{3} + (z-4)\left(-\frac{4}{9}\right) + \frac{(z-4)^2}{2!}\left(\frac{26}{27}\right) + \frac{(z-4)^3}{3!}\left(-\frac{80}{27}\right) + \cdots$$

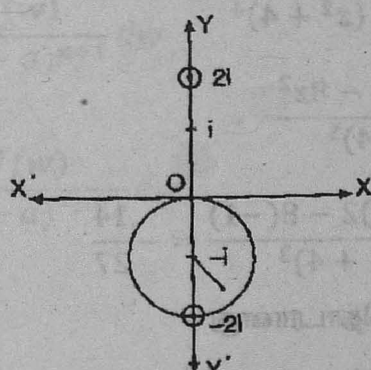
$= \frac{1}{3} - \frac{4}{9}(z-4) + \frac{13}{27}(z-4)^2 - \frac{40}{81}(z-4)^3 + \cdots$ விடை.

மாதிரி 23

$z = -i$ஐப் பற்றிச் சார்பு $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ இன் டெய்லர் தொடரின் முதல் மூன்று கோவைகளைக் காண்க. ஒருங்கும் பகுதியையும் காண்க.

தீர்வு :

சார்பின் முனைவுகளைக் காண $z^2 + 4 = 0$ என்க.



எனவே $z^2 = -4$, $z = \pm 2i$ சிறப்புள்ளிகள் $z = 2i$ மற்றும் $z = -2i$இல் அமைகின்றன. $z = -i$ஐ மையமாக, ஓரலகு ஆரம் கொண்ட வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து $z = 2i$ மற்றும் $z = -2i$ தொலைவுகளில்,

சிறப்புப்புள்ளிகள் இருக்கின்றன. எனவே வட்டத்தின் உட்புறத்தில் சார்பு, பகுமுறைச்சார்பாகிறது.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$$

மேற்கண்ட சார்பினை வட்டத்தின் மையம் $z = -i$ஐப் பற்றி விரிவாக்க வேண்டும். இதில் $a = -i$

$$\therefore f(z) = f(-i) + (z + i)f'(-i) + \frac{(z+i)^2}{2!} f''(-i) + \frac{(z+i)^3}{3!} f'''(-i) + \cdots$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4} \quad ; \quad f(-i) = \frac{1}{(-i)^2 + 4} = \frac{1}{-1 + 4} = \frac{1}{3}$$

$$f'(z) = \frac{-2z}{(z^2 + 4)^2} \quad ; \quad f'(-i) = \frac{2i}{(-1 + 4)^2} = \frac{2i}{9}$$

$$f''(z) = -\frac{(z^2 + 4)^2 2 - 2z.2(2^2 + 4)2z}{(z^2 + 4)^4}$$

$$f''(z) = -\frac{(z^2 + 4)2 - 8z^2}{(z^2 + 4)^3}$$

$$f''(-i) = -\frac{(-1 + 4)2 - 8(-1)}{(-1 + 4)^3} = -\frac{14}{27}$$

இவற்றைப் பிரதியிட, தொடரானது

$$f(z) = \frac{1}{3} + (z + i)\left(\frac{2i}{9}\right) + \frac{(z + i)^2}{2!}\left(-\frac{14}{27}\right) + \cdots$$

$$f(z) = \frac{1}{3} + \frac{2i}{9}(z + i) - \frac{7}{27}(z + i)^2 + \cdots$$

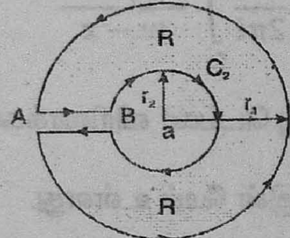
ஒருங்கும் பகுதி $|z + i| < 1$ ஆகும்.

2.16 லாரன்ட் தேற்றம் (Laurent's theorem):

$f(z)$ என்ற சார்பை ஒரு புள்ளியைப் பற்றி விரித்து எழுதும் போது, அப்புள்ளியில் அச்சார்பு பகுமுறையற்றது எனில் அதை லாரன்ட் தொடரில் எழுத வேண்டும். டெய்லர் முறையில் அல்ல.

a ஐப் பொது மையமாகக் கொண்ட முறையே r_1, r_2 ஆரம் கொண்ட $(r_1 > r_2)$ c_1, c_2 என்ற இரு வட்டங்களிலும் அவற்றின் இடைப்பகுதி R லும் $f(z)$ என்ற சார்பு, பகுமுறைச் சார்பு எனில்,

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots$$



இதில்

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}} dw$$

நிருபணம்:

இரு வட்டங்களுக்கிடையே AB என்ற வெட்டுப்பகுதியை இணைத்து, R என்ற பல்–இணைப்புப் (multi connected) பகுதியை எளிய இணைப்புப் (simply connected) பகுதியாக மாற்றலாம். இப்பகுதி Rஇல் $f(z)$ பகுமுறை சார்பாகும். எனவே காஷியின் தொகை வாய்பாட்டின்படி

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)dw}{w-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{f(w)dw}{w-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(w)dw}{w-z}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{BA}\frac{f(w)dw}{w-z}$$

தொகைகள் AB மற்றும் BA வழியாக எதிரெதிராகச் செல்வதால் ஒன்றை ஒன்று ரத்து செய்யும். c_2இன் திசை c_1 க்கு எதிராகக் கடிகாரமுள் சுற்றும் திசையில் அமைவதால் எதிர்க்குறியுடன் கொள்ளப்படுகிறது. எனவே,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)dw}{w-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(w)dw}{w-z} \qquad \rightarrow (1)$$

முதலாவது தொகை $\frac{f(w)}{w-z}$ ஐ டெய்லர் விரிவாக்கம் செய்ய

$\frac{|z-a|}{|w-a|}\leq 1 \because w$ ஆனது c_1இன் மேல் உள்ளது.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)dw}{w-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)dw}{(w-a)}+\frac{(z-a)}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)dw}{(w-a)^2}$$

$$+\frac{(z-a)^2}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)dw}{(w-a)^3}+\cdots \qquad \Big[a_n$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

$$=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots \qquad \rightarrow (2)$$

இரண்டாவது தொகையில் w ஆனது c_2இன் மேல் உள்ளது.

$|w-a|<|z-a|$ அல்லது

$$\frac{|w-a|}{|z-a|}<1$$

எனவே

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a+a-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}$$

$$=\frac{-1}{(z-a)}\frac{1}{\left[1-\frac{(w-a)}{(z-a)}\right]}$$

$$=\frac{-1}{(z-a)}\left[1-\frac{(w-a)}{(z-a)}\right]^{-1}$$

$$=\frac{-1}{(z-a)}\left[1+\frac{w-a}{z-a}+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^{n+1}\right.$$

$$\left.+\cdots\right]$$

$-\frac{f(w)}{2\pi i}$ ஆல் பெருக்க,

$$-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(w)}{w-z}$$

$$=\frac{f(w)}{2\pi i(z-a)}+\frac{(w-a)}{2\pi i(z-a)^2}f(w)+\frac{1}{2\pi i}\frac{(w-a)^2}{(z-a)^3}f(w)+\cdots$$

$$=\frac{1}{(z-a)}\frac{1}{2\pi i}f(w)+\frac{1}{(z-a)^2}\frac{1}{2\pi i}\frac{f(w)}{(w-a)^{-1}}+\frac{1}{(z-a)^3}\frac{1}{2\pi i}\frac{f(w)}{(w-a)^{-2}}$$

$$+\cdots$$

தொகையிட,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)dw}{(w-z)}$$

$$=\frac{1}{(z-a)}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}f(w)dw+\frac{1}{(z-a)^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)dw}{(w-a)^{-1}}$$

$$+\frac{1}{(z-a)^3}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)dw}{(w-a)^{-2}}+\cdots$$

$$= \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \frac{b_3}{(z-a)^3} + \cdots \quad \rightarrow (3)$$

$$\left[b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)dw}{(w-a)^{-n+1}} \right]$$

(2) மற்றும் (3)ஐ (1) இல் பிரதியிட

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + b_1(z-a)^{-1} + b_2(z-a)^{-2} + \cdots$$

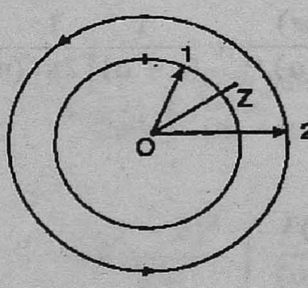
அல்லது

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

மாதிரி 24

லாரன்ட் விரிவாக்கம் செய்க.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, \qquad 1 < |z| < 2$$



தீர்வு :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$= (z-2)^{-1} - (z-1)^{-1}$$

$$= (-2)^{-1}\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-1} - (z)^{-1}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-1}$$

$\frac{1}{|z|} < 1$ என்பதால் வலப்புற முதலாவது கோவையிலிருந்து 2ஐயும், இரண்டாவது கோவையிலிருந்து z−ஐயும் அடைப்புக்கு வெளியே எடுத்துவிட்டோம். எனவே

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1}$$

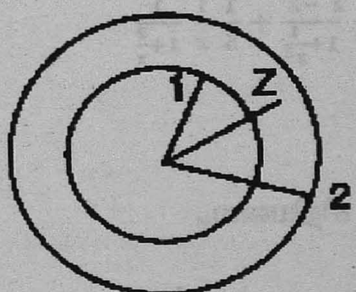
$$= -\frac{1}{2}\left[1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right] - \frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\cdots$$ விடை.

மாதிரி 25

$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(z+2)}$ ஐ $(i) 1 < |z| < 2$

$(ii) |z| > 2$ எனில் லாரண்ட் விரிவாக்கம் செய்க.



தீர்வு :

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(z+2)}$$

$$= \frac{\frac{-z}{5}+\frac{2}{5}}{1+z^2} + \frac{\frac{1}{5}}{z+2} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{z-2}{1+z^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+2}$$

$$(i) f(z) = -\frac{1}{5}\frac{1}{z^2}\frac{z-2}{1+\frac{1}{z^2}} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$

இதில் $\left|\frac{1}{z^2}\right|$ மற்றும் $\left|\frac{z}{2}\right|$, 1ஐ விடச் சிறியவை.

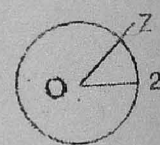
$$f(z) = -\frac{1}{5z^2}(z-2)\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{-1} + \frac{1}{10}\left(1+\frac{z}{2}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{1}{5Z}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{z^2}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}+\cdots\right)+\frac{1}{10}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^7}+\cdots+\frac{2}{z^2}-\frac{2}{z^4}+\frac{2}{z^6}-\frac{2}{z^8}+\cdots+\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}\right.$$
$$\left.-\frac{z^3}{16}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ldots - 2z^8 + z^{-7} + 2z^{-6} - z^5 - 2z^{-4} + z^{-3} + 2z^{-2} - z^{-1} + \frac{1}{2}\right.$$
$$\left. - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \cdots\right]$$

$$(ii) f(z) = \frac{1}{5}\ \frac{z-2}{1+z^2} + \frac{1}{5}\ \frac{1}{z+2} = -\frac{1}{5}\ \frac{1}{z^2}\ \frac{z-2}{1+\frac{1}{z^2}} + \frac{1}{5}\ \frac{1}{z}\ \frac{1}{1+\frac{2}{z}}$$



இதில் $\left|\frac{1}{z^2}\right|$ மற்றும் $\left|\frac{z}{2}\right|$, ஒன்றை விடச் சிறியவை.

$$f(z) = -\frac{1}{5z^2}(z-2)\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{-1} + \frac{1}{5z}\left(1+\frac{2}{z}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{5z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\frac{16}{z^4}\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^7}+\cdots+\frac{2}{z^2}-\frac{2}{z^4}+\frac{2}{z^6}-\frac{2}{z^8}+\cdots+\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}\right.$$
$$\left.+\frac{4}{z^3}-\frac{8}{z^4}\ldots\right)$$

மாதிரி 26

$z = -2$ புள்ளியைப் பற்றி $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$ சார்பின் பொருத்தமான லாரண்ட தொடரைப் பயன்படுத்தி அனைத்து லாரன்ட் தொடர்களையும் எழுதுக.

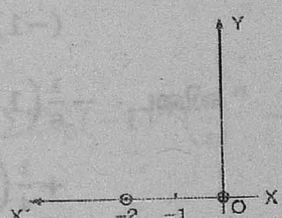
தீர்வு :

$z = -2$ஐப் பற்றி $\frac{1}{z(z+2)^3}$ ஐ $(z+2)$ இன் அடுக்குகளாக விரிவாக

$z + 2 = t$ என்க. எனவே,

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{(t-2)t^3} = \frac{1}{t^3}.\frac{1}{t-2}$$

$$= \frac{1}{t^3}.\frac{1}{-2}\frac{1}{\left(1-\frac{t}{2}\right)} = -\frac{1}{2t^3}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-1}$$



$0 < |z-2| < 1$ அல்லது $0 < t < 1$

$$= \frac{-1}{2t^3}\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{16} + \frac{t^5}{32} + \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{2t^3} - \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{8t} - \frac{1}{16} - \frac{t}{32} - \frac{t^2}{64} - \cdots$$

$$= -\frac{1}{2(z+2)^3} - \frac{1}{4(z+2)^2} - \frac{1}{8(z+2)} - \frac{1}{16} - \frac{(z+2)}{32} - \frac{(z+2)^2}{64} \cdots$$

விடை.

பயிற்சி 2.5

கீழ்க்கண்ட சார்புகளை டெய்லர் தொடர்களாக விரிக்கவும்

1. $z = 1$ஐப் பற்றி $\frac{1}{z+1}$

விடை $-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} \dots\right) - (z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots)$

2. $\frac{z-1}{z+1}$. $a) z = 0$ஐப் பற்றி விடை : $-1 + 2(z - z^2 + z^3 - z^4 + \cdots)$

$b) z = 1$ஐப் பற்றி விடை $\frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{2^2}(z-1)^2 + \frac{1}{2^3}(z-1)^3 - \cdots$

3. $\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ என்ற சார்பை லாரண்ட் தொடரில் விரிக்கவும்

$a)\ 1 < |z| < 3$ எனில் விடை $\frac{1}{2}z^{-1}(1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + \cdots)$

$-\frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} \dots\right)$

$b)\ |z| < 3$ எனில் விடை $z^{-1} - 4z^{-3} + 13z^{-4} - \cdots +$

$(-1)^{n+1}\frac{1}{2}(3^n - 1)z^{(-n-1)}$

$c) -3 < z < 3$ எனில் விடை $-\frac{1}{8}\left(1 + \frac{z+1}{4} + \frac{(z+1)^2}{16} + \cdots\right)$

$+\frac{1}{4}\left(1 + \frac{z+1}{2} + \frac{(z+1)^2}{4} + \cdots\right)$

$d) |z| < 1$ எனில் விடை $\frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2}(1 -$

$3^{n-1})z^n + \cdots$

4. $|z| < 2$ எனில் $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ என்ற சார்பை லாரண்ட் விரிவாக்க செய்க.

விடை $-\frac{1}{6} + \frac{5}{36}z + \frac{17}{216}z^2 - \frac{115}{1296}z^3 + \cdots$

5. $2 < |z| < 3$ எனில் $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ என்ற சார்பை லாரண்ட் விரிவாக்கம் செய்க.

விடை $-\frac{5}{3} + \frac{3}{z} - \frac{6}{z^2} + \frac{12}{z^3} - \frac{24}{z^4} + \cdots + \frac{8z}{9} - \frac{8z^2}{27} + \frac{8z^3}{81} + \cdots$

6. $0 < |z-1| < 1$ பகுதியில் பொருந்தக் கூடிய $f(z) = \frac{2z+1}{z^3+z^2-2z}$ என்ற சார்பின் முதல் நான்கு லாரண்ட் விரிவாக்க கோவைகளைக் காண்க.

விடை $-\frac{1}{2}[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots]$

$-\frac{1}{6}\left[1-\frac{z-1}{3}+\frac{(z-1)^2}{9}-\cdots\right]+\frac{1}{z-1}$

7. $\frac{z}{(z^2-1)(z^2+4)}$ ஐ $1 < |z| < 2$ல் லாரண்ட் விரிவாக்கம் செய்க.

விடை $\frac{1}{10}\left[\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{z^3}+\frac{2}{z^5}+\cdots\right)+\left(\frac{z}{2}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right)\right]$

8. $\frac{4z+3}{z(z-3)(z+2)}$ சார்பை லாரண்ட் விரிவாக்கம் செய்க.

$a)$ $|z| = 1$க்குள் விடை $-\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right]z^n$

$b)$ $|z| = 2$ மற்றும் $|z| = 3$க்கு இடைப்பட்ட பகுதியில்

விடை $-\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$

2.17 சிறப்புப்புள்ளி (singular point):

ஒரு சார்பு $f(z)$ ஆனது எந்தப்புள்ளியில் பகுமுறை (analytic) அற்றதாகிறதோ அப்புள்ளி சிறப்புப்புள்ளி எனப்படும்.

உதாரணமாக $\frac{1}{z-2}$ இன் சிறப்புப்புள்ளி $z-2=0$ அல்லது $z=2$ ஆகும்.

தனிமைப்படுத்தப்பட்ட சிறப்புப்புள்ளி (isolated singular point)

$f(z)$ என்ற சார்பு $z=a$ புள்ளியைச் சிறப்புப்புள்ளியாகக் கொண்டு, aஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு சிறிய வட்டத்திற்குள் வேறு ஒரு சிறப்புப்புள்ளி அமையாவிடில் $z=a$ புள்ளி தனிமைப்படுத்தப்பட்ட

சிறப்புப்புள்ளி எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில் அது தனிமைப்படுத்தப்படாத சிறப்புப்புள்ளி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, சார்பு $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ ஆனது இரண்டு தனிமைப்படுத்தப்பட்ட சிறப்பப்புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளது. அவை $z=1$ மற்றும் $z=3$.

மாறாக சார்பு $\frac{1}{\sin \pi/z}$ ஆனது $\sin \pi/z = 0$ புள்ளிகளில் பகுமுறை அற்றதாகிறது. அதாவது $\frac{\pi}{z} = n\,\pi$ எனில் $z = \frac{1}{n}(n = 1,2,3, \ldots\ldots)$ எனவே $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots\ldots$ ஆகிய சிறப்புப்புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளது. அதாவது $z = 0$ என்பது தனிமைப் படுத்தப்படாத சிறப்புப்புள்ளியாகிறது.

2.18 m வரிசைமுனைவு (pole of order m):

$f(z)$ என்ற சார்புப் புள்ளி $z = a$இல் தனிமைப்படுத்தப்பட்ட சிறப்புப்புள்ளியைப் பெற்றிருப்பதாகக் கொள்வோம். சார்பு $f(z)$, லாரண்ட் விரிவாக்கம் பெறுமானால் $f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$

$$+\frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-a)^m}$$

$$+\frac{b_{m+1}}{(z-a)^{m+1}} + \frac{b_{m+2}}{(z-a)^{m+2}} + \cdots \qquad \rightarrow (1)$$

சில சார்புகளில், குணகங்கள் $b_{m+1} = b_{m+2} = b_{m+3} = 0$ எனில் சமன்பாடு (1) ஆனது

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-a)^m}$$

ஆகும். இப்போது $z = a$ என்பது சார்பு $f(z)$ இன் mஆம் வரிசை முனைவு என்றழைக்கப்படும். $m = 1$ எனில், முனைவு எளிய முனைவு (simple pole) எனப்படும்.

2.19 எச்சம் (residue):

$f(z)$இன் லாரன்ட் விரிவாக்கம், சமன்பாடு (1) ல் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதில் தனிமைப்படுத்தப்பட்ட சிறப்புப்புள்ளி $z = a$இல் $f(z)$இன் எச்சம் $\frac{1}{z-a}$இன் குணகமாகிய b_1 ஆகும்.

எச்சங்களைக்காணும் முறைகள்:

a) எளிய முனைவில் (simple pole) எச்சம் காணல்:

$z = a$ புள்ளியில் சார்பு $f(z)$ ஒரு எளிய எச்சத்தைப் பெற்றுள்ளது என்போம்.

எச்சம் $f(a) = \underset{z \to a}{\text{எல்லை}} (z-a)f(z)$

நிருபணம்:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{b_1}{(z-a)}$$

அல்லது $(z-a)f(z) = a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + a_2(z-a)^3 + \cdots + b_1$

$$b_1 = (z-a)f(z) - [a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + \cdots]$$

$z \to a$ எனில் , $b_1 = \underset{z \to a}{\text{எல்லை}} (z-a)f(z)$

$z = a$இல் எச்சம் = $\underset{z \to a}{\text{எல்லை}} (z-a)f(z)$

(ii) சார்பு $f(z)$ ஆனது $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ என்ற வடிவிலும் $\psi(a) = 0$ மற்றும் $\varphi(a) \neq 0$ எனில்

$z = a$இல் எச்சம் = $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

நிருபணம்:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

$z = a$இல் எச்சம் = $\underset{z \to a}{\text{எல்லை}} (z-a)f(z) = \underset{z \to a}{\text{எல்லை}} (z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

$$= \lim_{z \to a} (z-a) \frac{[\varphi(a)+(z-a)\varphi'(a)+\cdots]}{\Psi(a)+(z-a)\Psi'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}\Psi''(a)+\cdots}$$

(எல்லை $z \to a$)

(டெய்லர் தேற்றப்படி)

$$= \text{எல்லை}_{z \to a} (z-a) \frac{[\varphi(a)+(z-a)\varphi'(a)+\cdots]}{(z-a)\Psi'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}\Psi''(a)+\cdots} \quad (\because \Psi(a)=0)$$

$$= \text{எல்லை}_{z \to a} \frac{\varphi(a)+(z-a)\varphi'(a)}{\Psi'(a)+\frac{z-a}{2!}\Psi''(a)+\cdots}$$

$z = a$ இல் எச்சம் $= \frac{\varphi(a)}{\Psi'(a)}$

(b) nவரிசை முனைவில் எச்சம்:

சார்பு $f(z)$ஆனது $z = a$இல் nவரிசை முனைவைப் பெற்றிருக்குமானால்

$z = a$இல் எச்சம் $= \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\right\}_{z=a}$

நிருபணம் :

சார்பு $f(z)$இன் nவரிசை முனைவுப் புள்ளி $z = a$ இல் உள்ளது எனில்,

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

$(z-a)^n$ ஆல் பெருக்க

$$(z-a)^n f(z) = a_0(z-a)^n + a_1(z-a)^{n+1} + a_2(z-a)^{n+2} + \cdots + b_1(z-a)^{n-1} + b_2(z-a)^{n-2} + \cdots + b_n$$

இருபுறமும் $(n-1)$ தடவை zஐப் பொருத்து வகைப்படுத்தி $z = a$ எனப்பிரதியிட

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)] = (n-1)!\, b_1$$

அல்லது $b_1 = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\right\}_{z=a}$

அல்லது எச்சம் $f(a) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\right\}_{z=a}$

(c) எளிய அல்லது mவரிசை முனைவுக்கு $z = a$ புள்ளியில் எச்சம்

எச்சம் $= \frac{1}{t}$ இன் குணகம்.

நிருபணம்:

m வரிசை முனைவு கொண்ட $f(z)$ என்ற சார்பைக் கருதுவோம். லாரன்ட் தேற்றப்படி

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots \frac{b_m}{(z-a)^m}$$

$z - a = t$ எனில் $z = a + t$

எனவே $f(a+t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \cdots + \frac{b_m}{t^m}$

எச்சம் $f(a) = \frac{1}{t}$ இன் குணகம் b_1 ஆகும்.

மாதிரி 27:

சார்பு $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+2)}$ இன் முனைவுகள் மற்றும் ஒவ்வொரு முனைவிலும் எச்சத்தைத் தீர்மானிக்கவும்.

தீர்வு :

சார்பின் பகுதியைச் சுழியுடன் ஒப்பிட்டு முனைவுகளைக் காண்போம்.

$(z-1)^2(z+2) = 0$. எனவே முனைவுகள் $z = +1, +1, -2$

சார்பானது $z = -2$ இல் ஒரு முனைவையும், $z = +1$இல் இரண்டாம் வரிசை (second order)முனைவையும் கொண்டுள்ளது.

$z = -2$இல் $f(z)$ன் எச்சம் $= \lim_{z \to -2} (z+2) f(z)$ (எல்லை $z \to -2$)

$= \lim_{z \to -2} (z+2) \frac{z^2}{(z-1)^2(z+2)}$ (எல்லை $z \to -2$)

$= \lim_{z \to -2} \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{(-2)^2}{(-2-1)^2} = \frac{4}{9}$ (எல்லை $z \to -2$)

இதே போல், $z = +1$ல் $f(z)$ இன் எச்சம்

$$= \frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2 \frac{z^2}{(z+2)(z-1)^2}\right\}_{z=1}$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+2)}\right)_{z=1}$$

$$= \frac{(z+2)2z - z^2 \cdot 1}{(z+2)^2} = \frac{2z^2 + 4z - z^2}{(z+2))^2}$$

$$= \frac{1+4}{(1+2)^2}$$

$$= \frac{5}{9}$$ விடை

மாதிரி 28:

$f(z) = \cot z$ சார்பின் முனைவுகளையும், அம்முனைவுகளில் எச்சங்களையும் காண்க.

தீர்வு :

$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$f(z)$இன் முனைவுகளைக் கண்டறிய $\sin z = 0$ என்போம்.

$sinz = 0\ , z = n\pi$, இதில் $n = 0, \pm1,\ \pm2,\ \pm3, \ldots..$

$z = n\pi$இல் எச்சம்$= \frac{\cos z}{\frac{d}{dz}(\sin z)} = \frac{\cos z}{\cos z} = 1$ விடை

மாதிரி 29

$z = 1$இல் சார்பு $\frac{z^3}{(z-1)^4(z-2)(z-3)}$ இன் எச்சத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$z = 1$இல் முனைவின் வரிசை 4

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^4(z-2)(z-3)}$$

$z - 1 = t$ அல்லது $z = 1 + t$ என்க.

எனவே $f(1+t) = \frac{(1+t)^3}{t^4(t-1)(t-2)}$

$$= \frac{1}{t^4}(t^3+3t^2+3t+1)(1-t)^{-1}\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}+\frac{3}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right)(1+t+t^2+\cdots)(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{8}+\cdots)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}+\frac{3}{t^4}+\frac{1}{t^4}\right)\left(1+\frac{3}{2}t+\frac{7}{4}t^2+\frac{15}{8}t^3+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{9}{2t}+\frac{21}{4}.\frac{1}{t}+\frac{15}{8}.\frac{1}{t}\right)+\cdots$$

இதில் $\frac{1}{t}$ இன் குணகம் $= \frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{2}+\frac{21}{4}+\frac{15}{8}\right) = \frac{101}{16}$

எச்சம் $= \frac{101}{16}$ விடை

மாதிரி 30

$f(z) = \frac{ze^z}{(z-a)^3}$ **இன் எச்சத்தை அதன் முனைவில் காண்க**

தீர்வு :

$f(z)$ இன் முனைவைக்காண $(z-a)^3=0$ என்க

முனைவு $z = a$இல் 3ம் வரிசையாக அமைகிறது.

$$f(z) = \frac{ze^z}{(z-a)^3}$$

$z - a = t$ என்க $z = a + t,\ t$ சிறிய மதிப்பாகும்.

$$f(z) = \frac{(a+t)e^{a+t}}{t^3} = \left(\frac{a}{t^3}+\frac{1}{t^2}\right)e^{a+t} = e^a\left(\frac{a}{t^3}+\frac{1}{t^2}\right)e^t$$

$$= e^a\left(\frac{a}{t^3}+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots\right)$$

$$= e^a\left(\frac{a}{t^3}+\frac{a}{t^2}+\frac{a}{2t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\cdots\right)$$

இதில் $\frac{1}{t}$இன் குணகம் $= e^a\left(\frac{a}{2}+1\right)$

எனவே $z = a$ இல் எச்சம் $= e^a(\frac{a}{2}+1)$ விடை.

பயிற்சி 2.6

கீழ்க்காணும் சார்புகளின் முனைவுகளைக் கண்டறிக. ஒவ்வொரு முனைவின் வரிசையையும் காண்க.

1. $\frac{z^2}{(z-a)(z-b)(z-c)}$

விடை எளிய முனைவுகள் $z = a, z = b,$ மற்றும் $z = c$ல்

2. $\frac{z-3}{(z-2)^2(z-1)}$

விடை 2ஆம் வரிசை முனைவு $z = 2$இல்

முதல் வரிசை முனைவு $z = -1$இல்

3. $\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}$

விடை முதல் வரிசை முனைவுகள் $z = \pm ia$ இல்

<u>எச்சத்தைக் காண்க</u>

4. $\frac{z^3}{(z-2)(z-3)}$ இன் முனைவுகளில் விடை 19

5. $\frac{z^2}{z^2+a^2)}$ இன் முனைவு $z = ia$இல் விடை $\frac{1}{2} i\, a$

6. $\frac{1}{(z^2+a^2)}$ இன் முன்னைவு $z = ia$இல் விடை $\frac{-i}{4a^3}$

7. $\tan z$, இதன் முனைவில் விடை $f\left(n + \frac{\pi}{2}\right) = -1$இதன் முனைவில்

8. $\frac{ze^z}{(z-a)^3}$ இதன் முனைவில் விடை $\frac{1}{2}(a+2)\, e^a$

9. $z^2 e^{1/z}$ இன் எச்சம் $z = o$ல் விடை $\frac{1}{6}$

10. $z = 0$ இல் . $\frac{1+e^z}{\sin z + z \cos z}$ விடை 1

2.20 எச்சத்தேற்றம் (Residue theorem)

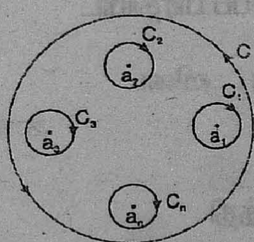
c என்ற ஒரு மூடிய வளைகோட்டிற்குள், ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான முனைவு (poles)களைத் தவிர மற்ற புள்ளிகளில் $f(z)$என்ற சார்பானது, பகுமுறைச்(analytic) சார்பு எனில்,

$\int_c f(z)dz = 2\pi i$ x (c யினுள் முனைவுகளில் அமையும் எச்சங்களின் கூட்டுத்தொகை)

நிருபணம்

$a_1, a_2, a_3, \dots \dots a_n$ ஆகியவற்றை மையமாகக் கொண்ட, ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிக்கொள்ளாத வட்டங்கள் $c_1, c_2, c_3, \dots \dots c_n$ என்பன. அவை மிகச்சிறியவையாக முழுமையாக Cயின் உட்புறம் அமைகின்றன.

C இக்கும் மற்ற வட்டங்கள் $C_1, C_2 \dots . C_n$ ஆகியவற்றிற்கும் இடையே அமையும் பல்இணைப்புப்பகுதி (Multiple connected region)யில் $f(z)$ ஆனது பகுமுறைச்சார்பாகிறது.



காஷியின் தேற்றப்படி,

$$\int_c f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz + \int_{c_3} f(z)dz + \cdots \int_{c_n} f(z)dz$$

$= 2\pi i$[எச்சம் $f(a_1)$ + எச்சம் $f(a_2)$ +.........+ எச்சம் $f(a_n)$]

மாதிரி 31

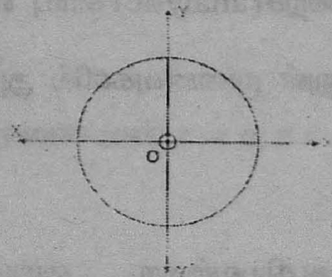
எச்சத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி , $\int_c \frac{1+z}{z(2-z)} dz$இன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக

இதில் c ஆனது $|z| = 1$ என்ற வட்டம்.

தீர்வு :

சார்பின் பகுதியை சுழியுடன் ஒப்பிட்டு முனைவுகள் காண்போம்.

$z(2-z)=0, \qquad z=0,2$



வட்டத்திலும் அதன் உட்பகுதியிலுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளிலும், $z \doteq 0$ ஐத் தவிர தொகைச்சார்பானது(integrand) பகுமுறைச்சார்பாகும்.

எனவே எச்சத்தேற்றத்தின்படி

$$\int_c \frac{1+z}{z(2-z)}dz = 2\pi i\ [\text{எச்சம் } f(0)] \qquad \rightarrow (1)$$

$$\text{எச்சம் } f(0) = \lim_{z\to 0} z\frac{1+z}{z(2-z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1+z}{2-z} = \frac{1}{2}$$

சமன்பாடு (1) இல் இம்மதிப்பைப் பிரதியிட

$$\int_c \frac{1+z}{z(2-z)}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}\right) = \pi i \quad \text{விடை}$$

மாதிரி 32.

எச்சத்தேற்றத்தைப்பயன்படுத்தி

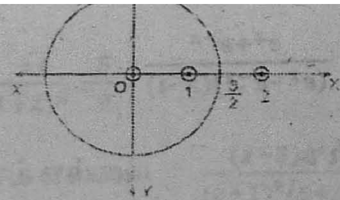
$\int_c \frac{4-3z}{z(z-1)(z-2)}dz$ இன் மதிப்பைக்காண்க இதில் c ஆனது $|z| = 3/2$ என்ற வட்டம் .

தீர்வு :

முனைவுகளைக் காண $z(z-1)(z-2)=0$ என்போம்

$z = 0, 1, 2$

$z=0, z=1, z=2$இல் அமையும் முனைவுகளில் $z=0$ மற்றும் $z=1$ மட்டுமே வட்டத்தின் உட்புறம் அமைகின்றன.



எளிய முனைவு $z = 0$வில் $f(z)$ இன் எச்சம்

$$= \lim_{z \to 0} z \frac{(4-3z)}{z(z-1)(z-2)}$$

$$= \lim_{z \to 0} z \frac{(4-3z)}{(z-1)(z-2)} = \frac{4-0}{(0-1)(0-2)} = 2$$

$z = 1$இல் அமையும் எளிய முனைவின் எச்சம்,

$$= \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{(4-3z)}{z(z-1)(z-2)} = \lim_{z \to 1} \frac{4-3z}{z(z-2)}$$

$$= \frac{4-3}{1(1-2)} = -1$$

காஷியின் தொகை வாய்பாட்டின் படி

$\int f(z)dz = 2\pi i$ x (cக்குள் அமையும் எச்சங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$= 2\pi i(2-1) = 2\pi i$ விடை

மாதிரி 33

கலப்பினத் தொகையைக்காண்க

$\int_c \frac{\cot h\, z}{(z-i)} dz \quad , \quad c: |z| = 2$

தீர்வு :

$$\int \frac{\cot h\, z}{(z-i)} dz = \int_c \frac{e^z + e^{-z}}{(e^z - e^{-z})(z-i)} dz$$

தொகை சார்பின் முனைவுகளைக்காண

$(e^z - e^{-z})(z-i) = 0$ என்போம்

$e^z = e^{-z}$ அல்லது $e^z = \frac{1}{e^z}$ அதாவது $e^{2z} = 1$

மற்றும் $z = i$. எனவே முனைவுகள் $z = 0$ மற்றும் $z = i$ இரண்டுமே வட்டம் $c: |z| = 2$இன் உள்ளே அமைகின்றன. எனவே $z = i$இல்

எச்சம் = எல்லை $(z-i)\ \frac{e^z+e^{-z}}{(e^z-e^{-z})(z-i)}$
$z \to i$

$$= \frac{e^i+e^{-i}}{(e^i-e^{-i})} = \coth h\, i$$

$z = 0$ வில் எச்சத்தைக் காண, $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ முறையைப்பயன்படுத்துவோம்.

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\frac{e^z+e^{-z}}{z-i}}{e^z-e^{-z}} \quad ; \quad \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} = \frac{\frac{e^z+e^{-z}}{z-i}}{e^z+e^{-z}}$$

$z = 0$ வில் எச்சம் $= \left[\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}\right] = \frac{\frac{1+1}{0-i}}{1+1} = \frac{-1}{i} = i$

எச்சங்களின் கூட்டுத்தொகை $\coth h\ i + i$

காஷியின் எச்சத்தேற்றத்தின் படி

$\int_e f(z)dz = 2\pi i$ x (எச்சங்களின் கூடுதல்)

எனவே $\int_c \frac{\coth h\, i}{z-i} dz = 2\pi i(\coth h\, i + i)$

மாதிரி 34

கீழ்க்கண்ட சார்பின் முனைவுகளையும், அம்முனைவுகளில் எச்சங்களையும் காண்க,

$f(z) = \frac{z^z}{(z-1^2)(z+2)}$ அதிலிருந்து

$\int_c \frac{z^2 dz}{(z-1)^2(z+2)}$ இன் மதிப்பைக் காண்க. இதில் $c: |z| = 3$

தீர்வு :

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+2)}$$

முனைவுகளைக்காண, $(z-1)^2(z+2) = 0$என்க $z = 1, 1, -2$

$z = 1$ இல் இரண்டாம் வரிசை முனைவும்

$z = -2$ இல் எளிய முனைவும் அமைகின்றன.

z = 1 இல் , $f(z)$ இன் எச்சம் = எல்லை $\frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \frac{(z-1)^2 z^2}{(z-1)^2(z+2)}$
$z \to 1$

= எல்லை $\frac{d}{d2} \frac{z^2}{(z+2)}$ = எல்லை $\frac{(z+2)2z-z^2}{(z+2)^2}$
$z \to 1$ $\quad z \to 1$

$$= \text{எல்லை}_{z \to 1} \frac{z^2+4z}{(z+2)^2} = \frac{1 \quad +4}{(1+2)^2} = \frac{5}{9}$$

$z = -2$ இல் $f(z)$ன் எச்சம் எல்லை $\lim_{z \to -2} \frac{(z+2)z^2}{(z-1)^2(z+2)}$

$$= \text{எல்லை}_{z \to -2} \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{(-2)^2}{(-2-1)^2} = \frac{4}{9}$$

எனவே $\int_C \frac{z^2 d^z}{(z-1)^2(z+2)} = 2\pi i \left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9}\right) = 2\pi i$

மாதிரி 35

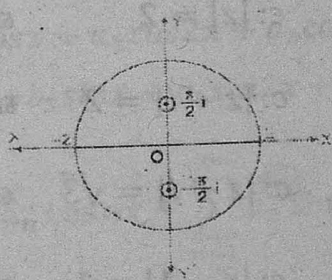
$$\int_C \frac{dz}{\cos h\,(z)}, \quad c: |z| = 2$$

என்ற கலப்பினத் தொகையைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(z) = \frac{1}{\cos h\, z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} = \frac{2e^z}{e^{2z}+1}$$

இதன் முனைவைக் காண



$e^{2z} + 1 = 0$ அல்லது $(e^z + i)(e^z - i) = 0$

$e^z = i, \quad -i$

அல்லது $e^z = e^{\frac{-\pi}{2}i}$, $e^z = e^{-\frac{\pi}{2}i}$

எனவே முனைவுப் புள்ளிகள், $z = \frac{\pi}{2} i, \quad \frac{-\pi}{2} i$

உருவரை (Contour) $|z| = 2$க்குள் முனைவுகள், $z = \frac{\pi}{2} i$ மற்றும் $\frac{-\pi}{2} i$

இல் அமையும்.

$z = \frac{\pi}{2}i$ இல் $f(z)$இன் எச்சம் $= \left\{\frac{2e^z}{\frac{d}{dz}(e^{2z}+1)}\right\}_{z=\frac{\pi}{2}i}$ $\left[\text{எச்சம்} = \left[\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\right]\right]$

$$= \left\{\frac{2e^z}{2e^{2z}}\right\}_{z=\frac{\pi}{2}i} = \{e^{-z}\}_{z=\frac{\pi i}{2}} = e^{\frac{-\pi i}{2}} = -i$$

$z = \frac{-\pi i}{2}$ இல் $f(z)$இன் எச்சம் $= \left\{\frac{2e^z}{\frac{d}{dz}(e^{2z}+1)}\right\}_{z=-\frac{\pi}{2}i}$

$$= \{e^{-z}\}_{z=-\frac{\pi i}{2}}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{2}} = i$$

எனவே $\int_c f(z) = \int_c \frac{dz}{\cos h\, z} = 2\pi i(i-i) = 0$ விடை.

பயிற்சி 2.6

மதிப்பைக் காண்க.

1. $\int_c \frac{1-2z}{z(z-1)(z-2)}dz,\quad c: |z| = 1.5$ விடை $3\pi i$
2. $\int_c \frac{z^2e^{zt}}{z^2+1}dz,\quad c: |z| = 2$ விடை $-2\pi i \sin t$
3. $\int_c \frac{z-1}{(z+1)^2(z-2)}dz,\quad c: |z-i| = 2$ விடை $\frac{-2\pi i}{9}$
4. $\int_c \frac{12z-7}{(z-1)^2(2z+3)}dz,\quad c: |z+i| = \sqrt{3}$ விடை $4\pi i$
5. $\oint_c \frac{2z^2+z}{z^2-1}dz,\quad c: |z-1| = 1$ விடை $3\pi i$
6. $\int_c \frac{e^{2z}+z^2}{(z-1)^5}dz,\quad c: |z| = 2$ விடை $\frac{4\pi e^2 i}{3}$
7. $\int_c \frac{dz}{(z^2+1)(z^2-4)},\quad c: |z| = 1.5$ விடை 0
8. $\int_c \frac{4z^2-4z+1}{(z-2)(z^2+4)}dz,\quad c: |z| = 1$ விடை 0

3. தொகை நிலைமாற்றங்கள்

(Integral Transforms)

ஃபூரியர் பகுப்பாய்வு (Fourier Analysis)

3.1 ஃபூரியர் தொடர் (Fourier series)

காலவட்ட ஒழுங்குடைய (Periodic) இயக்கம் கொண்ட அலைகள், மோட்டார்கள், சுழலும் எந்திரங்கள் போன்றவற்றின் இயக்கத்தை விவரிக்க திரும்புச் சார்பு (Periodic function) களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

ஒரே அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட சைன் மற்றும் கொசைன் சார்புகளின் நேர்கோட்டுத் தொடர்பைக் கொண்டு $(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில், ஒரு திரும்புச்சார்பினைக் காட்டுவதே ஃபூரியர் தொடராகும்.

$f(x)$என்ற சார்பின் ஃபூரியர் தொடரானது,

$$f(x) = a_0 + a_1 cos x + a_2 cos 2x + a_3 cos 3x + \cdots a_n cos nx$$
$$+ \cdots + b_1 sin x + b_2 sin 2x + \cdots + b_n sin nx + \cdots$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad \rightarrow (1)$$

a_0, a_n, b_n ஆகிய மதிப்புகளைக் கண்டறியச் சமன்பாடு (1) இன் இருபுறமும், $-\pi$ முதல் π வரையிலான எல்லைக்குள் தொகை காண,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

(1) இல் மற்ற தொகைகள் சுழியாகும்.

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a_0$ அல்லது

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)d\gamma$$

$f(x)$ஐப் பிரித்துக் காட்டுவதற்காக xக்குப் பதிலாக γ பயன்படுத்தப்படுகிறது. மீண்டும் சமன்பாடு (1) இன் இருபுறமும் $\cos nx$ஆல் பெருக்கி $(-\pi,\pi)$ எல்லைக்குள் தொகை காண,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\,x\,dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n\,x\,dx$$

மற்ற தொகைகள் சுழியாகும்.

$$= \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx$$

$$= \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx + \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2n\,x\,dx$$

$$= \frac{a_n}{2}.2\pi + 0$$

$$= \pi a_n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\,x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)\cos n\gamma\,d\gamma\ , \quad n = 1,2,3$$

எனக் கொண்டு a_1, a_2, a_3 .... ஆகியவற்றைக் கண்டறியலாம். இதேபோல் b_nஐக் கண்டறிய (1) இன் இருபுறமும் $\sin n\,x$ஆல் பெருக்கி $(-\pi,\pi)$ எல்லைக்குள் தொகை காண வேண்டும்.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\ x\,dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} sin^2 n\,x\,dx$$

மற்ற தொகைகள் சுழியாகும்.

$$= \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1 - cos2nx)dx$$

$$= \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos2n\,x\,dx$$

$$= \frac{b_n}{2}\ .\ 2\pi - 0$$

எனவே

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(x)\sin n\ x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)\sin n\ \gamma\,d\gamma$$

$n = 1,2,3, \ldots$ மதிப்புகளைக் கொண்டு b_1, b_2, b_3 ....ஆகியவற்றைக் கண்டறியலாம். எனவே,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)d\gamma + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\,x\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)\cos n\,\gamma\,d\gamma$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\,x\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)\sin n\,\gamma\,d\gamma \quad \rightarrow (2)$$

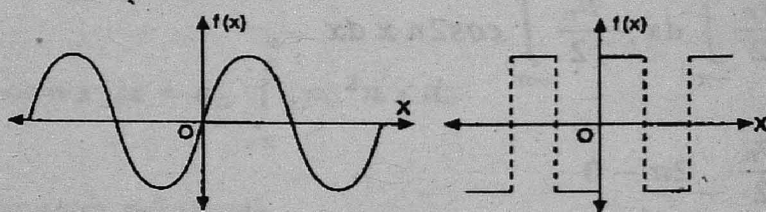
இதுவே சார்பு $f(x)$இன் ஃபூரியர் தொடராகும். a_0, a_n, b_n என்பன $f(x)$ இன் ஃபூரியர் மாறிலிகள் என்போம். $cosA\ cosB + sinA\ sinB = \cos(A - B)$ ஐப் பயன்படுத்த, (2) ஐ

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)d\gamma + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)\cos n\,(x-\gamma)\,d\gamma$$

எனலாம்.

<u>**நிறுவல் (deduction) I**</u>

$f(x)$ ஒற்றைச் சார்பு (odd function) எனில் $f(-x) = -f(x)$ ஆகும். ஒற்றைச் சார்புகளுக்கு



படம் 3.1

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)d\gamma = 0$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\gamma\, f(\gamma)\, d\gamma = 0$ ∵ (இது ஒற்றைச் சார்பு)

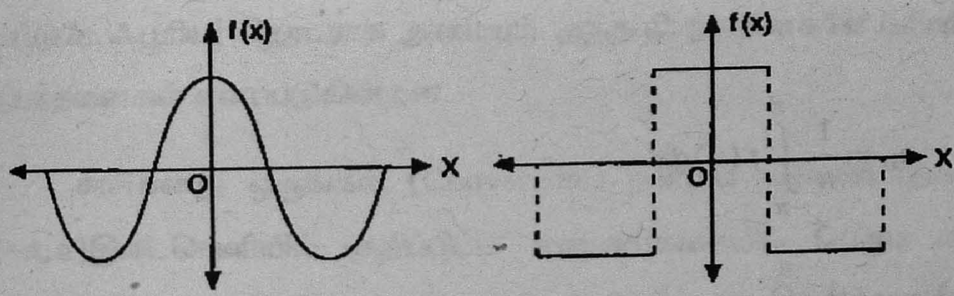
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin n\gamma\, f(\gamma)\, d\gamma = 2\int_{0}^{\pi} \sin n\,\gamma\, f(\gamma)d\gamma$$

எனவே (2) இல் இருந்து

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\,x \int_{0}^{\pi} \sin n\,\gamma\, f(\gamma)d\gamma \qquad \rightarrow (3)$$

<u>**நிறுவல் (deduction) II**</u>

$f(x)$ இரட்டைச் சார்பானால் $f(-x) = f(x)$ ஆகும்.



படம் 3.2

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma)d\gamma = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\gamma)d\gamma$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin n\,\gamma\, f(\gamma)d\gamma = 0$ ($\because$ இது ஒற்றைச் சார்பு)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\,\gamma\, f(\gamma)d\gamma = 2\int_{0}^{\pi} \cos n\,\gamma\, f(\gamma)d\gamma$$

எனவே (2) இல் இருந்து

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\gamma)d\gamma + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\,x \int_{0}^{\pi} \cos n\,\gamma\, f(\gamma)d\gamma \quad \rightarrow (4)$$

குறிப்பு– ஃபூரியர் தொடர், $(-\pi, \pi)$எல்லைக்குள் அலைவு நேரம் $2\,\pi$ கொண்டது எனில்

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

இதில்

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

இத்தொடர் $(-l, l)$ இடைவெளியில் $2l$ அலைவு நேரம் கொண்டதானால் கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

இதில்

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

3.2 டிரிஷ்லெட் நிபந்தனைகள் (Dirichlet's conditions)

எந்த ஒரு திரும்பு (Periodic) சார்பு $f(x)$ம் ஃபூரியர் தொடராக அமையாது. அச்சார்பு ஒரு சில நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட்டால்

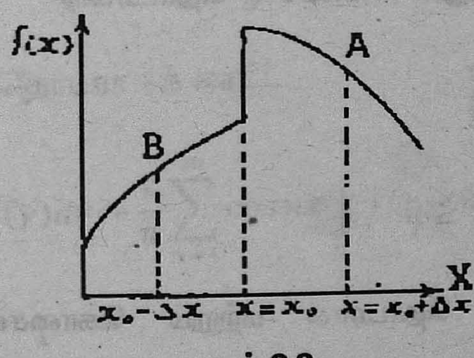
மட்டுமே ஃபூரியர் தொடராக அமையும். அந்த நிபந்தனைகளே டிரிஷ்லெட் நிபந்தனைகள் எனப்படுகின்றன.

சார்பானது ஒருங்கல் (Convergent) தன்மை கொண்டாதாகவும், $(-\pi, \pi)$இடைவெளியில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையில் பெருமு மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் கொண்டதாகவும், குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான தொடர்ச்சியற்ற நிலைகளைக் கொண்டதாகவும், ஒற்றை மதிப்புடையதாகவும் (single valued) மற்றும் வரம்பிற்குட்பட்டதாக (Bounded) வும் இருக்க வேண்டும்.

விளக்கம்–

தொடர்ச்சியற்ற நிலை (Discontinuity)

மாறி xஇன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு, சார்பு $f(x)$ இன் மதிப்புக் குறிப்பிட்ட மதிப்பில் திடீர் மாற்றத்தைப் பெறுமானால் அது சார்பின் தொடர்ச்சியற்ற நிலை எனப்படும்.



படம் 3.3

படத்தில் புள்ளி Aஇல் சார்பு $f(x_0 + \Delta x)$ஆகும். எனவே

$$f(x_0) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \; f(x_0 + \Delta x) = f(x_0^+) \quad \to (1)$$

இது சார்பானது x_0ஐ வலப்புறமிருந்து நெருங்குவதைக் குறிக்கிறது. இதேபோல் Bஇல் சார்பு $f(x_0 - \Delta x)$ ஆகும்.

$$f(x_0) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} f(x_0 - \Delta x)$$

$$= f(x_0^-) \qquad \rightarrow (2)$$

சார்பு x_0ஐ இடமிருந்து நெருங்குகிறது. ஆனால் $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$

அதாவது x_0 புள்ளியில் சார்பு, தொடர்ச்சியற்ற நிலையில் உள்ளது எனலாம்.

வரம்பிற்குட்பட்டது (bounded)

$(-\pi, \pi)$இடைவெளியில் வெவ்வேறு xஇன் மதிப்புகளுக்குச் சார் பு $f(x)$ ஆனது M என்ற ஒரு மேல் எல்லைக்கு உட்பட்டதாக இருக்க வேண்டும். இதனை $|f(x)| \leq M$ எனலாம்.

3.3 ஃபூரியர் சைன் மற்றும் கொசைன் தொடர்கள்

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \pi - x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

இச்சார்பினை சைன் தொடராக மற்றும் கொசைன் தொடராகக் காட்டலாம்.

i)சைன் தொடராகக் காட்ட

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \int_0^{\pi} f(\gamma) \sin n\gamma \, d\gamma$$

இதில்

$$\int_0^{\pi} f(\gamma)\sin n\gamma\, d\gamma = \int_0^{\pi/2} \gamma \sin n\gamma\, d\gamma + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-\gamma)\sin n\gamma\, d\gamma$$

$$= \left[-\gamma\frac{\cos n\gamma}{n} + \frac{\sin n\gamma}{n^2}\right]_0^{\pi/2} + \left[-(\pi-\gamma)\frac{\cos n\gamma}{n} - \frac{\sin n\gamma}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{-\pi}{2n}cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \frac{2}{n^2}sin\frac{n\pi}{2}$$

எனவே

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\, sinn\, x$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \cdots\right]$$

***i*)கொசைன் தொடராகக் காட்ட**

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\gamma)d\gamma + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\int_0^{\pi} f(\gamma)\cos n\gamma\, d\gamma$$

இதில்

$$\int_0^{\pi} f(\gamma)d\gamma = \int_0^{\pi/2} \gamma d\gamma + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-\gamma)d\gamma$$

$$= \left[\frac{\gamma^2}{2}\right]_0^{\pi/2} + \left[\pi\gamma - \frac{\gamma^2}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

மேலும்

$$\int_0^{\pi} \cos nr\, f(\gamma) d\gamma = \int_0^{\pi/2} \gamma \cos n\gamma\, d\gamma + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - \gamma) \cos n\gamma\, dr$$

$$= \left\{\frac{\gamma \sin n\gamma}{n}\right\}_0^{\pi/2} + \left\{\frac{\cos n\gamma}{n^2}\right\}_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{n}\{\sin n\gamma\}_{\pi/2}^{\pi}$$

$$- \left[\frac{\gamma \sin n\gamma}{n} + \frac{\cos n\gamma}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2\pi} sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{n\pi}{2} - 1\right) - \frac{\pi}{n} sin \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} sin \frac{n\pi}{2} - \frac{\cos n\pi}{n^2}$$

$$+ \frac{1}{n^2} cos \frac{n\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{1 + \cos n\pi - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{-4}{n^2},$$

nஇன் வடிவம் $4m + 2$ எனில், மற்ற n மதிப்புகளுக்குச் சுழியாகும்.

எனவே nஇன் மதிப்பு $4m + 2$ எனில் கொசைன் தொடரானது

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi}\left\{\frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{6^2}\cos 6x + \cdots\right\},$$

$$n = 2,6,10 \ldots$$

கிளைத்தேற்றம் I (Corollary)

$0 \leq x \leq \pi$ இடைவெளியில் சார்பு $f(x)$இன் சைன் தொடரைக் கண்டறிய,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad \rightarrow (1)$$

எனக் கொள்க. இருபுறமும் $\sin nx$ ஆல் பெருக்கி 0 முதல் π வரை தொகை காண

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx \qquad \rightarrow (2)$$

ஆனால்,

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\, nx) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2}(\pi - 0) \rightarrow 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

(2) இல் பிரதியிட

$$\int_0^{\pi} \mathrm{f}(x) \sin \, nx \, dx = \frac{\pi}{2} b_n$$

அல்லது,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\gamma)\sin n\,\gamma\, d\gamma$$

இம்மதிப்பை (1) இல் பிரதியிட

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\,x \int_0^\pi f(\gamma)\sin n\,\gamma\, d\gamma \qquad \rightarrow (3)$$

கிளைத்தேற்றம் II

$0 \le x \le \pi$ இடைவெளியில் சார்பு $f(x)$இன் கொசைன் தொடரைக் கண்டறிய,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \rightarrow (1)$$

எனலாம். இருபுறமும் 0 முதல் π வரை தொகை காண

$$\int_0^\pi f(x)dx = a_0 \int_0^\pi dx$$

மற்ற தொகைகள் சுழியாகும்.

$$= a_0\pi$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx$$

மீண்டும் (1)ஐ $\cos n\,x$ ஆல் பெருக்கி த் தொகை காண

$$\int_0^\pi \cos nx\, f(x)dx = a_n \int_0^\pi \cos^2 nx\, dx$$

மற்ற தொகைகள் சுழியாகின்றன.

$$= \frac{a_n}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos 2nx)\, dx$$

$= \frac{a_n}{2}\pi$ மற்ற தொகையீடுகள் சுழியாகின்றன. எனவே,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos n\gamma\, f(\gamma) d\gamma$$

அல்லது

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\gamma) d\gamma + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \int_0^{\pi} f(\gamma)\cos n\gamma\, d\gamma \qquad \rightarrow (2)$$

மாதிரி–1

$-\pi < x < \pi$க்குள் $f(x) = x\sin x$ என்ற சார்பின் ஃபூரியர் தொடரைக் காண்க. அதிலிருந்து

$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \cdots$ எனக் காட்டுக.

$x\sin x$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு ($\because$ x ஒற்றைச் சார்பு மற்றும் $\sin x$ ஒற்றைச் சார்பு). எனவே இரட்டைச் சார்புக்கு

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\gamma) d\gamma + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \int_0^{\pi} f(\gamma)\cos n\gamma\, d\gamma$$

இதில் $f(x) = x\sin x$

$$f(\gamma) = \gamma\sin\gamma$$

எனவே

$$x \sin x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \gamma \sin \gamma \ d\gamma + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \int_0^{\pi} \gamma \sin \gamma \cos n\gamma \ d\gamma$$

இதில்

$$\int_0^{\pi} \gamma \sin\gamma \ d\gamma = -\gamma \cos \gamma \ |_0^{\pi} + \sin \gamma \ |_0^{\pi} = \pi$$

$(\because \int udv = uv - \int udv)$

$$\therefore \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \gamma \sin \gamma \ d\gamma = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$\int_0^{\pi} \gamma sin\gamma \cos n\gamma \ d\gamma = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \gamma\{\sin(n+1)\gamma \ . - \sin(n-1)\gamma\} \, d\gamma$$

$$\left(\because \sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2} . \, sin\frac{A-B}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \gamma \sin(n+1)\gamma \ d\gamma - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \gamma \sin(n-1)\gamma \ d\gamma$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\gamma\frac{\cos(n+1)\gamma}{(n+1)} + \frac{\sin(n+1)\gamma}{(n+1)}\right]_0^{\pi}$$

$$- \frac{1}{2}\left[-\gamma\frac{\cos(n-1)\gamma}{(n-1)} + \frac{\sin(n-1)\gamma}{(n-1)}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\pi\frac{\cos(n+1)\pi}{(n+1)} + \pi\frac{\cos(n-1)\pi}{(n-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pi\frac{\cos n\,\pi}{(n+1)} - \pi\frac{\cos n\,\pi}{(n-1)}\right] = \frac{\pi\cos n\,\pi}{2}\left(\frac{-2}{n^2-1}\right)$$

$$= \frac{-\pi \cos n\pi}{(n^2-1)}$$

$$\therefore x\sin x = 1 - \frac{2\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx \cos n\pi}{n^2-1}$$

$n = 1$ மதிப்பிற்கு இச்சமன்பாடு பொருந்தாது. எனவே $n = 1$க்கு

$$\int_0^{\pi} \gamma \sin\gamma \cos n\gamma \, d\gamma = \int_0^{\pi} \gamma \sin\gamma \cos\gamma \, d\gamma$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \gamma \sin 2\gamma \, d\gamma$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{-\gamma\frac{\cos 2\gamma}{2}\right\}_0^{\pi} + \left\{\frac{\sin 2\gamma}{4}\right\}_0^{\pi}\right]$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

$$x\,sin\,x = 1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{4}\cos x - \pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx \,.\cos n\pi}{(n-1)(n+1)}\right]$$

$$x\,sin\,x = 1 - 2\left[\frac{\cos x}{4} + \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 3x}{2.4} + \frac{\cos 4x}{3.5} - \cdots\right] \quad \rightarrow (1)$$

$x = \frac{\pi}{2}$ என்க. $x\,sin\,x = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

(1) இல் பிரதியிட

$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2\left[\left(\frac{0}{4}\right) + \left(\frac{-1}{1.3}\right) - (0) + \left(\frac{+1}{3.5}\right) - 0 + \left(\frac{-1}{5.7}\right) + \cdots\right]$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2\left(-\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} + \cdots\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \cdots$$

மாதிரி–2

$-\pi < x < \pi$ இடைவெளியில், $x + x^2$ சார்பை xஇன் மடங்குகளாகக் காட்டும் சைன் மற்றும் கொசைன் தொடர்களைக் காண்க. அதிலிருந்து

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$$x + x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\gamma + \gamma^2) d\gamma$$

$$+\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \int_{-\pi}^{\pi} (\gamma + \gamma^2) \cos n\gamma\, d\gamma + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \int_{-\pi}^{\pi} (\gamma + \gamma^2) \sin n\gamma\, d\gamma$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\gamma + \gamma^2) d\gamma = \left[\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\gamma + \gamma^2) \cos n\gamma\, d\gamma = \left\{\frac{\gamma \sin n\gamma}{n}\right\}_{-\pi}^{\pi} + \left\{\frac{\cos n\gamma}{n^2}\right\}_{-\pi}^{\pi} + \left\{\frac{\gamma^2 \sin ny}{n}\right\}_{-\pi}^{\pi} - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\gamma \sin n\gamma}{n} d\gamma,$$

எல்லை மதிப்புகளுக்கு

$$= 0 + 0 + 0 - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\gamma \sin n\gamma}{n} d\gamma$$

$$= -2\left[\left\{-\frac{\gamma \cos n\gamma}{n^2}\right\}_{-\pi}^{\pi} + \left\{\frac{\sin n\gamma}{n^3}\right\}_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{4\pi \cos n\pi}{n^2}$$

மற்றும்

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\gamma + \gamma^2) \sin n\gamma \, d\gamma$$

$$= \left\{-\frac{\gamma \cos n\gamma}{n}\right\}_{-\pi}^{\pi} + \left\{\frac{\sin n\gamma}{n^2}\right\}_{-\pi}^{\pi} - \left\{\frac{\gamma^2 \cos n\gamma}{n}\right\}_{-\pi}^{\pi}$$

$$+ \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma \cos n\gamma \, d\gamma$$

$$= -\frac{2\pi \cos n\pi}{n}$$

எனவே இத்தொடரானது

$$x + x^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cos n\pi}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos n\pi}{n}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots\right]$$

$$- 2\left[-\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \cdots\right]$$

$$+ 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots)$$

எல்லைகள் π மற்றும் $-\pi$க்கு இத்தொடரின் கூடுதல்

$$f(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(+\pi - 0)]$$

$$= \frac{1}{2}[-\pi + \pi^2 + \pi + \pi^2] = \pi^2$$

மேற்கண்ட தொடரில் $x = \pi$ என்க.

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos \pi - \frac{1}{2^2}\cos 2\pi + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi - \cdots\right]$$

$$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = -4\left[-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\cdots\right]$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

மாதிரி – 3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

என ஃபூரியர் தொடரைக் கொண்டு நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} - \cdots$$

$$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{3}{4} . \frac{\pi^2}{6}$$

(மாதிரி 2 இன் படி)

$$= \frac{\pi^2}{8}$$

மாதிரி–4

(–2,2) இடைவெளியில் $f(x)$ சார்பானது,

$f(x) = 0, \quad -2 < x < 0$

$f(x) = 1, \quad 0 < x < 2$ **எனில் $f(x)$ இன் ஃபூரியர் தொடரைக் கொணர்க.**

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} f(x) dx = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0} 0. dx + \int_{0}^{2} 1. dx\right] = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} f(x) \cos\frac{n\pi x}{2} dx + \int_{0}^{2} f(x) \cos\frac{n\pi x}{2} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0. \cos\frac{n\pi x}{2} dx + \int_{0}^{2} \cos\frac{n\pi x}{2} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \frac{2}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{2} f(x) \sin\frac{n\pi x}{2} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0. \sin\frac{n\pi x}{2} dx + \int_{0}^{2} 1. \sin\frac{n\pi x}{2} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - \frac{2}{n\pi} \cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[\cos n\pi - cos\, 0] = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

nஇன் ஒற்றை மதிப்புகளுக்கு $\cos n\pi = -1$

nஇன் இரட்டை மதிப்புகளுக்கு $\cos n\pi = 1$

எனவே $b_n = -\frac{1}{n\pi}(-1-1) = \frac{2}{n\pi}$ ஒற்றை nக்கு

$= -\frac{1}{n\pi}(1-1) = 0$ இரட்டை nக்கு

எனவே $f(x)$இன் ஃபூரியர் தொடர்,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right]$$

3.4 கலப்பின ஃபூரியர் தொடர் (complex Fourier Series)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \qquad \rightarrow (1)$$

இதில்

$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$

மற்றும்

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \qquad \rightarrow (2)$$

a_n மற்றும் a_{-n} என்பன இணையிய கற்பனைகள் (Conjugate imaginaries) எனப்படும்.

அலைவு நேரம் $T = \frac{2\pi}{\omega}$ கொண்ட ஒரு காலவட்டச் சார்பை

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{in\omega t} \qquad \rightarrow (3)$$

எனலாம்.

இதில் $f(t)$இன் எல்லை $(-\infty, \infty)$. மேலும் $f(t+T) = f(t)$ $\rightarrow (4)$

(3)இன் வலப்புறக் கோவை மெய் என்பதால் அதன் விரிவாக்கத்தில் கற்பனைக் குணகங்கள் இடம் பெறக்கூடாது. (3)ஐ 0முதல் Tவரைத் தொகையிட,

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(t)dt = \int_0^{2\pi/\omega} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}\right] dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cdot e^{in\omega t} dt \quad \rightarrow (5)$$

$n \neq 0$, எனில்

$$\int_0^{2\pi/\omega} e^{in\omega t} dt = \frac{1}{in\omega}\left[e^{in\omega t}\right]_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{1}{in\omega}\left(e^{2\pi in} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{in\omega}[\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n - 1]$$

$$= \frac{1}{in\omega}[1 + i\,.0 - 1]$$

$$= 0$$

$n = 0$ எனில்,

$$\int_0^{2\pi/\omega} e^{in\omega t} dt = \int_0^{2\pi/\omega} dt$$

$$= [t]_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= T$$

எனவே, (5) இல் இருந்து

$\int_0^T f(t)dt = a_0T$ அல்லது $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \overline{f(t)}$ என்க

$\rightarrow (6)$

$\overline{f(t)}$ என்பது $f(t)$ இன் சராசரி மதிப்பாகும். இப்போது (3)ஐ $e^{-in\omega t}$ ஆல் பெருக்கி, 0 முதல் T வரைத் தொகை காண,

$$\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt = a_nT$$

மற்ற கோவைகள் சுழியாகும். எனவே,

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \rightarrow (7)$$

(7) இல் nக்குப் பதிலாக $-n$ஐப் பயன்படுத்த

$$a_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{in\omega t}dt \rightarrow (8)$$

(7) மற்றும் 8) இல் இருந்து, $a_{-n} = \overline{a_n}$ $\rightarrow (9)$

ஃபூரியர் தொடரின் மெய் வடிவத்தைப் (real form) பெற (3) இல் இருந்து,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n\, e^{in\omega t} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\omega t}$$

எனலாம். முதலாவது கோவையில் nக்குப் பதிலாக $-n$ ஐப் பயன்படுத்த,

$$f(t) = \sum_{n=\infty}^{1} a_{-n}\, e^{-in\omega t} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\omega t}$$

அல்லது

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{in\omega t} + a_{-n} e^{-in\omega t}) dt \qquad \rightarrow (10)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{-n}) \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} i(a_n - a_{-n}) \sin \omega t$$

$\because e^{in\omega t} = \cos n\, \omega\, t + i \sin n\, \omega\, t$ மற்றும் $e^{-in\omega t} = \cos n\, \omega\, t - i \sin n\, \omega\, t$

$a_n + a_{-n} = \alpha_n$, $i(a_n - a_{-n}) = \beta_n$, $\alpha_0 = 2a_0$ எனில்

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\, \omega\, t$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\, \omega\, t \qquad \rightarrow (11)$$

இதில்

$\alpha_n = a_n + a_{-n}$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\{e^{-in\omega t} + e^{in\omega t}\} dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\, \omega\, t\, dt$$

மற்றும்

$$\beta_n = i(a_n - a_{-n}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) i \{e^{-in\omega t} - e^{in\omega t}\} dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\frac{1}{i}\{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}\}dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\,\omega\, t\; dt$$

3.5 ஃபூரியர் தொடரின் பார்சிவால் முற்றொருமை (Parseval's identity)

சார்பு $f(x)$இன் ஃபூரியர் தொடர் $(-l, l)$ எல்லைக்குள் ஒருங்கு (converge) மானால்,

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum(a_n^2 + b_n^2) \qquad \rightarrow (1)$$

a_0, a_n, b_n என்பன ஃபூரியர் மாறிலிகளாகும். சுமன்பாடு (1), பார்சிவால் முற்றொருமை எனப்படும்.

நிரூபணம்

$f(x)$ன் ஃபூரியர் தொடரை

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

எனலாம். இச்சமன்பாட்டை இருபுறமும் $f(x)$ ஆல் பெருக்கி $(-l, l)$ எல்லைக்குள் தொகையிட

$$\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right\} \rightarrow (2)$$

ஆனால் ஃபூரியர் குணகங்களாவன,

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

இம்மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (2) இல் பிரதியிட

$$\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2dx = \frac{a_0}{2}\,.\,a_0 l + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n(a_n l) + b_n(b_n l)\}$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

3.6 ஃபூரியர் தொடரின் இயற்பியல் பயன்பாடுகள்

(1) ஒரு தகட்டின் புள்ளிகளில் வெப்பநிலை

π அகலமும், முடிவிலி நீளமும் கொண்ட வெப்பம் ஊடுருவ முடியாத பக்கங்களைக் கொண்ட செவ்வக வடிவத் தகட்டைக் கருதுவோம். இதன் வெப்பநிலையை ஃபூரியர் தொடர் கொண்டு ஆராயலாம்.

இத்தகட்டின் நீளமான இரு ஓரங்களும் சுழி வெப்பநிலையில் உள்ளன. நீளம் குறைந்த ஒரு ஓரத்தில் 1°C இருக்குமானால், அத்தகட்டின் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெப்பநிலை குறைந்து கொண்டே செல்லும்.

ஒரு திடப்பொருளில் வெப்பம் பரவும் போது காலத்தைப் பொருத்த வெப்பநிலை மாற்றமானது

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \rightarrow (1)$$

t –காலம், a –ஒரு மாறிலி, (x, y, z) புள்ளியில் வெப்பநிலை u.

தகட்டின் வெப்பநிலை மாறாமலிருக்குமானால்

$$0 = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \rightarrow (2)$$

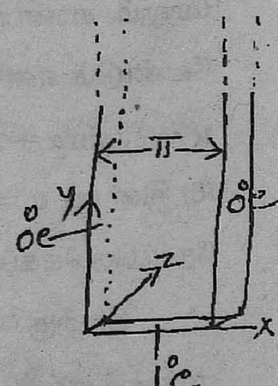
இதில் $u = 0, \quad x = 0$ எனில் $\rightarrow (3)$

$u = 0, \quad y = \infty \quad \rightarrow (4)$

$u = 0, \quad x = \pi \quad \rightarrow (5)$

$u = 1, \quad y = 0 \quad \rightarrow (6)$

(2)இன் தீர்வு $u = Ae^{\propto y + \beta x}$ என்போம். இருமுறை வகையிட



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A\beta^2 e^{\propto y + \beta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A \propto^2 e^{\propto y + \beta x}$$

இவற்றை (2) இல் பிரதியிட

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Ae^{\propto y + \beta x}(\propto^2 + \beta^2) = 0$$

இதிலிருந்து $\propto^2 + \beta^2 = 0$

அல்லது $\beta = \pm\ i \propto$

எனவே தீர்வு $u = Ae^{\propto y \pm i \propto x}$

A மற்றும் $\propto$ மாறிலிகள்

$u = Ae^{\propto y} e^{i\propto x}$ மற்றும் $u = Ae^{\propto y} e^{-i\propto x}$

கூட்ட, $2u = Ae^{\propto y}(e^{i\propto x} + e^{-i\propto x})$

$= Ae^{\propto y} 2\cos \propto x$

$u = Ae^{\propto y} \cos \propto x$ → (7)

தீர்வை

$u = Be^{\propto y} \sin \propto x$ எனவும் பெறலாம். → (8)

$\propto$ முழு எண் எனவே $x = 0$ எனில், $u = 0$

$x = \pi$ எனில், $u = 0$

$\propto$ ஓர் எதிர் எண் (negative) எனில்

$$u = \frac{B}{e^{\propto y}} \sin \propto x$$

$y = \infty$ எனில் $u = 0$

எனவே தீர்வை $u = c\ e^{-ny} \sin nx$ எனலாம். ஏனெனில் மேற்கண்ட விவாதத்திற்குச் சமன்பாடுகள் (3), (4), (5) இணங்குகின்றன. எனவே,

$u = c_1 e^{-y} \sin x + c_2 e^{-2y} \sin 2x + c_3 e^{-3y} \sin 3x + \ldots$ → (9)

மேலும் சமன்பாடு (6) இணங்க (9) இல் $y = 0$எனப் பிரதியீடு செய்ய வேண்டும். எனவே

$u = c_1 \sin x + c_2 \sin 2x + c_3 \sin 3x + \ldots.$ → (10)

(6) இன் படி $u = 1$ என இருக்க $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ஆகிய குணகங்கள் தக்கபடி தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்.

இதற்கு ஃபூரியர் தொடரைப் பயன்படுத்துவோம். $(0, \pi)$ எல்லைக்குள் xஇன் அனைத்து மதிப்புகளையும் கொண்டிருக்கும், $f(x) = 1$ என்ற சார்பைக் காண்போம்.

$f(x) \equiv c_1 \sin x + c_2 \sin 2x + c_3 \sin 3x + \ldots$ இதில்

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx\, dx$$

$f(x) = 1,$ மேலும் $f(x)$ ஒரு ஒற்றைச்சார்பு. இதில்,

$$\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n}[(-1)^n - 1]$$

$$= \frac{1}{n}[1-(-1)^n]$$

இம்மதிப்பு, n ஒற்றை எனில் $\frac{1}{n}(1+1) = \frac{2}{n}$

n இரட்டை எனில், $\frac{1}{n}(1-1) = 0$

எனவே $\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = 0$, இரட்டை n மதிப்புக்கு

$= \frac{2}{n}$, ஒற்றை nஇன் மதிப்புக்கு

$c_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{n}$ ஒற்றை nக்கு

$c_n = 0$, இரட்டை nக்கு

எனவே

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

இம்மதிப்பைச் சமன்பாடு (9) இல் பிரதியீடு செய்ய

$$u = \frac{4}{\pi}\left(e^{-y} \sin x + \frac{1}{3} e^{-3y} \sin 3x + \frac{1}{5} e^{-5y} \sin 5x + \cdots\right) \quad \rightarrow (11)$$

எனவே தகட்டின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (x, y) இல் காணப்படும் வெப்பநிலை uஐக் குறிப்பது இச்சமன்பாடாகும்.

(2) இழுத்துக் கட்டப்பட்ட கம்பியில் குறுக்கதிர்வுகள்

இரு முனைகளிலும் பிணைக்கப்பட்டு இழுத்துக் கட்டப்பட்ட ஒரு கம்பியில் ஏற்படும் குறுக்கதிர்வுகளைக் கருதுவோம்.

இதன் நீளம் l. இது அதிர்வுறும் போது கம்பியின் இடப்பெயர்வு $y = f(x)$. கம்பி x அச்சிலும், அதன் ஒரு முனை ஆதியிலும் அமைந்துள்ளன. ஒலியியலில் கம்பியின் அதிர்வுகள்,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \rightarrow (1)$$

என்ற சமன்பாட்டால் அறியப்படும். இதன் தீர்வு y ஆனது, கீழ்க்கண்ட வரம்பு நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட்டு, கண்டறியப்பட வேண்டும்.

$x = 0$ மற்றும் $x = l$ எனில் $y = 0$ $\rightarrow (2)$

$t = 0$ எனில் $y = f(x)$ மற்றும் $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ $\rightarrow (3)$

(1) இன் தீர்வு $y = Ae^{\propto x+\beta t}$ என்க. $\rightarrow (4)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A\beta^2 e^{\propto x+\beta t}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = A \propto^2 e^{\propto x+\beta t}$$

இவற்றைச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட

$$A\beta^2 e^{\propto x+\beta t} = A \propto^2 a^2 e^{\propto x+\beta}$$

அல்லது $\beta^2 = a^2 \propto^2$

$$\beta = \pm a \propto$$

எனவே $y = A\, e^{\propto x \pm a \propto t}$

$\propto$க்குப் பதிலாக முதலில் $\propto i$ ஐயும் இரண்டாவதாக $-\propto i$ ஐப் பிரதியிடுவோம்.

$y = A\, e^{i\propto(x \pm at)}$ மற்றும் $y = A\, e^{-i\propto(x \pm at)}$ கூட்ட

$$2y = A\left[e^{i\propto(x \pm at)} + e^{-i\propto(x \pm at)}\right]$$

$$y = A\left[\frac{e^{i\propto(x \pm at)} + e^{-i\propto(x \pm at)}}{2}\right]$$

$$y = A \cos \propto (x \pm at) \quad \rightarrow (5)$$

இதேபோல் $y = B \sin \propto (x \pm at)$ $\rightarrow (6)$

எனலாம்.

(5) இல் இருந்து

$y = A \cos \propto (x + at)$

$= A\{\cos \propto x . \cos \propto at - \sin \propto x \sin \propto at\} \quad \rightarrow (7)$

$y = A \cos \propto (x - at)$

$= A\{\cos \propto x . \cos \propto at + \sin \propto x \sin \propto at\} \quad \rightarrow (8)$

(7) + (8) $2y = A\, 2\cos \propto x \cos \propto at$

$y = A \cos \propto x \cos \propto at \quad \rightarrow (9)$

(6) இல் இருந்து

$y = B \sin \propto (x + at)$

$= B\{\sin \propto x . \cos \propto at + \cos \propto x . \sin \propto at .\} \quad \rightarrow (10)$

$y = B \sin \propto (x - at)$

$= B\{\sin \propto x . \cos \propto at - \cos \propto x . \sin \propto at .\} \quad \rightarrow (11)$

(10) + (11), $2y = 2B \sin \propto x . \cos \propto at$

$y = B \sin \propto x . \cos \propto at \quad \rightarrow (12)$

(9) மற்றும் (12)ஐ ஒப்பிடும் போது

$x = 0$ எனில் $y = 0$ மற்றும்

$t = 0$ எனில் $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ எனும் நிபந்தனைகளுக்குச் சமன்பாடு (12) மட்டுமே

இணங்குவது தெரிகிறது.

எனவே சரியான தீர்வு $y = B \sin \propto x . \cos \propto at$ எனலாம்.

இது $x = l$ எனில் $y = 0$ எனும் நிபந்தனையைச் சரி செய்ய வேண்டுமானால் $\propto = \frac{n\pi}{l}$ என இருக்க வேண்டும். n ஒரு முழு எண்.

எனவே தீர்வு

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sin\frac{n\pi x}{l} \, . \cos\frac{n\pi at}{l} \qquad \rightarrow (13)$$

எனலாம். $t = 0$ எனில் $y = f(x)$ எனும் நிபந்தனைக்கேற்ப

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sin\frac{n\pi x}{l} \qquad \rightarrow (14)$$

என்பது தீர்வாகும். அதாவது,

$$y = b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + b_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots \qquad \rightarrow (15)$$

தீர்வு (13) இல், b_n இன் மதிப்பைக் கண்டறிந்தால் தீர்வு முழுமையாகும்.

இதைக் கண்டறிய,

ஃபூரியர் தொடரை ஆராய வேண்டும்.

$$f(x) = b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + b_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots$$

என்ற தொடரைக் கருதுவோம்.

$(0, l)$ எல்லைக்குள் அமையும் அனைத்து x மதிப்புகளுக்கும் மேற்கண்ட ஃபூரியர் சமன்பாடு பொருந்தும். இதில்

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} \, dx$$

ஆகும்.

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\gamma)\sin\frac{n\pi\gamma}{l}\,d\gamma$$

என்போம்.

இதைச் சமன்பாடு (13) இல் பிரதியிட (1) இன் முழுமையான தீர்வு கிடைக்கப்பெறும். இத்தீர்வு

$$y = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\ cos\frac{n\pi at}{l}\int_0^l f(\gamma)\sin\frac{n\pi\gamma}{l}\,d\gamma \qquad \rightarrow (16)$$

கம்பி அதிர்வுறும் போது அதன் இடப்பெயர்ச்சி

$y = f(x) = b\ sin\frac{n\pi x}{l}$, b கம்பியின் வீச்சு ஆகும்.

$$f(\gamma) = b\ sin\frac{n\pi\gamma}{l}$$

எனவே

$$\int_0^l f(\gamma)\sin\frac{n\pi\gamma}{l}\,d\gamma = b\int_0^l sin^2\left(\frac{n\pi\gamma}{l}\right)d\gamma$$

$$= \frac{b}{2}\int_0^l \left(1-\cos\frac{2\pi n\gamma}{l}\right)d\gamma$$

$$= \frac{b}{2}\left[\gamma - \frac{l}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n\gamma}{l}\right]_0^l$$

$$= \frac{bl}{2}$$

எனவே தீர்வு (16) இன் படி

$$y = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\ \cos\frac{n\pi at}{l}\cdot\frac{bl}{2}$$

அல்லது

$$y = b\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\ \cos\frac{n\pi at}{l}$$

ஆகும்.

பயிற்சி 3.1

கீழ்க்கண்டவற்றுக்கான ஃபூரியர் தொடர்களைக் காண்க.

1) $f(x) = \pi - x \quad , \quad 0 < x < 2\pi$

விடை $\quad 2\left[\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots \frac{1}{n}\sin nx + \cdots\right]$

2) $f(x) = x\sin x \; , \; 0 < x < 2\pi$

விடை $\quad -1 + \pi\sin x - \frac{1}{2}\cos x + 2\left[\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 3x}{3^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \cdots\right]$

3) $f(x) = e^x, -\pi < x < \pi$

விடை $\quad \frac{2\sin h\pi}{\pi}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1^2+1}\cos x + \frac{1}{2^2+1}\cos 2x - \frac{1}{3^2+1}\cos 3x + \cdots\right) + \left(\frac{1}{1^2+1}\sin x - \frac{2}{2^2+1}\sin 2x + \frac{3}{3^2+1}\sin 3x + \cdots\right)\right]$

4) $f(x) = e^{-x} \; , 0 \leq x < 2\pi$

விடை $\quad \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\cos 3x + \cdots + \frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{3}{10}\sin 3x + \cdots\right]$

5) $f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 , 0 < x < 2\pi$ எனில் $f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ எனக் காட்டுக.

6) $f(x)$ ஆனது $(0, 2\pi)$ இடைவெளியில் அமையும் ஒரு காலவட்டச் சார்பு (perodic function) அதன் மதிப்பு

$f(x) = \frac{(3x^2 - 6x\pi + 2\pi^2)}{12}$ எனில் $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ என நிரூபிக்கவும். அதிலிருந்து $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ எனக்காட்டுக.

3.7 ஃபூரியர் தொகைகள் (Fourier's Integrals)

$(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் ஃபூரியர் தொடர்

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \rightarrow (1)$$

இதில்

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\,x\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\,x\,dx \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow (2)$$

$f(x)$ என்ற xஇன் சார்பைக் கோண விகிதச் சார்புத்தொடராக (trigonometric series) $(-c, c)$ எல்லைக்குள் அமையும் அனைத்து xஇன் மதிப்புகளுக்கும் பொருந்துமாறு மாற்றி அமைக்க முடியும்.

இதற்கு

$z = \frac{\pi}{c}x$ என்று கொள்ள வேண்டும்.

$x = -c$ எனில் $z = -\pi$

$x = c$ எனில் $z = \pi$

மேலும் $f(x) = f\left(\frac{c}{\pi}z\right)$

சமன்பாடு (1) இல் இருந்து

$$f\left(\frac{c}{\pi}z\right) = a_0 + a_1\cos z + a_2\cos 2z + \cdots + b_1\sin z + b_2\cos 2z + \ldots \quad \rightarrow (3)$$

இதில்

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\tfrac{c}{\pi}z\right)dz \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{c}{\pi}z\right)\cos n\,z\,dz \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{c}{\pi}z\right)\sin n\,z\,dz \end{aligned}\right\} \rightarrow (4)$$

(3) மற்றும் (4) இல் z க்கு பதில் $\frac{\pi}{c}x$ பிரதியிடலாம்.

$$f(x) = a_0 + a_1 cos\frac{\pi x}{c} + a_2\cos\frac{2\pi x}{c} + \cdots$$

$$+ b_1\sin\frac{\pi x}{c} + b_2\sin\frac{2\pi x}{c} + \ldots \rightarrow (5)$$

இதிலுள்ள குணகங்கள் (3) இன் குணகங்களை ஒத்திருப்பதால், இச்சார்பு $(c, -c)$ எல்லைக்குப்பொருந்துவதாகும்.

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-c}^{c} f(x).\tfrac{\pi}{c}dx = \tfrac{1}{2c}\textstyle\int_{-c}^{c} f(x)dx \\ a_0 &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)dt \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} \because z = \frac{\pi}{c}x \\ dz = \frac{\pi}{c}dx \end{bmatrix} \rightarrow (6)$$

என்போம்.

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-c}^{c} f(x)\cos n\tfrac{\pi}{c}x.\tfrac{\pi}{c}dx \\ a_n &= \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(t)\cos\frac{n\pi t}{c}.dt \end{aligned}\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}.\frac{\pi}{c}dx$$

$$b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(t)\sin\frac{n\pi t}{c}.dt \qquad \rightarrow (6)$$

இம்மதிப்புகளை (5) இல் பிரதியிட

$$f(x) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(t)\cos\frac{\pi t}{c}\cos\frac{\pi x}{c}dt$$

$$+\frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(t)\cos\frac{2\pi t}{c}\cos\frac{2\pi x}{c}dt + \cdots \int_{-c}^{c} f(t)\sin\frac{\pi t}{c}\sin\frac{\pi x}{c}dt$$

$$+\int_{-c}^{c} f(t)\sin\frac{2\pi t}{c}\sin\frac{2\pi x}{c}dt + \cdots$$

$$= \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(t)\left[\frac{1}{2} + \cos\frac{\pi t}{c}\cos\frac{\pi x}{c} + \cos\frac{2\pi t}{c}\cos\frac{2\pi x}{c} + \cdots\right.$$

$$\left. + \sin\frac{\pi t}{c}\sin\frac{\pi x}{c} + \sin\frac{2\pi t}{c}\sin\frac{2\pi x}{c} + \cdots\right]dt$$

$$= \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(t)\left[\frac{1}{2} + \left\{\cos\frac{\pi t}{c}\cos\frac{\pi x}{c} + \sin\frac{\pi t}{c}\sin\frac{\pi x}{c}\right\}\right.$$

$$\left. + \left\{\cos\frac{2\pi t}{c}\cos\frac{2\pi x}{c} + \sin\frac{2\pi t}{c}\sin\frac{2\pi x}{c}\right\} + \cdots\right]dt$$

$$= \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(t)\left[\frac{1}{2} + cos\frac{\pi}{c}(x-t) + cos\frac{2\pi}{c}(x-t) + \cdots\right]dt$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)\left[1 + 2cos\frac{\pi}{c}(x-t) + 2cos\frac{2\pi}{c}(x-t) + \cdots\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} f(t)\left[\frac{\pi}{c}\cos\frac{0.\pi}{c}(x-t) + \frac{\pi}{c}\cos\frac{\pi}{c}(x-t) + \frac{\pi}{c}cos\left(\frac{-\pi}{c}\right)(x-t)\right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{c}cos\frac{2\pi}{c}(x-t) + \frac{\pi}{c}cos\left(-\frac{2\pi}{c}\right)(x-t) + \cdots\right]dt$$

$$\because 2\,cos\varphi = \cos(\varphi) + \cos(-\varphi)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} f(t)\left[\frac{\pi}{c}\cos\left(\frac{-n\pi}{c}\right)(x-t)\right.$$

$$+ \frac{\pi}{c}\cos(-\mathrm{n}+1)\frac{\pi}{c}(x-t) + \frac{\pi}{c}\cos(-n+2)\frac{\pi}{c}(x-t)$$

$$+ \cdots\frac{\pi}{c}cos\frac{0.\pi}{c}(x-t) + \frac{\pi}{c}cos\frac{\pi}{c}(x-t) + \frac{\pi}{c}\cos\frac{2\pi}{c}(x-t)$$

$$\left. + \cdots\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} f(t)\left[\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\sum_{r=-n}^{r=n}\frac{\pi}{c}cos\frac{r\pi}{c}(x-t)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} f(t)\left[\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\sum_{r=-n}^{n}\frac{1}{\left(\frac{c}{\pi}\right)}cos\frac{r}{\left(\frac{c}{\pi}\right)}(x-t)\right]dt$$

இதில் $c \to \infty \quad c/\pi \to \infty$

எனவே

$$\underset{c\to\infty}{\text{எல்லை}}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{c}{\pi}\right)}cos\frac{r}{\left(\frac{c}{\pi}\right)}(x-t) = \int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)du$$

எனவே

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\cos u\,(x-t)du$$

இந்த இரட்டைத் தொகையானது ஃபூரியரின் தொகை (Fourier Integral) எனப்படும்.

3.8 ஃபூரியர் தொகையின் வெவ்வேறு வடிவங்கள்

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos u\,(x-t)du \quad \rightarrow (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos u\,(x-t)du = \int_{-\infty}^{0} \cos u\,(x-t)du + \int_{0}^{\infty} \cos u\,(x-t)du$$

இதனை $I = I_1 + I_2$ என்க.

I_1ல் u க்குப் பதிலாக $-u$ ஐப் பிரதியிடலாம்.

$$I_1 = -\int_{\infty}^{0} \cos u\,(x-t)du = \int_{0}^{\infty} \cos u\,(x-t)du = I_2$$

எனவே

$$I = I_1 + I_2 = 2I_2 = 2\int_{0}^{\infty} \cos u\,(x-t)dt$$

எனவே (7) இல் இருந்து

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{0}^{\infty} \cos u\,(x-t)du \quad \rightarrow (8)$$

இதில் தொகையின் எல்லைகள் u அல்லது tஐச் சார்ந்ததல்ல. எனவே தொகையின் வரிசையை மாற்றி அமைக்கலாம்.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(t)}\cos u\,(x-t)dt \quad \rightarrow (9)$$

இப்போது $f(x)$ ஒரு ஒற்றைச்சார்பு எனில் $f(-x) = -f(x)$ ஆகும்.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(t)} \cos u\,(x-t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{f(t)} \cos u\,(x-t)dt + \int_{0}^{\infty} \mathrm{f(t)} \cos u\,(x-t)dt$$

tக்குப் பதிலாக $-t$ஐப் பயன்படுத்த வலப்புறமுள்ள முதலாவது கோவை

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{f(t)} \cos u\,(x-t)dt = -\int_{\infty}^{0} \mathrm{f(-t)} \cos u\,(x+t)dt \qquad (dt \to -dt)$$

$$= -\int_{\infty}^{0} -\mathrm{f(t)} \cos u\,(x+t)dt$$

$$= \int_{\infty}^{0} \mathrm{f(t)} \cos u\,(x+t)dt$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \mathrm{f(t)} \cos u\,(x+t)dt$$

எனவே

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u\,(x-t)dt = \int_{0}^{\infty} f(t)[\cos u(x-t)dt - \cos u(x+t)]\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} f(t) \sin u\, x \sin ut\; dt$$

(9) இல் பிரதியிட

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_0^\infty f(t) \sin u\, t \sin ux\, dt \quad \rightarrow (10)$$

தொகையீட்டின் வரிசையை மாற்றிட

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)dt \int_0^\infty \sin u\, t \sin ux\, du \quad \rightarrow (11)$$

$f(x)$ இரட்டைச் சார்பு எனில் $f(-x) = f(x)$ ஆகும்.

எனவே ஃபூரியர் தொகை

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u\, (x-t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(t) \cos u\, (x-t)dt + \int_{0}^{\infty} f(t) \cos u\, (x-t)dt$$

வலப்புறமுள்ள முதலாவது கோவை

$$\int_{-\infty}^{0} f(t) \cos u\, (x-t)dt = -\int_{\infty}^{0} f(-t) \cos u\, (x+t)dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t) \cos u\, (x+t)dt \quad \because f(-t) = f(t)$$

எனவே

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u\, (x-t)dt = \int_{0}^{\infty} f(t)[\cos u(x+t) + \cos u(x-t)]\, dt$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} f(t) \cos u\, t \,.\cos u\, x\, dt$$

(9) இல் பிரதியிட

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_0^\infty f(t) \cos u\, t \cos u\, x\, du \quad \rightarrow (12)$$

தொகைகளின் வரிசையை மாற்ற

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)dt \int_0^\infty \cos u\, t \cos u\, x\, dt \quad \rightarrow (13)$$

சமன்பாடுகள் (7) முதல் (13) வரை ஃபூரியர் தொகையின் வெவ்வேறு வடிவங்ககளாகும்.

3.9 ஃபூரியர் தொகைகளின் பார்சிவால் முற்றொருமை

$$\int_{-\infty}^{\infty} | F(x) |^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |^2 dt$$

இதில் $f(t)$ ஆனது $F(x)$ இன் ஃபூரியர் நிலைமாற்றமாகும்.

3.10 ஃபூரியர் நிலைமாற்றங்கள் (Fourier Transforms)

$$F(\propto) = \int_a^b f(t)K(\propto, t)dt \quad \rightarrow (1)$$

பொதுவாக இது ஒரு நிலைமாற்றத்தைக் குறிக்கும் சமன்பாடாகும். இதில் $f(t)$ என்ற சார்பானது $K(\propto, t)$ என்ற நிலைமாற்றக் கரு (Kernel)வினால் $F(\propto)$ என்ற சார்பாக மாற்றப்படுகிறது. $t-$வெளி ஆயங்களிலிருந்த $f(t)$ சார்பு $\propto-$வெளி ஆயங்களுக்கு மாற்றப்பட்டுள்ளது. இதேபோல்

1. ஃபூரியர் சிக்கல் (Complex) நிலைமாற்றமானது,

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$$

இதேபோல்

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ist} dt \ .$$

$f(t)$ இன் ஃபூரியர் நிலைமாற்றம் $F(s)$ ஆகும்.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-itx} dt$$

இவற்றுள் $F(t)$ இன் நேர்மாறு ஃபூரியர் சிக்கல் நிலைமாற்றம் (Inverse Fourier Transform) எனப்படும்.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} ds$$

இது $F(s)$ன் நேர்மாறு பூரியர் சிக்கல் நிலைமாற்றம் ஆகும்.

2. ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்றம் (Fourier Sine Transform)

$0 < x < \infty$ எல்லைக்குள் அமையும் xஇன் சார்பு $f(x)$ இன் முடிவிலி ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்றம் $F(n)$ என்போம். இதில் n ஒரு நேர்முழு எண்ணாகும். இதனை,

$$F_s(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin nx \, dx$$

எனலாம். அதற்கு மாறாக $F_s(n)$இன் நேர்மாறு ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்ற (Inverse Fourier Sine Transform) த்தைக் குறிக்கும் சமன்பாடு,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(n) \sin nx \, dn$$

3. ஃபூரியர் கொசைன் நிலைமாற்றம் (Fourier Cosine Transform)

$$F_c(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos nx \, dx$$

இதில் n ஒரு நேர் முழு எண். இந்நிலைமாற்றம் xஇன் $0 < x < \infty$ என்ற எல்லைக்கு உட்பட்டதாகும்.

இதில் நேர்மாறு ஃபூரியர் கொசைன் நிலைமாற்றத்தைக் குறிக்கும் சமன்பாடு,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(n) \cos nx \, dn$$

ஆகும்.

4. வரையறுக்கப்பட்ட ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்றம் (Finite Fourier sin Transform)

$0 < x < l$ எல்லைக்குள் $F(x)$ன் நிலைமாற்றம்,

$$F_s(n) = \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx$$

ஆகும். $l = \pi$ எனில்

$$F_s(n) = \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$$

இதன் நேர்மாறு (Inverse)

$$f_s(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty F_s(n) \sin nx$$

5. வரையறுக்கப்பட்ட ஃபூரியர் கொசைன் நிலைமாற்றம்

$0 < x < l$ எல்லைக்குள்

$$F_c(n) = \int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

இதன் நேர்மாறு

$$f_c(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\cos nx$$

ஆகும்.

மாதிரி – 5

$\int_0^\infty \frac{\cos u\,x}{u^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-x},\ \ x \geq 0$ எனக் காட்டுக.

சமன்பாடு (12) இன் படி

$$f(x) = e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-t}\cos u\,t\cos u\,x\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du \int_0^\infty e^{-t}\cos u\,t\ \ d\,t$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,dx\left[\frac{e^{-t}}{1+u^2}(-\cos ut + u\sin ut)\right]_0^\infty$$

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos u\,x}{1+u^2}dx$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\cos u\,x}{1+u^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

மாதிரி–6

e^{-x}இன் ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்றத்தைக் காண்க.

$$F_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \sin n\,x\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{e^{-x}}{1+n^2} (-\sin nx - n\cos nx) \right]_0^\infty$$

$$F_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{n}{1+n^2}$$

மாதிரி–7

$e^{-\lambda n}$இன் நேர்மாறு ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்றத்தைக் காண்க.

$$f_s^{-1}(e^{-\lambda n}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\lambda n} \sin nx\,dn$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{e^{-\lambda n}}{\lambda^2 + x^2} (-\lambda \sin nx - x\cos nx) \right]_0^\infty$$

$$f_s^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{x}{\lambda^2 + x^2}$$

மாதிரி–8

$0 < x < 2$ எல்லைக்குட்பட்ட $f(x) = x$இன் ஃபூரியர் சைன் நிலை மாற்றத்தைக் காண்க.

$$F_s(n) = \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \int_0^2 x \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= x\left[\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{-2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi$$

மாதிரி – 9

$f(x)$ இன் ஃபூரியர் நிலைமாற்றத்தினைக் காண்க. இதில் $|x| < a$ எனில்

$f(x) = 1$; $\quad |x| > a$ எனில் $f(x) = 0$

தீர்வு :

$f(x)$ இன் ஃபூரியர் நிலைமாற்றமானது

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{inx}dx$$

$f(x)$இன் மதிப்பைப் பிரதியீடு செய்ய

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} 1\,.\ e^{inx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{inx}}{in}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(in)}\left(e^{ina} - e^{-ina}\right)$$

$$= \frac{2}{n\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{ina} - e^{-ina}}{2i}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin na}{n}\right)$$

மாதிரி – 10

ஃபூரியர் நிலைமாற்றம் காண்க.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$ எனில்

தீர்வு :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 < x < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{inx} dx$$

$$f(x) = 1 - x^2, \qquad F(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1 - x^2) e^{inx} dx$$

பகுதிகளாகத் தொகைகாண, $\left[\int uv = uv_i - u'v_{ii} + u''v_{iii} \ldots \ldots\right]$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[(1 - x^2)\frac{e^{inx}}{in} - (-2x)\frac{e^{inx}}{(in)^2} + (-2)\frac{e^{inx}}{(in)^3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{-2e^{in}}{n^2} + \frac{2e^{in}}{in^3}\right) - \left(\frac{2e^{-in}}{n^2} + \frac{-2e^{-in}}{in^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-2e^{in}}{n^2} + \frac{2e^{in}}{in^3} - \frac{-2e^{-in}}{n^2} - \frac{-2e^{-in}}{in^3}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-2}{n^2}(e^{in} - e^{-in}) + \frac{2}{n^3}\left(\frac{e^{in} + e^{-in}}{i}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-2}{n^2}(2\cos n) + \frac{2}{n^3}\left(\frac{2\, i \sin n}{i}\right)\right]$$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{n^3} (-n\cos n + \sin n)$$

மாதிரி – 11

$\frac{1}{x}$ இன் ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்றத்தைக் காண்க.

$$F_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx$$

$nx = \theta$ என்க. $ndx = d\theta$

$$F_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin\theta \,.\frac{n}{\theta}\,.\frac{d\theta}{n}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\,.d\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

மாதிரி – 12

$f(x)$ இன் ஃபூரியர் நிலைமாற்றத்தைக் காண்க.

இதில்

$$f(x)\begin{cases} 1+\frac{x}{a}\,, & (-a < x < 0) \\ 1-\frac{x}{a}\,, & (0 < x < a) \\ 0\,, & \text{மற்றவைக்கு} \end{cases}$$

தீர்வு :

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{inx}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{x}{a}\right)e^{inx}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{inx}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)\frac{e^{inx}}{in} - \left(\frac{1}{a}\right)\frac{e^{inx}}{-n^2}\right]_{-a}^{0}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{e^{inx}}{in} - \left(\frac{-1}{a}\right)\frac{e^{inx}}{-n^2}\right]_{0}^{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{in}+\frac{1}{an^2}-\frac{e^{-ina}}{an^2}\right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-e^{ina}}{an^2}-\frac{1}{in}+\frac{1}{an^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2}{an^2}-\frac{(e^{ina}+e^{-ina}}{an^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2}{an^2}-\frac{2\cos na}{an^2}\right]$$

$$= \frac{2}{an^2\sqrt{2\pi}}(1-\cos an)$$

$$F(n) = \frac{2}{an^2}\frac{2}{\sqrt{2\pi}} sin^2\left(\frac{an}{2}\right)$$

$$F(n) = \frac{2\sqrt{2}}{an^2\sqrt{\pi}} sin^2\left(\frac{an}{2}\right)$$

மாதிரி—13

டிராக் டெல்டா சார்பு $\delta(t-a)$ன் கலப்பின ஃபூரியர் நிலைமாற்றத்தினைக் காண்க.

டிராக் டெல்டா சார்பு, கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\delta(t-a) = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \; I\,(h, t-a)$$

$$\text{இதில் } I\,(h, t-a) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & a < t < a+h \text{ க்கு} \\ 0, \; t < a & \text{மற்றும் } t > a+h \text{ க்கு} \end{cases}$$

தீர்வு –

$$F\{\delta(t-a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{int}\,\delta(t-a)dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \int_{a}^{a+h} \frac{1}{h}\, e^{int} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{h}\left[\frac{e^{int}}{in}\right]_a^{a+h}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{inh}\left[e^{in(a+h)} - e^{ina}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \; e^{ina}\left[\frac{e^{inh}-1}{inh}\right]$$

$$= \frac{e^{ina}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{ஏனெனில்} \quad \underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{e^{\theta}-1}{\theta} = 1$$

3.11 ஃபூரியர் நிலைமாற்றங்களின் பயன்பாடுகள்

(1) ஒரு திடப்பொருளில் ஒரு புள்ளியில் வெப்பநிலை

சமன்பாடு $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ஐக் கருதுவோம். $x > 0, t > 0$ $\rightarrow (1)$

இதற்கான நிபந்தனைகள்

(i) $x = 0,\ t > 0$ எனில் $U = 0$

(ii) $U = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ க்கு} \\ 0, & x \geq 1 \text{ க்கு} \end{cases}$ $t = 0$ எனில்

(iii) $U(x,t)$ ஒரு குறிப்பிட்டமேல் எல்லைக்குட்பட்டது. இதற்கு ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம். சமன்பாடு (1) இல் இருந்து

$$\int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial t} \sin nx\, dx = \int_0^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin nx\, dx$$

$u(n,t) = \int_0^\infty U(x,t) \sin nx\, dx$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{du}{dt} = \int_0^\infty \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \sin nx\, dx = \int_0^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin nx\, dx$$

(1) இல் இருந்து,

$$\frac{du}{dt} = \int_0^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin nx\, dx$$

$$= \left[\sin nx \frac{\partial U}{\partial x}\right]_0^\infty + n \int_0^\infty \cos nx \frac{\partial U}{\partial x} dx$$

$$= 0 - n[\cos nx\, U\,]_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} \sin nx\, U\, dx$$

$\frac{\partial U}{\partial x} \to 0, \quad x \to \infty$ எனில்

$= nU(o,t) - n^2u, \;\; U \to 0, \;\; x \to \infty$ எனில் $\quad\quad \to (2)$

ஆனால் $\quad u(n,t) = \int_0^{\infty} U(x,t) \sin nx\, dx$ எனவே

$u(n,0) = \int_0^{\infty} U(x,0) \sin nx\, dx = \int_0^{1} \sin nx\, dx$ நிபந்தனை (ii) இன் படி

$$= \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^1$$

$$= \frac{1 - \cos n}{n} \quad\quad \to (3)$$

நிபந்தனை(i)இன் படி $U(0,t) = 0$ இதைப் பயன்படுத்த சமன்பாடு **(2)** ஆனது

$\frac{du}{dt} = -n^2u$ அல்லது $\frac{du}{u} = -n^2dt$

தொகையிட, $\log u = -n^2t + \log A, \; A$ ஒரு மாறிலி

$$u = Ae^{-n^2t}$$

முதலில் $t = 0$ எனில், $u(n,t) = u(n,0) = \frac{1-\cos n}{n}$ **(3) இன் படி**

$u = Ae^{-n^2t}$ யிலிருந்து $t = 0$ எனில் $u = A$

எனவே $\quad A = \frac{1-\cos n}{n}$

எனவே $u(n,t) = \frac{1-\cos n}{n} e^{-n^2 t}$

ஃபூரியர் சைன் மாற்றத்தின் நேர்மாறு வாய்பாடு.

$$U(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(n,t) \sin nx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{1-\cos n}{n} e^{-n^2 t} \sin nx \, dx$$

இதுவே (1) இன் தீர்வு. இது ஒரு திடப்பொருளின் ($x > 0$க்கு) எந்த ஒரு நேரத்திலும் x என்ற புள்ளியின் வெப்பநிலையைக் குறிக்கும் சமன்பாடாகும்.

(2) இழுத்துக் கட்டப்பட்ட கம்பியில் இடப்பெயர்வு

ஆதியிலிருந்து π தொலைவு வரை இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ள கிடைமட்ட கம்பியில் அதன் எடையினால் ஏற்படும் இடப்பெயர்வு $Y(x,t)$ ஐக் கண்டறிவோம்.

தொடக்கத்தில் $Y = 0$. வரம்பு மதிப்புப் பிரச்சினை

$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + g$ என்போம். $\rightarrow (1)$

இதில் $0 < x < \pi$, $t > 0$

$$a^2 = \frac{\text{இழுவிசை}}{\text{நேர்கோட்டு அடர்த்தி}}$$

வரம்பு நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு

$Y = 0 = \frac{\partial y}{\partial t}$, $t = 0$ எனில்

$Y = 0$, $x = 0$ அல்லது π எனில் $\rightarrow (2)$

சமன்பாடு (1) இல் இருந்து வரையறுக்கப்பட்ட ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்றம் காண,

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \sin nx \, dx$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \sin nx \, dx + g \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \qquad \rightarrow (3)$$

$$y(n,t) = \int_0^{\pi} Y(x,t) \sin nx \, dx$$

என்க. வலப்புற முதலாவது கோவையிலிருந்து,

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \sin nx \, dx = -n \int_0^{\pi} \frac{\partial Y}{\partial x} \cos nx \, dx$$

பகுதி தொகையீட்டின் படி

$$= n[(-1)^{n+1} Y(\pi) + Y(0)] - n^2 y$$

$$= -n^2 y \qquad \because Y(\pi) = Y(0) = 0$$

எனவே (3) இல் இருந்து

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -a^2 n^2 y + g \left[\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} \right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -a^2 n^2 y + g \left[\frac{1 - (1)^n}{n} \right] \qquad \rightarrow (4)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a^2 n^2 \right) y = \frac{g}{n} [1 - (-1)^n]$$

இச்சமன்பாட்டின் துணைத்தீர்வு (Complementary function)

$A\cos n\,a\,t + B\sin n\,a\,t$

சிறப்புத் தீர்வு (Particular integral)

$\frac{g}{n}[1-(-1)^n]\frac{1}{a^2n^2}\left[1-\left(\frac{D}{an}\right)^2\right]1$ இதில் $D=\frac{d}{dt}$ ஆகும்.

அதாவது $\frac{g}{a^2n^3}[1-(-1)^n]$. இதன் முழுத் தீர்வு (Complete integral)

$$y = A\cos n\,a\,t + B\sin n\,a\,t + \frac{g}{a^2n^2}[1-(-1)^n]$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -A\,na\sin n\,at + B\,na\cos n\,a\,t$$

$t=0$ எனில் $y=0=\frac{dy}{dt}$ என்ற நிபந்தனைப்படி

$A=-\frac{g}{a^2n^3}[1-(-1)^n]$ மற்றும் $B=0$. எனவே (4) இன் தீர்வு,

$$Y = \frac{g}{a^2n^3}[1-(-1)^n](1-\cos a\,n\,t)$$

(நேர்மாறு வாய்பாட்டின் (Inversion formula) படி)

$$y = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g}{a^2n^3}[1-(-1)^n](1-\cos n\,a\,t)\sin n\,x$$

$$= \frac{2g}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}(1-\cos na\,t)\sin nx$$

$$y = \frac{2g}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(\pi-x)}{2}(1-\cos n\,a\,t)\sin n\,x$$

$$\because f^{-1}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\} = \frac{x(\pi-x)}{2}$$

பயிற்சி 3.2

1. ஃபூரியர் தொகைகளைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^\infty \frac{\lambda \sin \lambda x}{\lambda^2 + k^2} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-kx}, \quad (x > 0, \qquad k > 0)$$

எனக்காட்டுக.

2. $f(x) = 0, \qquad x < \alpha$

$\qquad = 1, \qquad \alpha < x < \beta$

$\qquad = 0, \qquad x > \beta$

இச்சார்பின் ஃபூரியர் நிலைமாற்றம் $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\beta n} - e^{i\alpha n}}{in} \right)$

எனக்காட்டுக.

3. $f(x) = a - |\, x \,|, \qquad |\, x \,|\, a$

$\qquad = 0, \qquad |\, x \,| > a > 0$

இச்சார்பின் ஃபூரியர் நிலைமாற்றம் $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos an}{n^2}$ என நிரூபிக்கவும்.

இதிலிருந்து $\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$ எனக் காட்டுக.

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} & , |\, x \,| \le a \\ 0, & |\, x \,| > a \end{cases}$

இச்சார்பின் ஃபூரியர் நிலைமாற்றம் $\frac{\sin na}{na}$ எனக் காட்டுக.

5. $e^{-|x|}$ன் ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்றத்தைக் காண்க. அதிலிருந்து $\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

விடை $\qquad \frac{n}{1+n^2} \frac{\pi}{2} e^{-m}$

6. $\frac{x}{1+x^2}$ இன் ஃபூரியர் சைன் நிலைமாற்றம் $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, ane^{-an}$

எனக்காட்டுக.

3.12 லாப்லாஸ் நிலைமாற்றங்கள் (Laplace Transformations)

வரம்பு மதிப்புகள் (Boundary values) தெரிந்த வகைக்கெழு சமன்பாடு (Differential equation) களை அவற்றின் பொதுவான தீர்வுகளையோ, அல்லது அவற்றிலுள்ள யாதாமொரு (arbitrary) மாறிலிகளையோ கண்டறியாமலேயே தீர்ப்பதற்கான ஒரு முறையே லாப்லாஸ் நிலைமாற்றங்களாகும்.

லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தின் வரையறை

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \underset{a \to \infty}{\text{எல்லை}} \int_0^a e^{-st}F(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

<u>முக்கிய வாய்பாடுகள்</u>

1) $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$ 2) $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \ n = 0, \ 1,2,3 \ldots \ ,(s > 0)$

3) $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, (s > a)$ 4) $\mathcal{L}\,(\cos h\, a\, t) = \frac{s}{s^2 - a^2}, (s^2 > a^2)$

5) $\mathcal{L}(\sin h\, at) = \frac{a}{s^2 - a^2}, (s^2 > a^2)$ 6) $\mathcal{L}\,(\sin\ a\, t) = \frac{a}{s^2 + a^2}, (s > 0)$

7) $\mathcal{L}\,(\cos\ a\, t) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \ \ (s > 0)$

நிரூபணம்

1) $\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty 1 \,.\, e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\left[\frac{1}{e^{st}}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$

2) $\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty \ e^{-st}t^n dt$

$st = x$ என்க. $t = \frac{x}{s}$, $dt = \frac{dx}{s}$

$$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{x^n}{s^n}\frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = \frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1)$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}$$

3) $\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \left[\frac{e^{-(S-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty$

$$= -\frac{1}{(s-a)}\left[\frac{1}{e^{(s-a)t}}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{(s-a)}[0-1]$$

$$= \frac{1}{(s-a)}$$

4) $\mathcal{L}(\cos h\, a\, t) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2-a^2} = \frac{s}{s^2-a^2},$$

$(s > | a |)$

5) $\mathcal{L}(\sin h\, a\, t) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(s+a)-(s-a)}{s^2-a^2}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}, (s > | a |)$$

6) $\mathcal{L}(\sin\, a\, t) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}(e^{iat} - e^{-iat})$

$$= \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}(e^{iat}) - \mathcal{L}(e^{-iat})\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right] = \frac{1}{2i}\cdot\frac{2ia}{(s^2+a^2)}$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad (s > 0)$$

7) $\mathcal{L}(\cos a\,t) = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}(e^{iat} + e^{-iat})$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{iat}) + \mathcal{L}(e^{-iat})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+a^2}$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2} \quad , \quad (s > 0)$$

விளக்கம்

அனைத்துச் சார்புகளுக்கும் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் சாத்தியம் என்று கூறமுடியாது. $F(t)$ என்ற சார்பானது அடுக்குக்குறி (exponential) அளவில் விரிவடையலாம். அப்போது இதன் முடிவிலி தொகை $\int_0^\infty F(t)dt$ ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்குள் அடங்காமல் விரிவடையும். எனினும் இச்சார்பு $| e^{-s_0 t}F(t) | \leq M$ என்ற நிபந்தனைக்குக் கட்டுப்படுமானால் அதன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் சாத்தியமாகும். இதில் M என்பது, tஇன் பெரும மதிப்புகளுக்கு ஒரு நேர் மாறிலி (Positive Constant) ஆகும். லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தில் sஇன் மதிப்பு s_0 ஐ விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும். இத்தகைய சார்பு $F(t)$ அடுக்குக்குறி வரிசையில் (exponential order) அமைந்தது எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு (1) $F(t) = t^2$ என்ற சார்பைக் கருதுவோம்.

$$\underset{t\to\infty}{\text{எல்லை}}\ e^{-mt}t^2 = \underset{t\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{t^2}{e^{mt}}$$

$$= \underset{t\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{t^2}{1 + mt + \frac{m^2t^2}{2!} + \frac{m^3t^3}{3!} + \cdots}$$

$$= \underset{t\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{1}{\frac{1}{t^2} + \frac{m}{t} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3t}{3!} + \cdots}$$

$$= 0$$

சார்பு t^2 அடுக்குக்குறி வரிசை 3 ஐச் சேர்ந்தது. இதற்கு லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் கண்டறியலாம்.

(2) $F(t) = e^{t^3}$ என்ற சார்புக்கு

$$\text{எல்லை}_{t \to \infty} \left(e^{-mt} e^{t^3}\right) = \text{எல்லை}_{t \to \infty} \; e^{t(t^2-m)}$$

$$= \infty, \text{ முடிவிலி}$$

$t \to \infty$ க்கு இது அடுக்குக்குறி வரிசையைச் சார்ந்ததல்ல. எனவே இதன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் சாத்தியமில்லை.

3.13 ஃபால்டுங் அல்லது மடிப்புத் (Faltung or convolution) தேற்றம்

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்ற இரு சார்புகளைக் கருதுவோம். அவற்றின் ஃபூரியர் நிலைமாற்றங்கள் முறையே $F(\omega)$ மற்றும் $G(\omega)$ என்போம்.

இப்போது $(-\infty, \infty)$ இடைவெளியில் f மற்றும் gஇன் மடிப்பு

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y) dy \qquad \to (1)$$

ஆகும். இச்சார்புகளின் ஃபூரியர் நிலைமாற்றங்களைப் பயன்படுத்த

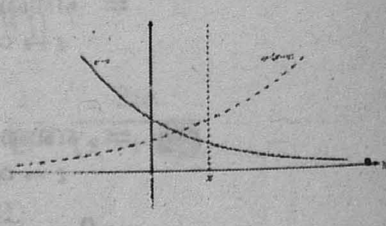
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega(x-y)} d\omega . dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{+i\omega y} dy \right] e^{-i\omega x} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \qquad \to (2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2)ஐ ஒப்பிட

$$f * g = \mathcal{L}^{-1}(FG)$$



படம் 3.3

F மற்றும் Gஇன் பெருக்கல் பலனின் நேர்மாறு ஃபூரியர் நிலைமாற்றமானது f மற்றும் gஇன் மடிப்பு $f * g$க்குச் சமமாகும். இதற்கான வரைபடமானது படம் 3.3இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி–14

மடிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}, \quad a \neq b$$

கண்டறிக.

தீர்வு :

$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$ மற்றும் $\mathcal{L}(\cos bt) = \frac{s}{s^2+b^2}$

மடிப்புத் தேற்றத்தின்படி

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos ax \cos b(t-x)dx\right\} = \frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$$

எனவே

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\} = \int_0^t \cos ax \cos b(t-x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \{\cos(ax+bt-bx) + \cos(ax-bt+bx)\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t cos[(a-b)x+bt]dx + \frac{1}{2}\int_0^t cos[(a+b)x-bt]dx$$

$$= \left[\frac{\sin(a-b)x+bt}{2(a-b)}\right]_0^t + \left[\frac{\sin(a+b)x-bt}{2(a+b)}\right]_0^t$$

$$= \frac{\sin at - \sin bt}{2(a-b)} + \frac{\sin at + \sin bt}{2(a+b)}$$

$$= \frac{a\ \sin at - b \sin bt}{a^2-b^2}$$

மாதிரி – 15

மடிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s^2+a^2)}$ ஐக் கண்டறிக

தீர்வு :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1\,, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) = \frac{sin\ at}{a}$$

மடிப்புத் தேற்றத்தின்படி

$$\mathcal{L}\int_0^t \left\{1\cdot\ \frac{\sin a(t-x)}{a}dx\right\} = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right\} = \int_0^t \frac{\sin a\,(t-x)}{a}dx = \left[\frac{-\cos(at-ax)}{a}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{a^2}(1-\cos at)$$

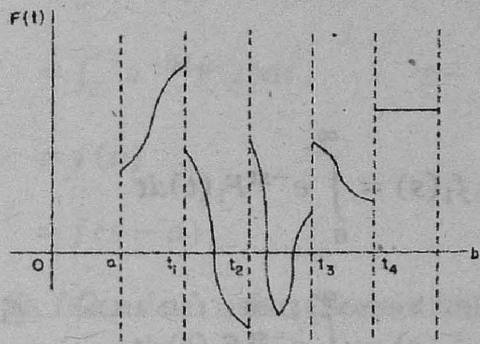
பயிற்சி 3.3

மடிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நேர்மாறு லாப்லாஸ் நிலைமாற்றங்களைக் காண்க.

1) $\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$ விடை $\frac{1}{2}t\cos at + \frac{1}{2a}\sin at$

2) $\frac{1}{(s^2+1)^3}$ விடை $\frac{1}{8}\,[(3-t^2)\sin t - 3t\cos t]$

3.14 சார்பின் துண்டுதுண்டான தொடர்ச்சி (Piecewise or sectional continuity)



படம் 3.4 துண்டு துண்டாக தொடர்ச்சியான சார்பு

ஒரு மூடிய இடைவெளி (Closed Interval) $[a, b]$, ஒரு குறிப்பிட்ட, சிறிய இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு, அவ்விடைவெளிகளில் சார்பு தொடர்ச்சியானதாக, தீர்க்கமான இடது மற்றும் வலது எல்லைகள் கொண்டதாக, படத்தில் (3.4) காட்டியது போல் அமையுமானால் சார்பானது $[a, b]$ மூடிய இடைவெளியில் துண்டுதுண்டான தொடர்ச்சி கொண்டது எனலாம்.

A வகைச் சார்பு (A function of class A)

$F(t)$ என்ற சார்பு, $t \geq 0$க்கு ஒவ்வொரு சிறிய இடைவெளியிலும் தொடர்ச்சியானதாகவும், $t \to \infty$க்கு அடுக்குக்குறி வரிசை கொண்டதாகவும் இருக்குமானால் அச்சார்பு A வகைச் சார்பு என்றழைக்கப்படும்.

3.15 லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தின் பண்புகள் (Properties)

(A) நேர்கோட்டுப்பண்பு (Linear Property)

$F_1(t), F_2(t)$ என்பன இரு சார்புகள், C_1, C_2 இருமாறிலிகள் எனில்

$$\mathcal{L}\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\} = C_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + C_2\mathcal{L}\{F_2(t)\}$$

$$= C_1f_1(s) + C_2f_2(s)$$

இத்தொடர்பு பல சார்புகளுக்கும், அதே எண்ணிக்கையிலான மாறிலிகளுக்கும் பொருந்தக்கூடியது.

நிரூபணம்

$$\mathcal{L}\{F_1(t)\} = f_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} F_1(t)dt$$

$$\mathcal{L}\{F_2(t)\} = f_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} F_2(t)dt$$

$$\mathcal{L}\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\}dt$$

$$= C_1\int_0^\infty e^{-st}F_1(t)dt + C_2\int_0^\infty e^{-st}F_2(t)dt$$

$$= C_1f_1(s) + C_2f_2(s)$$

(B) முதலாவது இடப்பெயர்வுப் பண்பு (First Shifting)

$F(t)$இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் $f(s)$ எனில் $e^{at}F(t)$ இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் $f(s-a)$ ஆகும். a ஒரு மெய் அல்லது சிக்கல் எண்.

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$$

நிரூபணம்

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = f(s)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}F(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} F(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-Ut} F(t)dt, \qquad s - a = u \text{ என்க}$$

$$= f(u)$$

$$= f(s-a)$$

(C) இரண்டாவது இடப்பெயர்வுப் பண்பு (Second Shifting)

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ மற்றும் $G(t) = \begin{cases} F(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$

எனில் $\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$

நிரூபணம்

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} G(t)dt$$

$$= \int_0^{a} e^{-st} G(t)dt + \int_a^{\infty} e^{-st} G(t)dt$$

$$= \int_0^{a} e^{-st}.0.dt + \int_a^{\infty} e^{-st} F(t-a)dt$$

$t - a = u$ எனில், $du = dt, \quad t = u + a$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)} F(u)du$$

$$= e^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-su} F(u)du$$

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-sa} f(s)$$

(D) திசையிலிப் பண்பு மாற்றம் (The change of scalar property)

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ எனில்

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$$

நிரூபணம்

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(at) dt$$

$at = u$ என்க. $dt = \frac{du}{a}$

$$= \int_0^\infty e^{-su/a} F(u) \frac{du}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-pu} F(u) du , \qquad \because p = \frac{s}{a}$$

$$= \frac{1}{a} f(p)$$

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f(s/a)$$

(E) வகைக்கெழுக்களின் (Derivatives) லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம்

A வகைச் சார்புகளுக்கு, $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ எனில்

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$$

பொதுவாக

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-1-r} F^{(r)}(0)$$

நிரூபணம்

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt$$

பகுதிகளாகத் தொகைகாண

$$= [e^{-st}F(t)]_0^\infty + s\int e^{-st}F(t)dt$$

$$= 0 - F(0) + sf(s)$$

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$$

எனவே

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s\mathcal{L}\{F'(t)\} - F'(0)$$

$$= s\{sf(s) - F(0)\} - F'(0)$$

$$= s^2f(s) - sF(0) - F'(0)$$

அவ்வாறே

$$\mathcal{L}\{F'''(t)\} = s^3f(s) - s^2F(0) - sF'(0) - F''(0)$$

பொதுவாக

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^nf(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) \ldots - sF^{n-2}(0)$$
$$- F^{n-1}(0)$$

$$= s^nf(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-1-r}F^{(r)}(0)$$

(F) லாப்லாஸ் நிலைமாற்றங்களின் வகைக்கெழுக்கள் (Derivatives of Laplace Transforms)

$t \geq 0$ க்கு $F(t)$ ஆனது துண்டு துண்டாகத் தொடர்ச்சியானது எனில், $f'(s) = \mathcal{L}\{-t(F(t)\}$

நிரூபணம்

$$= \mathcal{L}\{(F(t)\} = f(s)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = f(s)$$

இருபுறமும் s ஐ பொருத்து வகைக்கெழு காண,

$$\int_0^\infty (-t) e^{-st} F(t) dt = f'(s)$$

அல்லது $f'(s) = \mathcal{L}\{-t(F(t)\}$

பொதுவாக,

$$\mathcal{L}\{t^n(F(t)\} = (-1)^n f^n(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$$

(G) தொகைகளின் (Integrals') லாப்லாஸ் நிலைமாற்றங்கள்

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ எனில்

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u) du\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

நிரூபணம்

$G(t) = \int_0^t F(u)du$ என்க.

$G'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t F(u)du\right] = F(t)$ மற்றும் $G(0) = \int_0^0 F(u)du = 0$

பண்பு (E) இன் படி

$\mathcal{L}G'(t) = s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0)$

$\mathcal{L}\{F(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} - 0$ அல்லது $f(s) = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)du\right\}$

அல்லது $\mathcal{L}\{\int_0^t F(u)du\} = \frac{f(s)}{s}$

(H) திரும்புச் சார்புகள் (Periodic functions)

அலைவு நேரம் $T > 0$ கொண்ட திரும்புச் சார்பு $F(t)$ எனில் $F(t+T) = F(t)$

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$

நிரூபணம்

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt$$

$$= \int_0^{T} e^{-st}F(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st}F(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st}F(t)dt + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}F(t)dt$$

$t = u + nT$ என்க $F(u + nT) = F(u) \quad \because F(t + T) = F(t)$

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-s(u+nT)} F(u) du$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T e^{-su} F(u) du$$

$$= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots) \int_0^T e^{-su} F(u) du$$

$$= \frac{1}{1 - e^{sT}} \int_0^T e^{-su} F(u) du$$

uக்குப் பதிலாக tஐப் பிரதியீடு செய்ய

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{sT}}$$

(I) தொடக்க மதிப்புத் தேற்றம் (Initial value Theorem)

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ எனில் $\lim_{t \to 0}$ (எல்லை) $F(t) = \lim_{s \to \infty}$ (எல்லை) $sf(s)$

$\int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = sf(s) - F(0)$ (பண்பு (E)இன் படி) $t \to \infty$ எனில்

$$\text{எல்லை}_{s \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = \text{எல்லை}_{s \to \infty} \; sf(s) - F(0)$$

அல்லது $\text{எல்லை}_{s \to \infty} \; sf(s) = F(0) + \int_0^{\infty} (\text{எல்லை}_{s \to \infty} \; e^{-st}) F'(t) dt$

$$= F(0) + 0 \qquad \because \text{எல்லை}_{s \to \infty} \; e^{-st} = 0$$

$$= \text{எல்லை}_{t \to 0} \; F(t)$$

(*J*) இறுதி மதிப்புத் தேற்றம் (Final value Theorem)

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ எனில்

$$\underset{s \to 0}{\text{எல்லை}}\, sf(s) = \underset{t \to \infty}{\text{எல்லை}}\, F(t)$$

$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$ (பண்பு E இன் படி)

$$\int_0^\infty e^{-st} F'(t)dt = sf(s) - F(0)$$

$s \to 0$ எனில்

$$\underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \int_0^\infty e^{-st} F'(t)dt = \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}}\; sf(s) - F(0)$$

அல்லது $\underset{s \to 0}{\text{எல்லை}}\; sf(s) = F(0) + \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \int_0^\infty e^{-st} F'(t)dt$

$$= F(0) + \int_0^\infty \left(\underset{s \to 0}{\text{எல்லை}}\; e^{-st}\right) F'(t)dt$$

$$= F(0) + \int_0^\infty 1.\; F'(t)dt$$

$$= F(0) + \int_0^\infty \frac{d}{dt}\, F(t)dt$$

$$= F(0) + [F(t)dt]_0^\infty$$

$$= F(0) + \underset{t \to \infty}{\text{எல்லை}}\; F(t) - F(0)$$

$$= \underset{t \to \infty}{\text{எல்லை}}\; F(t)$$

மாதிரி 16

$f(t)$ என்ற சார்பின் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தினைக் காண்க. இதில்

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{k}, & 0 < t < k \\ 1, & t > k \end{cases}$$ எனில்

தீர்வு :

$$f(t) = \int_0^k \frac{t}{k} e^{-st} dt + \int_k^\infty 1\ e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{k}\left[\left(\frac{te^{-st}}{-s}\right)_0^k - \int_0^k \frac{e^{-st}dt}{-s}\right] + \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_k^\infty$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{ke^{-ks}}{-s} - \left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right)_0^k\right] + \frac{e^{-ks}}{s}$$

$$= \frac{-e^{-ks}}{s} - \frac{e^{-ks}}{ks^2} + \frac{1}{ks^2} + \frac{e^{-ks}}{s} = \frac{1}{ks^2}(1 - e^{-ks})$$ விடை.

மாதிரி 17

$(1 + \cos 2t)$இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தை அடிப்படைக் கொள்கை (First Principle) யிலிருந்து காண்க.

தீர்வு : $(1 + \cos 2t)$இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றமானது

$$\int_0^\infty e^{-st}(1 + \cos 2t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[1 + \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[2e^{-st} + e^{(-s+2i)t} + e^{(-s-2i)t}\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2e^{-st}}{-s} + \frac{e^{-(s-2i)t}}{-s+2i} + \frac{e^{-(s+2i)t}}{-s-2i}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(0+\frac{2}{s}\right) + \frac{1}{-s+2i}(0-1) + \frac{1}{-s-2i}(0-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{s} + \frac{1}{s-2i} + \frac{1}{s+2i}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{s} + \frac{2s}{s^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}$$

$= \frac{2s^2+4}{s(s^2+4)}$ விடை.

மாதிரி 18

$cos^2 t$ இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தினைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\cos 2t = 2\,cos^2 t - 1$$

$$cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$$

$$\mathcal{L}(cos^2 t) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(\cos 2t + 1)\right] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(\cos 2\,t) + \mathcal{L}(1)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s}\right]$$

மாதிரி 19

$t^{-1/2}$இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தினைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

இதில் $n = -\frac{1}{2}$ என்க.

$$\mathcal{L}(t^{-\frac{1}{2}}) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \qquad \because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{L}(t^{-\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

மாதிரி 20

$t \sin at$ இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் காண்க

தீர்வு :

$$\mathcal{L}(t \sin at) = \mathcal{L}t\left(\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}[\mathcal{L}te^{iat} - \mathcal{L}te^{-iat}]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(s-ia)^2} - \frac{1}{(s+ia)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{(s+ia)^2 - (s-ia)^2}{(s-ia)^2(s+ia)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{(s^2+2ias-a^2) - (s^2-2ias-a^2)}{(s^2+a^2)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\ \frac{4ias}{(s^2+a^2)^2} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

மாதிரி 21

$t \sin h\, at$ இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் காண்க

தீர்வு :

$$\mathcal{L}(\sin h\, at) \quad = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}(t \ \sin h\, at) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 - a^2}\right)$$

$$\mathcal{L}(t \ \sin h\, at) = \frac{2as}{\left(s^2 - a^2\right)^2}$$

மாதிரி 22

$t^2 e^t \sin 4t$ இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் காண்க

தீர்வு :

$$\mathcal{L}(\sin 4t) = \frac{4}{s^2 + 16}$$

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\mathrm{t}} \sin 4t) = \frac{4}{(s-1)^2 + 16}$$

$$\mathcal{L}(t\, \mathrm{e}^{\mathrm{t}} \sin 4t) = -\frac{d}{ds} \ \frac{4}{s^2 - 2s + 17}$$

$$= \frac{4(2s-2)}{(s^2 - 2s + 17)^2}$$

$$\mathcal{L}(t^2\, \mathrm{e}^{\mathrm{t}} \sin 4t) = -4\frac{d}{ds}\left(\frac{2s-2}{\left(s^2 - 2s + 17\right)^2}\right)$$

$$= -4\frac{(s^2-2s+17)^2 2-(2s-2)2(s^2-2s+17)(2s-2)}{(s^2-2s+17)^4}$$

$$= -4\frac{(2s^2-4s+34-8s^2+16s-8)}{(s^2-2s+17)^3}$$

$$= -4\frac{(-6s^2+12s+24)}{(s^2-2s+17)^3}$$

$$= 24\frac{(s^2-2s-4)}{(s^2-2s+17)^3}$$

மாதிரி 23

$\frac{\sin 2t}{t}$ இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin 2t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{2}{s^2+4}ds = 2\frac{1}{2}\left[tan^{-1}\frac{s}{2}\right]_s^\infty$$

$$= \left[tan^{-1}\infty - tan^{-1}\frac{s}{2}\right] = \frac{\pi}{2} - tan^{-1}\frac{s}{2}$$

$$= cot^{-1}\frac{s}{2}$$

மாதிரி 24

$t^2u(t-3)$ **இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் காண்க.**

தீர்வு :

$$t^2u(t-3) = [(t-3)^2 + 6(t-3) + 9]u(t-3)$$

$$= (t-3)^2u(t-3) + 6(t-3)u(t-3) + 9u(t-3)$$

$\mathcal{L}[t^2u(t-3)]$

$$= 1(t-3)^2u(t-3) + 6\mathcal{L}(t-3)u(t-3) + 9\mathcal{L}u(t-3)$$

$$= e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right)$$ விடை.

மாதிரி 25

$f(t) = \left(\frac{2t}{3}\right),\ 0 \le t \le 3$ என்ற அலைவடிவத்தின் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் காண்க.

தீர்வு :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-st}}\int_0^T e^{-st}F(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{2t}{3}\right) = \frac{1}{1-e^{-3s}}\int_0^3 e^{-st}\left(\frac{2}{3}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-3s}}\frac{2}{3}\left[\frac{te^{-st}}{-s} - (1)\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^3$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-e^{-3s}}\left[\frac{3e^{-3s}}{-s} - \frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-e^{-3s}}\left[\frac{3e^{-3s}}{-s} + \frac{1-e^{-3s}}{s^2}\right]$$

$$= \frac{2e^{-3s}}{-s(1-e^{-3s})} + \frac{2}{3s^2}$$ விடை.

மாதிரி 26

$$\frac{2s-5}{9s^2-25}$$

இன் நேர்மாறு லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தைக் காண்க.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s-5}{9s^2-25}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{9s^2-25}-\frac{5}{9s^2-25}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{9\left\{s^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2\right\}}-\frac{5}{9\left\{s^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2\right\}}\right]$$

$$=\frac{2}{9}\cos h\frac{5}{3}t-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5/3}{s^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{2}{9}\cos h\frac{5t}{3}-\frac{1}{3}\sin\frac{5t}{3}$$ –விடை

மாதிரி 27

$$\frac{s}{s^2+4s+13}$$

இன் நேர்மாறு லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தினைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+13}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2-2}{(s+2)^2+3^2}\right)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+2)^2+3^2}\right)$$

$$= e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right) - e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{3}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)$$

$$= e^{-2t}\cos 3t - \tfrac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t \qquad \text{விடை.}$$

மாதிரி 28

$tan^{-1}\frac{1}{s}$ இன் நேர்மாறு லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் காண்க.

தீர்வு :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(tan^{-1}\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{t}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}tan^{-1}\frac{1}{s}\right)$$

$$= -\frac{1}{t}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{s^2}}\left(-\frac{1}{s^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{t}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+s^2}\right)$$

$$= \frac{\sin t}{t} \quad \text{–விடை.}$$

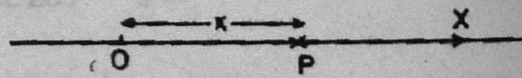
3.16 லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தினைப் பயன்படுத்தி வரம்பு மதிப்புப் பிரச்சினைகளைத் தீர்த்தல்

(1) 3 கிராம் நிறை கொண்ட ஒரு துகள் x அச்சில் நகருகிறது. பாதையில் ஒரு புள்ளியை நோக்கி அதன் மேல் செயல்படும் விசையின் எண்மதிப்பு $12x$. ஆரம்பத்தில் அத்துகள் $x = 5$ இல் நிலை கொண்டிருப்பதாகக் கொண்டு, t வினாடியில் அத்துகளின் நிலையைக் காண்போம்.

(a) வேறு எந்த ஒரு விசையும் அத்துகளின் மீது செயல்படவில்லை.

(b) அத்துகளின் மீது செயல்படும் தணிப்பு விசை (Damping force) யின் எண் மதிப்பு அதன் கணத்திசை வேகத்தைப் (Instantaneous velocity) போன்று 6 மடங்காகும்.

தீர்வு :



(a) துகள் P என்போம். 0 அதன் பாதையில் நிலைப்புள்ளி. , 0வின் வலப்புறம் P இருக்கும் போது விசை இடப்புறம், 0 வை நோக்கிச் செயல்படும். எனவே விசை $-12x$ என்க. P ஆனது 0 வை நோக்கி நகரும் போது எதிர்த்துச் செயல்படும் விசை $-12x$. நியூட்டனின் விதியைப் பயன்படுத்த,

நிறை x முடுக்கம் = செயல்படும் விசை

$$3\frac{d^2x}{dt^2} = -12\,x$$

அல்லது $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$ $\rightarrow (1)$

$\mathcal{L}\{x\} = \xi$ எனில் $\mathcal{L}^{-1}(\xi) = x$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - x'(0)$$

(இதில் $x\,(0) = 5\,,\; x'(0) = 0$ – வரம்பு நிபந்தனைகள்)

$$= s^2\xi - 5s$$

(1) இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றத்தைக் கொண்டு,

$s^2\xi - 5s + 4\xi = 0$ அல்லது $(s^2+4)\xi = 5s$

$$\xi = \frac{5s}{s^2+4}$$

எனவே $\mathcal{L}^{-1}\{\xi\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}$ அதாவது $x = 5\cos 2t$ இது துகளின் இருப்பிடத்தைக் குறிக்கும்.

(b) இப்போது இயக்கச் சமன்பாடு

$$3\frac{d^2x}{dt^2} = -12\,x - 6\frac{dx}{dt}$$

அல்லது $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 0$ → (2)

தொடக்க நிபந்தனைகள் $x(0) = 5,\ x'(0) = 0$

(2) இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம்

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 2\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 4\mathcal{L}\{x\} = 0$$

அல்லது $s^2\xi - 5s + 2(s\xi - 5) + 4\xi = 0$ இதில் $\mathcal{L}\{x\} = \xi$

அல்லது $(s^2 + 2s + 4)\xi = 5s + 10$

$$\xi = \frac{5s + 10}{s^2 + 2s + 4} = \frac{5(s+2)}{(s+2)^2} = \frac{5}{s+2}$$

$\mathcal{L}^{-1}\{\xi\} = x = 5e^{-2t}$ – தேவையான தீர்வு

(2) ஒரு E வோல்ட் மின் கலத்துடன், தன் மின் தூண்டல் எண் H ஹென்றி கொண்ட ஒரு கம்பிச் சுருளும், மின் தேக்குத்திறன் C பேரட் கொண்ட ஒரு மின் தேக்கியும் தொடராக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. $t = 0$ நேரத்தில் மின்தேக்கியில் மின்னூட்டமும், சுற்றின் மின்னோட்டமும் சுழியாகும். $E = E_0$ ஒரு மாறிலி எனில் நேரம் $t > 0$ எனில் மின் தேக்கியில் மின்னூட்டத்தைக் காண்போம்.

தீர்வு :

t வினாடியில், மின்னோட்டம் I, மின் தேக்கியில் மின்னூட்டம் Q எனில்,

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad \rightarrow (1)$$

கம்பிச் சுருளில் மின்னழுத்த வேறுபாடு

$$= H\frac{dI}{dt} = H\frac{d^2Q}{dt^2}$$

மின்தேக்கியில் மின்னழுத்த வேறுபாடு $= \frac{Q}{C}$

கிர்ச்சாஃப் விதிப்படி, $H\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} - E = 0$

அல்லது

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{HC} - \frac{E}{H} = 0 \qquad \rightarrow (2)$$

$t > 0$வுக்கு வரம்பு மதிப்புகள் $Q(0) = 0,\ I(0) = 0,\ Q'(0) = 0.\ E = E_0.$

$\mathcal{L}\{Q\} = q$ எனக்கொண்டு

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Q}{dt^2}\right\} = s^2\mathcal{L}\{Q\} - sQ(0) - Q'(0) = s^2q - 0 - 0 = s^2q$$

சமன்பாடு (2) இன் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் காண,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Q}{dt^2}\right\} + \frac{1}{HC}\mathcal{L}\{Q\} = \frac{E_0}{H}\mathcal{L}\{1\}$$

$$s^2q + \frac{q}{HC} = \frac{E_0}{Hs}$$

$$q\left(s^2+\frac{1}{HC}\right)=\frac{E_0/H}{s}$$

$$q=\frac{E_0/H}{s\left(s^2+\frac{1}{HC}\right)}$$

$$q=\frac{E_0C}{s}-\frac{CE_0s}{s^2+\frac{1}{HC}}=CE_0\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\frac{1}{HC}}\right\}$$

நேர்மாறு லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் காண

$$Q=\mathcal{L}^{-1}\{q\}=CE_0\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{HC}}\right\}\right]=CE_0\left\{1-cos\frac{t}{\sqrt{HC}}\right\}$$

இதுவே மின் தேக்கியில் அமையும் மின்னூட்டமாகும்.

பயிற்சி 3.4

கீழ்க்கண்டவற்றின் லாப்லாஸ் நிலைமாற்றங்களைக் காண்க.

1) $1+t^2+t^3$ விடை $\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^4}$

2) t^3e^{-2t} விடை $\frac{6}{(s+2)^4}$

3) $f(t)=\begin{cases} t^2, & 0<t<2 \\ t-1, & 2<t<3 \\ 7, & t>3 \end{cases}$

விடை $\frac{2}{s^3}-\frac{e^{-2s}}{s^3}(2+3s+3s^2)+\frac{e^{-3s}}{s^2}(5s-1)$

4) $t\cos t$ விடை $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

5) $t\sin^2 3t$ விடை $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{s^2-36}{(s^2+36)^2}\right]$

6) $t^2e^{-2t}\cos t$ விடை $2\frac{(s^3+10s^2+25s+22)}{(s^2+4s+5)^3}$

7) $\frac{1}{t}(1-e^{t})$ விடை $\log\frac{s-1}{s}$

8) $\frac{1}{t}(e^{-t}\sin t)$ விடை $\cot^{-1}(s+1)$

9) $\int_0^\infty te^{-2t}\sin t\,dt$ விடை $\frac{4}{25}$

10) கால வட்டச் சார்பு (Periodic function)

$f(t)=e^{t}.\ 0<t<2\pi$ விடை $\frac{e^{2(1-s)\pi}-1}{(1-s)(1-e^{-2\pi s})}$

11) $f(t)=t,\quad 0<t<c$

$=2c-t,\quad c<t<2c$ விடை $\frac{1}{s^2}\tan h\frac{cs}{2}$

12) மதிப்பிடுக. $a)\ \int_0^\infty te^{-4t}\sin t\,dt$ விடை 8/289

$b)\ \int_0^\infty \frac{sin^2 t}{t^2}dt$ விடை $\frac{i5}{2}$

கீழ்க்கண்டவற்றின் நேர்மாறு லாப்லாஸ் நிலைமாற்றம் காண்க.

13) $\frac{3s-8}{4s^2+25}$ விடை $\frac{3}{4}\cos\frac{5t}{2}-\frac{4}{5}\sin\frac{5t}{2}$

14) $\frac{1}{4s}+\frac{16}{1-s^2}$ விடை $\frac{1}{4}-\ 16\sin ht$

15) $\frac{s}{2s^2-1}$ விடை $\frac{1}{2}\cos h\frac{t}{2}$

16) $\frac{s^2+4}{s^2+9}$ விடை $\frac{-5}{3}$si n $3t+1$

17) $\frac{s-4}{4(s-3)^2+16}$ விடை $\frac{1}{4}\ e^{3t}\cos 2t-\frac{1}{8}e^{3t}\sin 2t$

18) $\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$ விடை $-\sin t.u\ (t-\pi)$

19) $\log\left(1+\frac{w^2}{s^2}\right)$ விடை $-\frac{2}{t}\cos wt+2$

20) $\frac{1}{(s-2)\,(s^2+1)}$ விடை $\frac{1}{5}\ e^{2t}-\frac{1}{5}\cos t-\frac{2}{5}\sin t$

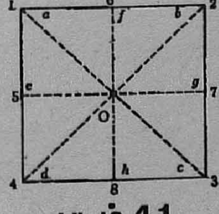
4. குலங்களின் கொள்கை (Group Theory)

4.1 நிலைமாற்றங்களின் குலங்கள் (Groups of transformations)

முன்னுரை

ஒரு பொருளின் சுழற்சி, ஆடியில் பிரதிபலிப்பு, வரிசை மாற்றம் (permutation), இடப்பெயர்ச்சி போன்ற நிலைமாற்றங்களின் குலங்கள் இயற்பியல் அறிஞர்களின் ஆர்வத்தைத் தூண்டக்கூடியவையாகும். ஒரு பொருளின் நிலைமாற்றமானது, அப்பொருளின் தோற்றத்தில் எந்தவித மாற்றத்தையும் காட்டவில்லையெனில், அத்தகைய நிலைமாற்றம் சமச்சீர் (Symmetry) நிலைமாற்றம் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வட்டத்தில், அதன் தளத்திற்குக் குத்தாக, அதன் மையத்தின் வழியாக அமையும், அச்சைப் பற்றிய ஏதேனும் ஒரு சுழற்சியானது வட்டத்தின் சமச்சீர் நிலைமாற்றமாகும். இதேபோல் இரட்டை அணு மூலக்கூறில், அணுக்களின் இடமாற்றம் சமச்சீர் நிலைமாற்றமாகிறது.

ஒரு பொருளில் ஏற்படும் இத்தகைய சமச்சீர் நிலைமாற்றங்களைத் தொகுத்து அதனை ஒரு குலமாகக் (Group) கருதலாம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சதுரத்தின் நிலைமாற்றங்களைக் கருதலாம். படத்தில் காட்டியபடி ஒரு அட்டையில் வெட்டி எடுக்கப்பட்ட சதுரத்தைக் கருதுவோம். சதுரத்தின் மூலைகளை a,b,c,d எனவும் சதுரத்தின் ஓரங்களின் மையப் புள்ளிகளை e,f,g,h எனவும் மையப்புள்ளியை 0 எனவும் குறிப்போம். இச்சதுரத்தை ஒரு வெள்ளைத்தாளின் மேல் வைத்து மேற்கண்ட புள்ளிகளைத் தாளில் முறையே 1,2,3……8 எனக் குறிப்போம்.



படம் 4.1

இப்போது சதுரத்தை 0வின் வழியாகச் சதுரத்தின் தளத்திற்குக் குத்தாக அமையும் அச்சைப் பற்றி 90° சுழற்றினால், குறியீடுகளின் மாற்றத்தைத் தவிர சதுரத்தில் எந்தவித மாற்றத்தையும் காண முடியாது. சதுரத்தின் இச்சுழற்சியை ஒரு சமச்சீர் நிலைமாற்றம் எனலாம். இதேபோல் சதுரத்தின் வேறுசில சமச்சீர் நிலைமாற்றங்களையும் நாம் காண்பதற்கு முன்னால், சதுரத்தின் சுழற்சியைப் பற்றிய சில விளக்கங்களைக் காண்போம்.

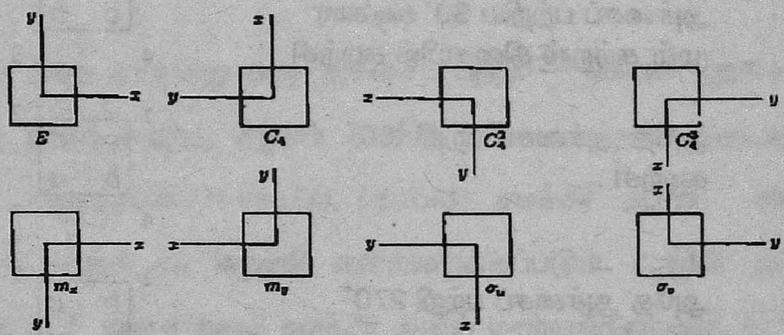
சதுரத்தை ஏதாவது ஒரு அச்சைப் பற்றி $\frac{2\pi}{n}$ கோண அளவு (n ஒரு நேர் முழு எண்) சுழற்ற, சதுரம் சமச்சீர் நிலைமாற்றம் அடையுமானால் அவ்வச்சு, சதுரத்தின் n–மடிப்பு (n-fold) சமச்சீர் அச்சு எனப்படும். இத்தகைய சுழற்சி c_n சுழற்சி என்றழைக்கப்படும். c_nஇன் முழு எண் மடங்குகள் ${c_n}^k$ அனைத்தும் சமச்சீர் நிலை மாற்றங்களாகும். ${c_n}^k$ ஆனது c_n சுழற்சி, k தடவைகள் அடுத்தடுத்து நிகழ்வதைக் குறிக்கும், அல்லது சதுரமானது அச்சைப் பற்றி $\frac{2\pi k}{n}$ கோணம் சுழற்றப்படுவதைக் குறிக்கும். சதுரம் மாற்றப்படாமல் ஒரே நிலையில் இருப்பது முற்றொருமை (identify) நிலைமாற்றம் என்றும் குறிப்பிடப்படும். இம்மாற்றம் E எனப்படும்.

சதுரம் ஒரு ஆடியில் பிரதிபலிப்படைவதால் ஏற்படும் சமச்சீர் நிலை மாற்றங்கள், ஆடியின் அமைப்புக்குத் தக்கவாறு m அல்லது σ என்று கீழ்க் குறியீட்டுடன் (subscript)குறிப்பிடப்படும். இத்தகைய, சதுரத்தின் அனைத்துச் சமச்சீர் நிலைமாற்றங்களையும் கீழ்க்கண்டவாறு விபரமாக அறிவோம்.

அட்டவணை 1.1 சதுரத்தின் சமச்சீர் நிலைமாற்றங்கள்

குறியீடு (symbol)	செயல் (operation)	முடிவுகள் (results)
E	முற்றொருமை	1 2 a b d c 4 3
C_4	தளத்திற்குக் குத்தாக மையப்புள்ளி 0 வழியான அச்சைப் பற்றிய 90° கடிகார முள் சுற்றும் திசையில் சுழற்சி	1 2 d a c b 4 3
${c_4}^2$	அதே அச்சைப் பற்றி 180° சுழற்சி	1 2 c d b a 4 3
${c_4}^3$	அதே அச்சைப் பற்றி 270° சுழற்சி	1 2 b c a d 4 3
m_x	5–7 கோட்டில் தளத்திற்குக் குத்தாக அமையும் ஆடியில் பிரதிபலிப்பு	5 d c 7 a b
m_y	6–8 கோட்டைப் பற்றிய பிரதிபலிப்பு	6 b a c d 8
σ_u	1–3 கோட்டைப் பற்றிய பிரதிபலிப்பு	1 a d b c 3
σ_v	2–4 கோட்டைப் பற்றிய பிரதிபலிப்பு	2 a d b c 4

மேற்கண்ட 8 விதச் சமச்சீர் நிலைமாற்றங்களும் சதுரத்தின் அனைத்து நிலைமாற்றங்களையும் உள்ளடக்கியுள்ளன. மேற்கண்ட மாற்றங்களில், சதுரத்தின் ஓரங்களுக்கு இணையாக அமையும் x மற்றும் y அச்சுகளின் அமைப்பு படம் 4.2இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. சதுரம் சுழற்றப்படும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் அச்சுத் தொகுதி சுழல்வதாகத் தோன்றும்.



படம் 4.2

அட்டவணை 1.1இல் காட்டப்பட்ட அனைத்து நிலைமாற்றங்களும் கொண்ட குலம் சதுரத்தின் சமச்சீர் நிலைமாற்றக் குலம் எனப்படும்.

4.2 குலம் (Group) - வரையறை

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) முழு எண் கணம் $I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ஐக் கருதுவோம். இதன் சில பண்புகளை ஆராய்வோம்.

a) இக்கணத்தின் ஏதேனும் இரு எண்களின் கூட்டுத் தொகை இதே கணத்தில் அமையும் ஒரு எண்ணாகும். இது அடங்கும் பண்பு (closure property) எனப்படும்.

b) I இல் சுழி ஒரு எண்ணாகும். இதன் தன்மையானது Iஇல் அமையும் m என்ற $(m \epsilon I)$ எந்த ஒரு எண்ணுடனும் இதன் கூட்டல் $m + 0 = 0 + m = m$ என அமையும். 0 ஆனது கூட்டலைப் பொருத்த முற்றொருமை உறுப்பு (identity) எனப்படும்.

c) I கணத்தில் அமையும் எந்த ஒரு எண் mக்கும் அதே கணத்தில் அமையும் n என்ற மற்றொரு எண் உண்டு. அவை $n + m = n + m = 0$ ஆகும். இதில் $n = -m$, n ஆனது mஇன் நேர்மாறு (inverse) எனப்படும்.

d) I கணத்தில் அமையும் ஏதேனும் மூன்று எண்கள் n, m, pஐக் கருதுவோம். இவை $m + (n + p) = (m + n) + p$ என அமையும். இது சேர்ப்பு (associative) விதி எனப்படும்.

(2) மற்றொரு கணத்தைக் கருதுவோம். $U(n)$ எனப்படும் அனைத்து n அணித்தரச் செங்குத்து அலகு அணிகளின் (Unitary matrices) கணம். இதில் n ஒரு நேர் முழு எண்ணாகும். இவற்றின் பண்புகள் $(a) U, V$ என்பன இரு n அணித்தர அணிகள். அவற்றின் பெருக்கல் பலன் UV என்பது அதே கணத்தில் அடங்கும் n அணித்தர அணியாகும். (b) இக்கணத்தில், E என்பது அலகு அணி (Unit matrix) என்க. இதன் பண்பு $EU = UE = U$ ஆகும். $(U \in U(n))$ $(c) U$ என்ற ஒரு உறுப்புக்கு Vஎன்ற உறுப்பு $UV = VU = E$ என அமைகின்றது. (d) U, V, W என்பன ஏதேனும் மூன்று உறுப்புகள் எனில் $U(VW) = (UV)W$

மேற்கண்ட இரு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் காணும் பண்புகள் ஒரு குலத்தைத் தீர்மானிக்கின்றன. மேலும் ஒரு குலம் $G \equiv \{\in, A.B, C \ldots\}$ எனப்படுவது வெவ்வேறு (distinct) உறுப்புகளின் கணமாகும். உறுப்புகளுக்கிடையே கூட்டல், பெருக்கல், அணிப்பெருக்கல் போன்ற ஏதேனும் ஒரு இணைப்பு விதி வரையறுக்கப்படுகிறது. பொதுவாக ஒரு குலம் எனப்படுவது கீழ்க்கண்ட நான்கு பண்புகளைப் பெற்றிருக்க

வேண்டும். அவை குலத்தை வரையறுக்கும் வெளிப்படை உண்மைகள் (Axioms) ஆகும்.

a) வரையறுக்கப்பட்ட இணைப்பு விதியின் படி, குலம் Gஇல் அடங்கிய A, B என்ற ஏதேனும் இரு உறுப்புகளின் இணைப்பு அதே குலத்தைச் சேர்ந்த வேறொரு உறுப்பாக அமைய வேண்டும். இதை $A, B \in G$ எனில் $A.B \in G$ எனலாம். புள்ளியானது இணைப்பு விதியைக் குறிக்கிறது. இதனை $A, B \in G \ \forall \ A.B \in G$ எனவும் எழுதலாம். இப்பண்பினை அடங்கும் பண்பு (Closure property) எனலாம்.

b) ஒவ்வொரு குலத்திலும் முற்றொருமை உறுப்பு (எண் கணிதத்தில் 1க்கு இணையானது) $E \in G$ அமையும். இது அனைத்து உறுப்புகள் $A \in G$ க்கும் $E.A = A.E = A$ என அமையும்.

c) ஒவ்வொரு உறுப்பு $A \in G$க்கும் மற்றல்லாத ஒரே ஒரு உறுப்பு $B \in G$ $A.B = B.A = E$ என அமையும். இதில் B ஆனது Aக்கு நேர்மாறு (Inverse) எனவும் Bக்கு A நேர்மாறு எனவும் வழங்கப்படும்.

d) சேர்ப்பு விதியின் படி $A, B, C \in G$க்கு $A.(B.C) = (A.B).C$ ஆகும். அதாவது $A.(B.C) = (A.B).C \ \forall \ A, B, C \in G$. $A.B$ என்பதைப் புள்ளி இல்லாமல் AB எனவும் எழுதுவர்.

4.3 குலங்களின் எடுத்துக்காட்டுகள்

1. இரண்டாம் வரிசை (Order of two) குலம், மெய் எண்கள் +1, −1 ஆகியவற்றின் குலமாகும். இதில் இணைப்பு விதி பெருக்கலாகும்.

2. பெருக்கல் விதிக்கு உட்பட்ட நான்காம் வரிசை குலம் $\{1, i, -1, -i\}$

3. கூட்டல் விதிக்கு உட்பட்ட தனித்தனி முடிவிலி குல்ம் அனைத்து மெய் முழு எண்களும் கொண்டதாகும். இதில் முற்றொருமை உறுப்பு, சுழியாகும்.

4. கூட்டல் விதிக்கு உட்பட்ட தொடர்ச்சி முடிவிலிகுலம், அனைத்து மெய் எண்களின் குலமாகும். முற்றொருமை எண் 0. இதில் எண் bஇ ன் நேர்மாறு $-b$ ஆகும்.

5. சுழியைத் தவிர்த்த அனைத்து நேர் மெய் எண்களின் குலம் பெருக்கல் விதிக்கு உட்பட்டது. முற்றொருமை உறுப்பு 1. x என்ற எண்ணின் நேர்மாறு $\frac{1}{x}$ ஆகும்.

6. முதல் வரிசை குலம் எண் ஒன்று (1) மட்டும் அடங்கியதாகும்.பெருக்கல் பலனுக்கு உட்பட்டது.

7. பெருக்கலுக்கு உட்பட்ட $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ கொண்ட குலம் இரண்டாம் வரிசைக் குலமாகும்.

8. பெருக்கலுக்கு உட்பட்ட, அனைத்து n அணித்தரப் பூச்சியமில் கோவை (Non-singular) சதுர அணிகளும் கொண்ட குலம்.

9. கூட்டலுக்கு உட்பட்ட அனைத்து m x n அணித்தர அணிகளும் ஒரு குலமாகும். இதில் முற்றொருமை உறுப்பு m x n அணித்தர முற்றும் பூச்சிய அணியாகும் (null matrix). உறுப்பு Aஇன் நேர்மாறு $(-A)$.

ஒரு குலத்திலுள்ள உறுப்புகள் எப்போதும் பரிவர்த்தனைக்கு உட்பட்டதாக (Commutative) இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. அதாவது $AB \neq BA$ அவ்வாறல்லாமல் பரிவர்த்திப்பவையாக $AB = BA$ என இருக்குமானால் அக்குலம் ஏபெலின் குலம் (Abelian group) எனப்படும்.

4.4 பெருக்கல் அட்டவணை

c_{4v} எனப்படும் சதுரத்தின் சமச்சீர் நிலைமாற்றக் குலத்திற்கு, $c_4 m_x = \sigma_u$, $\sigma_u c_4^3 = m_y$, $\sigma_u \sigma_v = c_4^2$ என்பது போன்ற அடுத்தடுத்து நிகழும் இரு செயல்கள் வேறொரு செயலுக்குச் சமமாகும் என்பதை ஒரு

அட்டவணையில் காட்டலாம். இது குலப்பெருக்கல்அட்டவணை (Group multiplication table) எனப்படும்.

அட்டவணை – குலம் c_{4v}க்கு

முதலாவது செயல்

இரண்டாவது செயல்	E	c_4	c_4^2	c_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
E	E	c_4	c_4^2	c_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
c_4^3	c_4^3	E	c_4	c_4^2	σ_v	σ_u	m_x	m_y
c_4^2	c_4^2	c_4^3	E	c_4	m_y	m_x	σ_v	σ_u
c_4	c_4	c_4^2	c_4^3	E	σ_u	σ_v	m_y	m_x
m_x	m_x	σ_v	m_y	σ_u	E	c_4^2	c_4^3	c_4
m_y	m_y	σ_u	m_x	σ_v	c_4^2	E	c_4	c_4^3
σ_u	σ_u	m_x	σ_v	m_y	c_4	c_4^3	E	c_4^2
σ_v	σ_v	m_y	σ_u	m_x	c_4^3	c_4	c_4^2	E

ஒரு தொடர் செயல் ABCஇல் முதலாவது செயல் C, அடுத்தது B, மூன்றாவது A அதாவது செயல்கள் ஒவ்வொன்றாக வலமிருந்து இடம் நோக்கிச் செயல்பட வேண்டும்.

பெருக்கல் அட்டவணையிலிருந்து அடுத்தடுத்து நடக்கும் இரு செயல்களின் பலனைக் கண்டறிய அட்டவணையின் நிரலில் (Column) இருந்து முதலாவது செயலையும் வரிசை (Row) யிலிருந்து இரண்டாவது செயலையும் இணைத்துக் கண்டறிய வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக c_4m_x என்ற செயலின் பயனைக் காண, m_xஇன் நிரலையும் c_4இன் வரிசையையும் இணைக்கும் பொதுவான செயல் σ_u எனக் கண்டறிய வேண்டும்.

அட்டவணையில் முதலாவது வரிசையையும், முதலாவது நிரலையும் குலத்தின் உறுப்புகளைக் கொண்டு எந்தக் கிரமத்தில் வேண்டுமானாலும் அமைக்கலாம். ஆனால் வசதிக்காக வரிசையில் அமையும் ஒரு செயல் அதற்கு இணையான நிரலில் அமையும் செயலுக்கு நேர்மாறாக இருக்குமாறு அமைத்தால் அட்டவணையின் முதன்மை மூலைவிட்ட (prinicipal diagonal)த்தில் முற்றொருமை உறுப்பு (identify element) வரிசையாக அமையும்.

அட்டவணை 1.1இல் காட்டப்பட்ட, சதுரத்தின் சமச்சீர் நிலை மாற்றங்கள் ஒரு குலத்தினை உருவாக்குமா என்பதை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் ஆராயலாம்.

a) $\sigma_u c_4 \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$

இக்குறியீடு, சதுரத்தில் c_4 செயலுக்குப் பிறகு σ_u செயல்படுகிறது என்பதைக் குறிக்கும்.

$i)\ \sigma_u c_4 \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \sigma_u \begin{bmatrix} d & a \\ c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ a & b \end{bmatrix}$ எனலாம்.

$ii)\ m_x \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ a & b \end{bmatrix}$ இவ்விரு செயல்களும் ஒரே முடிவைக் கொடுக்கின்றன. எனவே $\sigma_u c_4 = m_x$ இது உறுப்புகளின் அடங்கும் பண்பைக் குறிக்கும்.

b) $E m_y \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} b & a \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ c & d \end{bmatrix}$

$m_y E \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = m_y \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ c & d \end{bmatrix}$

$m_y \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ c & d \end{bmatrix}$

$E m_y = m_y E = m_y$ எனத் தெரிகிறது. இதில் E முற்றொருமை உறுப்பாகும்.

c) $C_4^3 C_4 \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ d & c \\ \hline \end{array} = C_4^3 \begin{array}{|cc|} \hline d & a \\ c & b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ d & c \\ \hline \end{array}$

$C_4 C_4^3 \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ d & c \\ \hline \end{array} = C_4 \begin{array}{|cc|} \hline b & c \\ a & d \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ d & c \\ \hline \end{array}$

$E \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ d & c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ d & c \\ \hline \end{array}$ இம்மூன்று செயல்களும் ஒரே முடிவைக் கொடுக்கின்றன. எனவே $C_4^3 C_4 = C_4 C_4^3 = E$ இதில் C_4^3க்கு C_4நேர்மாறு, C_4க்கு C_4^3 நேர்மாறாகும்.

d) சேர்ப்பு விதி

$c_4(m_x \sigma_u) = (c_4 m_x)\ \sigma_u$ எனக்காட்டுவோம்.

பெருக்கல் அட்டவணையிலிருந்து $m_x \sigma_u = c_4^3$

எனவே $c_4(m_x \sigma_u) = c_4 c_4^3$

$$c_4 c_4^3 \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ d & c \\ \hline \end{array} = c_4 \begin{array}{|cc|} \hline b & c \\ a & d \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ d & c \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow (1)$$

இப்போது $c_4 m_x = \sigma_u$, பெருக்கல் அட்டவணைப்படி.

எனவே $(c_4 m_x)\sigma_u = \sigma_u \sigma_u$

$$\sigma_u \sigma_u \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ d & c \\ \hline \end{array} = \sigma_u \begin{array}{|cc|} \hline a & d \\ b & c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ d & c \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow (2)$$

(1) மற்றும் (2) இல் இருந்து சேர்ப்புவிதி நிரூபிக்கப்படுகிறது.

எனவே ஒரு சதுரத்தின் சமச்சீர் நிலைமாற்றங்கள் ஒரு குலமாக அமைகின்றன.

4.5 குலங்களின் வகைகள்

ஒரு குலத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, குலத்தின் வரிசை (Order of the group) எனப்படும். குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்ட குலம், முடிவுறு குலம் (finite group) எனப்படும்.

முடிவிலா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்ட குலம் முடிவிலி குலம் (infinite group) எனப்படும். முடிவிலி குலம் மேலும் இரு வகைகளாகப் பிரிக்கப்படும். எண்ண முடியாத அளவு தனித்தனி உறுப்புகளைக் கொண்ட குலம், தனித்தனி குலம் (Discrete group) எனப்படும். உறுப்புகள் பிரித்தறிய முடியாத அளவு முடிவிலியானால் அது தொடர்ச்சி குலம் (continuous group) எனப்படும்.

4.6 வரிசை மாற்றி அமைத்தல் தேற்றம் (The Rearrangement theorem)

பெருக்கல் அட்டவணைப்படி ஒவ்வொரு நிரலிலும் (அல்லது வரிசையிலும்) குலத்தின் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு முறை மட்டுமே காணப்படும். இதேபோல் ஒவ்வொரு வரிசை (அல்லது நிரலில்) யிலும்உறுப்புகளின் அமைப்பானது மற்றொரு வ்ரிசை (அல்லது நிரலில்)யிலிருந்து மாறுபட்டிருக்கும். இதுவே வரிசை மாற்றி அமைத்தல் தேற்றம் எனப்படும்.

முதலில் ஒவ்வொரு வரிசை (அல்லது நிரலில்)யிலும் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு முறை மட்டுமே அமையும் எனக் காட்டுவோம்.

உறுப்பு Aஇன் நிரலில் D என்ற உறுப்பு இருமுறை அமைவதாகக் கற்பனையாகக் கொள்வோம். அப்படியானால் முதல் நிரலில் அமையும் B மற்றும் C என்ற இருவேறு உறுப்புகளுக்கு $BA = D$ மற்றும் $CA = D$ என இருக்கும். இவற்றை வலப்புறம் A^{-1}ஆல் பெருக்க,

$BAA^{-1} = DA^{-1}$ அதாவது $B = DA^{-1}$

$CAA^{-1} = DA^{-1}$ அதாவது $C = DA^{-1}$ $[\because AA^{-1} = I]$

இதிலிருந்து $B = C$ எனத் தெரிகிறது. ஆனால் ஒரே உறுப்பு முதல் நிரலில் இருமுறை அமையாது. எனவே Aஇன் நிரலில் D என்ற உறுப்பு இருமுறை அமைய முடியாது.

இதே விவாதத்தைக் கொண்டு ஒரே உறுப்பு ஒரு வரிசையில் இருமுறை அமைய முடியாது எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

எனவே ஒரு வரிசையிலோ அல்லது நிரலிலோ ஒரே உறுப்பு இருமுறையோ அல்லது அதற்குமேலோ அமையாது என்பதாலும், ஒவ்வொரு வரிசை அல்லது நிரலை நிரப்பும் இடங்கள் குலத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருப்பதாலும், ஒவ்வொரு வரிசை (அல்லது நிரலில்)யிலும் உறுப்புகளின் அமைப்பு மாறுபட்டிருக்கும்.

4.7 முடிவுறு குலத்தின் பிறப்பிப்பான்கள் (Generators of a finite group)

தமக்குள் சில தொடர்புகளைக் கொண்ட சில உறுப்புகளைக் கொண்டு ஒரு குலத்தின் அனைத்து உறுப்புகளையும் உருவாக்கலாம்.

மிகச்சில உறுப்புகளின் கணத்திலிருந்து அவற்றின் அடுக்கு (power) மற்றும் பெருக்கல் பலன் (product) ஆகியவற்றைக் கொண்டு ஒரு குலத்தை உருவாக்குவதாகக் கருதுவோம். அத்தகைய கணமானது குலத்தின் பிறப்பிப்பான் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு –1

A என்ற ஒற்றை உறுப்பைக் கொண்டு $A^n = E$ என்ற தொடர்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு குலத்தை உருவாக்குவோம். n என்பது மிகச்சிறிய நேர்முழு எண்ணாகும்.

A என்பது குலத்தின் ஒரு உறுப்பு. இதன் முழு எண் அடுக்குகள் அனைத்தும் இக்குலத்தின் உறுப்புகளாகும். பிறப்பிக்கப்படும் உறுப்புகள் $A^2, A^3, \ldots$ இத்தொடர் $A^n = E$ இல் முடியும். இதற்கு மேலமையும் அடுக்குகள் புதிய உறுப்புகளை உருவாக்குவதில்லை. ஏனெனில் $A^{n+k} = A^n A^k = EA^k = A^k, k < n$. எனவே உருவாக்கப்பட்ட குலம் $(A, A^2, A^3, \ldots A^{n-1}, A^n = E)$ இது n வரிசை (n^{th} order) குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு –2

A மற்றும் B என்ற இரண்டு உறுப்புகளையும்,

$A^2 = B^3 = (AB)^2 = E$ → (1)

என்ற தொடர்பையும் பயன்படுத்தி ஒரு குலத்தை உருவாக்கலாம்.

$$A^3 = A^2A = EA = A$$

$$B^4 = B^3B = EB = B$$

இவ்வாறே A மற்றும் Bஇன் உயர் அடுக்குகள் புதிய உறுப்புகளை உருவாக்குவதில்லை. இக்குலத்தில் E, A, B, B^2 உறுப்புகளாகும். மேலும் A, B, B^2இன் பெருக்கல் பலன்களும் இக்குலத்தின் உறுப்புகளாகும். $AB \neq BA$ எனில் AB மற்றும் BA புதிய உறுப்புகளாகும். $AB \neq BA$ என்பதை நிரூபிக்க $(AB)^2 = E$ஐக் கருதுவோம். ...... (1) இன் படி

$$E = (AB)^2 = AB.AB = A(BA)B$$

$AB = BA$ எனக் கொண்டால், $E = A(BA)B = A(AB)B = A^2B^2 = B^2$ $(\because A^2 = E)$ ஆனால் $E \neq B^2$, எனவே $AB = BA$ என்ற கற்பனை தவறானது. $AB \neq BA$ ஆகும்.

எனவே பிறப்பிக்கப்பட்ட குலம் $\{E, A, B, B^2, AB, BA\}$ ஆகும். இக்குலம் பெருக்கல் விதிக்கு உட்பட்டது. இக்குலமானது குலத்தை வரையறுக்கும் வெளிப்படை உண்மை (Axioms)களுக்குக் கட்டுப்பட்டது என்று காட்டுவோம்.

$i)$ $(AB)B$ ஐக் கருதுவோம். → (2)

(1) இல் இருந்து $(AB)^2 = E$

$$(AB)(AB) = E$$

$AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\rightarrow (3)$

(1) இல் இருந்து $A^2 = E$ எனவே $A = A^{-1}$ $\rightarrow (4)$

மேலும் $B^3 = E$ எனவே $B^2 = B^{-1}$ $\rightarrow (5)$

(4) மற்றும் (5)ஐ (3) இல் பிரதியிட, $AB = B^2A$

(2) இல் பிரதியிட,

$$(AB)B = (B^2A)B = B^2(AB) = B^2B^2A = B^3BA = BA$$

$(\because B^3 = E)$

BA குலத்தின் உறுப்பாகும். இது அடங்கும் பண்பைக் குறிக்கிறது.

ii) நேர்மாறு காண B^2 ஐக் கருதுவோம்.

$B^2B = B^3 = E$ எனவே B^2க்கு நேர்மாறு B ஆகும்.

iii) E ஒரு முற்றொருமை உறுப்பு

iv) சேர்ப்பு விதியை நிரூபிக்க A, AB மற்றும் B^2 ஐக் கருதுவோம்.

$$A(AB\,B^2) = A(AB^3) = AA = A^2 = E \quad (\because B^3 = E)$$

$$(AAB)B^2 = \left(A^2B\right)B^2 = BB^2 = B^3 = E \quad (\because A^2 = E)$$

எனவே $A(AB\,B^2) = (AAB)B^2$

எனவே பிறப்பிக்கப்பட்ட குலம் $\{E, A, B, B^2, AB, BA\}$ ஆகும். ஒரே குலத்தை வெவ்வேறு பிறப்பிப்பான்களைக் கொண்டும் உருவாக்கமுடியும். எடுத்துக்காட்டாக மேற்கண்ட குலத்தை (A, B), $\left(A, B^2\right), (A, AB), (B, AB)$ போன்ற பிறப்பிப்பான்களைக் கொண்டும் உருவாக்க முடியும்.

4.8 இணையிய உறுப்புகள் மற்றும் இனங்கள் (Conjugate elements and classes)

ஒரு குலத்தின் உறுப்புகள் A, B, C என்போம். அவற்றிற்கிடையேயான ஒரு தொடர்பு $A^{-1}BA = C$ என்க. B க்கும் C க்கும் இடையே இத்தகைய தொடர்பு இருக்குமானால் B யும் C யும் ஒன்றுக்கொன்று இணையிய உறுப்புகள் (Conjugate elements) எனப்படும். மேற்கண்ட தொடர்பு வடிவொப்புமை நிலைமாற்றம் (Similarity Transformation) எனப்படும்.

மேற்கண்ட தொடர்பு $A^{-1}BA = C$யிலிருந்து வல மற்றும் இடப்புறங்களில் A^{-1} மற்றும் A ஆல் பெருக்க,

$$A(A^{-1}BA)A^{-1} = ACA^{-1}$$

$$AA^{-1}BAA^{-1} = ACA^{-1}$$

$$B = ACA^{-1} \qquad (\because AA^{-1} = E)$$

வடிவொப்புமை நிலைமாற்றத்தைச் சதுரத்தின் C_{4v} குலத்திற்குப் பயன்படுத்துவோம்.

m_x உறுப்பை C_4 ஐக் கொண்டு வடிவொப்புமை நிலைமாற்றம் செய்யலாம். பெருக்கல் அட்டவணைப்படி C_4 ம் C_4^3ம் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறானவை. எனவே $C_4^{-1}m_xC_4 = C_4^3m_xC_4$ எனலாம். அட்டவணையிலிருந்து $m_xC_4 = \sigma_v$ ஆகும். எனவே $C_4^3m_xC_4 = C_4^3\sigma_v = m_y$ (அட்டவணையிலிருந்து) எனவே m_x மற்றும் m_y இணையிய உறுப்புகளாகும்.

இதேபோல், B என்ற உறுப்பு C க்கு இணையிய உறுப்பு என்க. B ஆனது D க்கும் இணையிய உறுப்பு எனில், Cயும் Dயும் இணையிய உறுப்புகளாகும். மேலும் B, C, D ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று இணையிய உறுப்புகளாகும்.

C_{4v} குலத்தில் ஏதாவது மூன்று உறுப்புகளைக் கொண்டும் இதனை நிரூபிக்க முடியும்.

எனவே ஒரு குலத்தை, இணையிய உறுப்புகளின் கணங்களாகப் பிரிக்கலாம். ஒரே கணத்தின் உறுப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையிய உறுப்புகளாக இருக்கும். அதே நேரத்தில் ஒரு கணத்தின் உறுப்பும் மற்றொரு கணத்தின் உறுப்பும் ஒன்றுக்கொன்று இணையிய உறுப்புகளாக அமைவதில்லை. அத்தகைய கணங்கள் இணையிய இனங்கள் அல்லது ஒரு குலத்தின் இனங்கள் (classes) எனப்படும். ஒவ்வொரு குலத்திலும் முற்றொருமை உறுப்பு (E) ஒரு தனியான இனத்தைச் சேர்ந்ததாகும். ஏனெனில் எந்த ஒரு உறுப்பையும் பயன்படுத்தி $A^{-1}EA = E$ என நிரூபிக்கலாம்.

C_{4v} குலத்தின் இணையிய உறுப்புகளின் இனங்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு வகைப்படுத்தலாம். அவையாவன,

$$(E), (C_4, C_4^3), (C_4^2), (m_x, m_y), (\sigma_u, \sigma_v)$$

மேலும் ஒரு பொருளின் சுழற்சி (rotation) நேர்மாறு (inversion) போன்ற நிலைமாற்றங்களின் குலத்தில் இணையிய இனங்களைப்பெரிய கணக்கீடுகள் இல்லாமல் சில விதிமுறைகளைக் கொண்டு கண்டறிய முடியும். அவையாவன,

i) ஒரு பொருளின் வெவ்வேறு கோண சுழற்சிகள் வெவ்வேறு இனங்களைச் சார்ந்ததாகும். எடுத்துக்காட்டாக C_{4v} குலத்தின் C_4 மற்றும் C_4^2 வெவ்வேறு இனங்களில் அடங்கும்.

ii) ஒரு அச்சைப் பற்றி ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்தில் வலஞ்சுழி மற்றும் இடஞ்சுழி சுழற்சிகள் ஒரே இனத்தைச் சேரும். இதில், அச்சின் திசையை எதிர்ப்புறத்தில் திருப்பும் ஒரு நிலைமாற்றம் குலத்தின் உறுப்பாக அமைய வேண்டும். C_{4v} குலத்தில்அத்தகைய உறுப்புகள் m_x அல்லது σ_u அமைவதால் C_4 மற்றும் C_4^3 ஒரே இனத்தில் அமைகின்றன. (படம் 4.2ல் காண்க)

iii) இரண்டு வெவ்வேறு அச்சுகளைக் குலத்திலுள்ள ஒரு உறுப்பைக் கொண்டு ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருந்துமாறு செய்ய முடியுமானால் அவ்வச்சுகளைப் பற்றிய சமகோணச் சுழற்சிகள் ஒரே இனத்தைச் சேரும். இதேபோல் இரண்டு வெவ்வேறு தளங்களின் பிரதிபலிப்புகள் ஒரே இனத்தைச் சேருவதற்கான நிபந்தனையானது இரண்டு தளங்களையும் ஏதாவது ஒரு உறுப்பைக் கொண்டு ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருந்தச் செய்ய வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாகப் படம் 4.1இல் C_4செயலால் 5–7 கோட்டை 6–8 கோட்டின் மேல் பொருந்தச் செய்யலாம். எனவே m_xஉம் m_yஉம் ஒரே இனத்தைச் சேரும். ஆனால் C_{4v} குலத்தின் எந்த ஒரு உறுப்பின் செயலாலும் 1–3 கோட்டை 5–7 கோட்டின் மீது பொருந்தச் செய்ய முடியாது. எனவே σ_uவும் m_xஉம் ஒரே இனத்தில் அமையவில்லை.

4.9 இனங்களின் பெருக்கல்

இப்போது குலத்தின் இரு இனங்களைப் பெருக்கும் முறையை விவரிப்போம். ஒரு குலத்தின் $C_i = (A_1, A_2 \dots A_m)$ மற்றும் $C_j = (B_1, B_2 \dots B_n)$ என்ற இரு இனங்களைக் கருதுவோம். முறையே m மற்றும் n உறுப்புகளைக் கொண்ட இவ்வினங்களின் பெருக்கல் பலனானது,

C_iஐச் சேர்ந்த ஒவ்வொரு உறுப்பையும் கொண்டு C_jஇன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பெருக்கி அவற்றை ஒரு கணமாகக் கொள்வதாகும். இவ்வாறு

$$C_iC_j = (A_1B_1, A_1B_2, \dots \dots A_lB_k \dots \dots A_mB_n)$$

A_lB_k என்ற உறுப்பு C_iC_j கணத்தைச் சேர்ந்தது எனில் A_lB_kஇன் இணையிய உறுப்பும் அதே கணத்தைச் சோர்ந்ததாகும். இதைக் கண்டறிய,

A_lB_k என்ற உறுப்பை, குலம் Gஐச் சார்ந்த X என்ற ஏதோவொரு உறுப்பைக் கொண்டு, வடிவொப்புமை நிலைமாற்றம் செய்வோம்.

$X^{-1}A_lB_kX = (X^{-1}A_lX)(X^{-1}B_kX) = A_rB_s$ என்போம். வரையறையின் படி A_r ஆனது C_i யையும், B_s ஆனது C_jயையும் சேர்ந்தவை. எனவே A_rB_s ஆனது C_iC_j ஐச் சேர்ந்ததாகும்.

4.10 துணைக்குலங்கள் (Sub groups)

ஒரு குலம் Gஇன், சில உறுப்புகளை உள்ளடக்கியும் அதன் இணைப்பு விதி (Binary operation) க்குக் கட்டுப்பட்டும் அமையும் கணம் H , Gஇன் துணைக்குலம் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு $H = (E, C_4, C_4^2, C_4^3)$ என்ற குலம் C_{4v} இன் துணைக்குலமாகும்.

ஒரு துணைக்குலம், குலத்தை வரையறுக்கும் வெளிப்படை உண்மைகளுக்குக் (axioms) கட்டுப்பட்டது.

ஒரு குலத்தின் முற்றொருமை உறுப்பை (E) மட்டுமே கொண்ட கணம் அல்லது முதன்மை குலத்தின் அனைத்து உறுப்புகளையும் கொண்ட கணம் ஆகியனவும் துணைக் குலங்களாகக் கருதப்படும்.

ஆனால் அவை முறையற்ற துணைக் குலங்கள் (Trivial subgroups) எனப்படும்.

Gஇன் வரிசைக்குக் குறைவான வரிசை கொண்ட அதன் துணைக் குலங்கள் முறையான துணைக் குலங்கள் (proper subgroups) எனப்படும்.

4.11 வட்டக் குலங்கள் (Cyclic Groups)

ஒரு உறுப்பு Aஇன் அடுக்குகளைக் கொண்டு ஒரு குலத்தை உருவாக்கலாம். இது $(E, A, A^2, A^3, \dots)$ என்ற முடிவிலி குலமாகும். இதனை $A^n = E$ என்ற நிபந்தனையைக் கொண்டு ஒரு முடிவுறு (finite) குலமாக மாற்றலாம். இதில் n ஒரு நேர் முழு எண்ணாகும். இக்குலம் $(E, A, A^2, \dots A^{n-1})$ ஆகும். மேலும்

$$A^{n+1} = AA^n = AE = A$$

$A^{n+2} = A^2A^n = A^2E = A^2$ இவ்வாறே Aஇன் உயர் அடுக்குகள் புதிய உறுப்புகளை உருவாக்குவதில்லை. இவ்வாறு ஒற்றை உறுப்பைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் குலம் வட்டக்குலம் எனப்படும்.

அனைத்து வட்டக் குலங்களும் ஏபெலின் குலங்களாகும். ஆனால் அனைத்து ஏபெலின் குலங்களும் வட்டக் குலங்களாகாது.

4.12 கூற்றுக் கணங்கள் (cosets)

g வரிசை கொண்ட G என்ற குலத்தைக் கருதுவோம். இதன் துணைக்குலம் h வரிசை கொண்ட குலம் H என்போம். $H = (H_1 \equiv E, H_2, H_3 \dots H_h)$ இப்போது குலம் Gஇன் உறுப்பு Xஐக் கொண்டு H ஐ இடப்புறமிருந்து பெருக்கி $XH = (XE, XH_2, XH_3 \dots \dots XH_h)$ என்ற கணத்தை உருவாக்குவோம். இது Xஐப் பொருத்த, H இன் இடக்கூற்றுக் கணம் (left coset) எனப்படும்.

இப்போது இரண்டு விதமான வாதங்களை முன்வைக்கிறோம். முதலாவது, X ஆனது H இன் உறுப்பு என்க. XE, XH_2, XH_3 ... போன்ற அனைத்து உறுப்புகளும், அடங்கும் பண்பின் படி H இன் உறுப்புகளாகும். எனவே H மற்றும் XH இன் கணங்கள் சர்வசமமாகும். ஆனால் உறுப்புகளின் வரிசைமாறி இருக்கலாம்.

இரண்டாவதாக X ஆனது H இன் உறுப்பல்ல, ஆனால் Gஇன் உறுப்பு என்போம். XH_i $(1 \leq i \leq h)$என்ற உறுப்பு மேற்கண்ட முதலாவது வாதத்தின்படி H கணத்தைச் சேர்ந்தது. H_i^{-1} ஆனது H_i இன் நேர்மாறு (inverse) இதுவும் H கணத்தைச் சேர்ந்தது. இப்போது $(XH_i)H_i^{-1} = XH_iH_i^{-1} = X$. எனவே H ஒரு குலமெனில், அடங்கும் பண்பின் படி Xஉம் Hஐச் சேர்ந்ததாகும். ஆனால் இது, X ஆனது Hஐச் சேர்ந்ததல்ல என்ற நமது வாதத்திற்கு எதிரானது. எனவே கணங்கள் Hஉம் XHஉம் வெவ்வேறு உறுப்புகளைக் கொண்டவையென நிரூபிக்கப்படுகின்றன.

இதேபோல் Xஐப் பொருத்த Gயிலுள்ள, Hஇன் வலக்கூற்றுக்கணம் (right coset),

$$HX = (EX, H_2X, H_3X, \dots H_hX)$$

வலக்கூற்றுக் கணம் மற்றும் இடக்கூற்றுக் கணம் ஆகியவற்றின் அனைத்து உறுப்புகளும் முதன்மை குலம் G இன் உறுப்புகளாகும்.

4.13 துணைக்குலங்கள் பற்றிய ஒரு தேற்றம்

<u>தேற்றம்</u> g வரிசைக்குலம் Gஇன், துணைக்குலம் h வரிசை கொண்ட குலம் H, எனில் g ஆனது h இன் முழு எண் மடங்காகும். (integral multiple)

நிரூபணம்

Gஇன் துணைக்குலம் $H = (E, H_2, H_3, \dots H_h)$ என்போம். Hஐச் சேராத, Gஇன் உறுப்பு Xஐக் கொண்டு, இடக்கூற்றுக் கணம் XHஐ உருவாக்குவோம். இதன் உறுப்புகள் $XH_i \quad (1 \le i \le h)$ அனைத்தும் Hஐச் சேராதவை என நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளன. இப்போது,

$$HU(XH) = (E, H_2, H_3, \dots H_h, XE, XH_2, XH_3 \dots XH_h)$$

இந்த $2h$ உறுப்புகள் Gஇன் உறுப்புகளாகும். $2h < g$ எனில் Gயிலிருந்து Y என்ற உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து YH என்ற மற்றொரு இடக்கூற்றுக் கணத்தை உருவாக்குவோம். $YH_i(1 \le i \le \ h)$ அனைத்தும் Hஇல் இல்லாத Gஇன் உறுப்புகளாகும். ஆனால் YHஉம் XHஉம் சர்வசமமாக இருக்கலாம் என நமக்குச் சந்தேகம் உள்ளது. எனவே $YH_i = XH_j$ என்போம். H_i^{-1}ஐக் கொண்டு பெருக்க, $YH_iH_i^{-1} = XH_jH_i^{-1}$, $H_jH_i^{-1}$ என்ற உறுப்பு Hஐச் சார்ந்தது. இதனை $H_jH_i^{-1} = H_k$ என்போம். எனவே $Y = XH_k \quad (1 \le k \le h) \quad (\because H_iH_i^{-1} = E)$அதாவது Y என்ற உறுப்பு XH கணத்தைச் சேர்ந்ததது எனத் தெரிய வருகிறது. ஆனால் நாம் Yஐ H அல்லது XH இல் இருந்து தேர்வு செய்யவில்லை. எனவே YHஉம் XHஉம் சர்வசமமாக இருக்கமுடியாது.

இவ்வாறு Gயிலிருந்து H, XH மற்றும் YH கணங்களின் $3h$ உறுப்புகள் தேர்வு செய்யப்பட்டுள்ளன. இப்போது $3h < g$ எனில் மேலும் ஒரு h உறுப்புகள் கொண்ட இடக்கூற்றுக் கணத்தை உருவாக்கலாம். இதிலிருந்து g ஆனது hஇன் முழு எண் மடங்கு எனத் தெரிகிறது.

g/h என்ற முழு எண் Gஇல் Hஇன் குறியீடு (index) எனப்படும்.

4.14 இயல்நிலை துணைக் குலங்கள் (Normal subgroups)

குலம் Gஇன் உறுப்பு $X(X \in G)$ஐப் பொருத்த, துணைக்குலம் Hஇன் வலக் கூற்றுக் கணமும் இடக்கூற்றுக் கணமும் சமமானால், H ஆனது இயல்நிலை துணைக்குலம் அல்லது Gஇன் மாற்றமிலா (invariant) துணைக்குலம் எனப்படும்.

அதாவது H இயல்நிலை துணைக்குலமெனில், $XH_i = H_jX$ ஆகும். X^{-1} ஆல் இருபுறமும் பெருக்க, $X^{-1}XH_i = X^{-1}H_jX$ அல்லது $X^{-1}H_jX = H_i$, அனைத்து $X \in G$க்கும். இது H_i க்கும் H_jக்கு இடையேயான இணையியத் தொடர்பாகும் (Conjugation relation). இதிலிருந்து H இன் உறுப்புகளின் இணையிய உறுப்புகளும் Hலேயே அமையும் என்று தெரிகிறது. அதாவது ஒரு குலத்தின் இயல்நிலை துணைக்குலம், முதன்மை குலத்தின் சில இனங்களை முழுமையாகக் கொண்டிருக்கும்.

அல்லது ஒரு துணைக்குலம் H ஆனது முதன்மை குலம் Gஇன் சில இனங்களை முழுமையாகக் கொண்டது எனில் H ஆனது Gஇன் இயல்நிலை துணைக்குலம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, (E, C_4^2, m_x, m_y) ஆனது C_{4v} குலத்தின் இயல்நிலை துணைக்குலமாகும். ஆனால் (E, m_x) ஒரு இயல்நிலை துணைக்குலமாகாது.

4.15 காரணி குலங்கள் (Factor Groups)

C_{4v} குலத்தின் ஒரு இயல்நிலை துணைக்குலமான $K_1 = (E, C_4^2)$ஐக் கருதுவோம். C_{4v}ன் மற்ற உறுப்புகளைக் கொண்டு K_1இன் அனைத்துக் கூற்றுக் கணங்களையும் உருவாக்குவோம். K_1ஐயும் சேர்த்து அவையாவன,

$K_1 = (E, C_4^2),\quad K_2 = (C_4, C_4^3),\quad K_3 = (m_x, m_y),\quad K_4 = (\sigma_u, \sigma_v)$ ஆகும்.

இப்போது மேற்கண்ட கூற்றுக் கணங்களின் குலத்தை உருவாக்குவோம். அதை $K = (K_1, K_2, K_3, K_4)$ என்போம். K_1, K_2, K_3, K_4 என்பன குலம் Kஇன் உறுப்புகள். இக்குலத்தின் அடங்கும் பண்பைக் கண்டறிய இரண்டு கூற்றுக் கனங்களைப் பெருக்குவோம். பெருக்கலில் முதல் கூற்றுக் கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் கொண்டு, இரண்டாவது கூற்றுக் கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பெருக்க வேண்டும். உருவாகும் கணத்தில், ஒரு முறைக்கு மேல் அமையும் உறுப்புகளை ஒரு முறை மட்டுமே வைத்துக் கொண்டு மற்றவற்றைத் தள்ளிவிட வேண்டும். இது Kஇன் ஏதாவது ஒரு கணமாக அமைவதைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$K_2K_3 = (C_4, C_4^3)(m_x, m_y) = (\sigma_u, \sigma_v, \sigma_u, \sigma_v) \rightarrow (\sigma_u, \sigma_v) = K_4$$

இதே போல் குலம் K ஆனது ஒரு குலத்திற்கான அனைத்து வெளிப்படை உண்மைகளுக்கும் இணங்கும் என்பதைச் சரிபார்க்க முடியும்.

இப்போது குலம் K ஆனது, இயல்நிலை துணைக்குலம் K_1 ஐப் பொருத்த, G இன் காரணிக்குலம் எனப்படும்.

4.16 குலங்களின் நேரடிப் பெருக்கல்

இரண்டு குலங்களின் நேரடிப் பெருக்கல் எனப்படுவது ஒரு குலத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் கொண்டு இரண்டாவது குலத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பெருக்குவதால், ஒரு பெரிய குலத்தைப் பெறுவதாகும். இப்பெருக்கல் கீழ்க்கண்ட இரு நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட்டது.

i) இரு குலங்களும், முற்றொருமை உறுப்பு Eஐத் தவிர வேறு எந்த உறுப்பையும் பொதுவானதாகக் கொண்டிருக்கக் கூடாது.

ii) முதல் குலத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் இரண்டாவது குலத்தினி ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் பரிவர்த்திக்கும் (Commute) தன்மை கொண்டிருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக h உறுப்புகளைக் கொண்ட குலம் $H = (E, H_2, H_3, \ldots H_h)$ மற்றும் k உறுப்புகளைக் கொண்ட குலம் $K = (K_1 \equiv E, K_2, K_3, \ldots K_k)$ ஆகியவற்றின் நேரடிப் பெருக்கலில் $g = hk$ உறுப்புகளைக் கொண்ட குலம் G பெறப்படுகிறது.

$$G = H \otimes K = (E, EK_2, EK_3, \ldots EK_k, H_2, H_2K_2, \ldots H_2K_k \ldots H_hK_k)$$

Hஉம் Kஉம் Gஇன் துணைக்குலங்களாகும். C_{4v} குலத்திலிருந்து ஒரு எடுத்துக்காட்டை விவரிப்போம்.

$$(E, c_4^2) \otimes (E, m_y) = (E, m_y, c_4^2, c_4^2 m_y) = (E, c_4^2, m_x, m_y)$$

ஒரு குலத்தை விரிவாக்குவதற்கான எளிய முறையே நேரடிப் பெருக்கலாகும். இக்கோட்பாடானது, அணுக்கள், மூலக்கூறுகள், படிகங்கள், அணுக்கருக்கள் மற்றும் அடிப்படைத்துகள்களின் (elementary particles) சமச்சீர் தன்மையை ஆராயப் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக G என்ற குலமானது ஒரு பொருளின் (system) பல்வேறு முறையான (proper) சுழற்சிகளின் குலம் என்போம். பிற்காலத்தில் அத்தொகுதியின் நேர்மாறு (inversion) மாற்றங்களும் சமச்சீர் நிலைமாற்றங்கள்தான் எனக் கண்டறியப்படுவதாகக் கொள்வோம். இப்போது J என்பது நேர்மாறு மாற்றச்செயலி (Inversion operator) எனில் (E, J) ஒரு குலமாகும். நேர்மாறு மாற்றம், சுழற்சிகளுடன்

பரிவர்த்திக்கதக்கது. எனவே $G \otimes (E, J)$ என்ற, குலங்களின் நேரடிப் பெருக்கலானது தொகுதியின் பெரிய சமச்சீர் குலத்தைக் குறிக்கிறது.

ஒரு தொகுதியின் அனைத்துச் சமச்சீர் உறுப்புகளையும் கண்டறிவது எளிதல்ல, எனினும் முடிந்த வரை கண்டறிந்த அனைத்துச் சமச்சீர் உறுப்புகளையும் இணைத்துக் குலம் உருவாக்கப்பட வேண்டும்.

4.17 ஒருபடித்தான (Isomorphism) மற்றும் பலபடித்தான (Homomorphism) தன்மைகள்

ஒரு குலத்தின் பெருக்கல் அட்டவணையானது, அக்குலத்தின் பகுமுறை அமைப்பைப் (analytical structure) பற்றிய அனைத்து விபரங்களையும் உள்ளடக்கியதாகும். எனவே ஒரே மாதிரியான பெருக்கல் அட்டவணைகளைக் கொண்ட அனைத்துக் குலங்களும் ஒரே மாதிரி அமைப்பைக் கொண்டவையாகும். அக்குலங்கள் ஒன்றுக்கொன்று ஒருபடித்தானவை (Isomorphic) என்கிறோம்.

கணித அடிப்படையில் $G = \{E, A, B, C \dots \dots\}$ மற்றும் $G' = \{E', A', B', C' \dots \dots\}$ என்ற g வரிசை கொண்ட இரு குலங்கள் ஒருபடித்தானவை எனில், அவற்றின் உறுப்புகளுக்கிடையே ஒன்றுக்கு–ஒன்று என்ற (one-to-one) ஒப்புமை (Correspondence) இருக்க வேண்டும். அதாவது அக்குலங்களுக்கிடையே $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$ .... போன்ற ஒப்புமை இருக்குமானால் $AB = C$ என்பதைப் போன்ற தொடர்பு $A'B' = C'$ இருக்க வேண்டும்.

இதில் குலம் Gஇன் பெருக்கல் அட்டவணையில் Gஇன் உறுப்புகளுக்குப் பதிலாக, ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் இணையான G' இன் உறுப்புகளைப் பதிலீடு செய்து, G'இன் பெருக்கல் அட்டவணையைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக $\{1, i, -1, -i\}$ என்ற எண்களின் குலமும் $\{E, c_4, c_4^2, c_4^3\}$ என்ற குலமும் ஒருபடித்தானவை எனில் $1 \leftrightarrow E$, $i \leftrightarrow c_4, -1 \leftrightarrow c_4^2, -i \leftrightarrow c_4^3$. முதலாவது குலத்தின் $(-1)(-i) = i$ என்பது இரண்டாவது குலத்தின் $(C_4^2)(C_4^3) = C_4$ஐ ஒத்ததாகும்.

மாறாகக் குலம் $G = \{E, A, B, C \dots\dots\}$ என்பது g வரிசைக் குலமாகவும், $G^1 = \{E_1, E_2 \dots E_n, A_1, A_2, \dots A_n, B_1, B_2 \dots . B_n \dots\}$ என்பது ng வரிசைக் குலமாகவும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது குலம் G'ஐ $(E_i), (A_i), (B_i) \dots$ என n உறுப்புகள் கொண்ட கணங்களைப் பிரிக்கிறோம். இந்நிலையில் G'இன் $E_1, E_2 \dots E_n$ உறுப்புகள் குலம் G'இன் Eக்கு இணையாகவும் $A_1, A_2, \dots A_n$என்பன Aக்கு இணையாகவும், இவ்வாறே மற்ற உறுப்புகளும் அமையுமானால், G'லிருந்து Gக்கு, nக்கு ஒன்று என்ற வரைபடம் (mapping) அல்லது பலபடித்தான தன்மை (homomorphism)அமைகிறது எனலாம்.

அதாவது G'இன் உறுப்புகளுக்கிடையேயான $A_i B_j = C_k, (1 \le k \le n)$ என்ற தொடர்புக்கு இணையாக Gஇல் $AB = C$ தொடர்பு இருக்குமானால், G' ஆனது குலம் G யுடன் பல படித்தான தொடர்பு கொண்டது எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக c_{4v}இன் துணைக்குலம் $G' = (E, c_4^2, m_x, m_y)$ஐக் கருதுவோம். இது $G = (E, m_x)$ என்ற குலத்துடன் பலபடித்தான தன்மை கொண்டது எனில் G'இன் உறுப்புகள் E மற்றும் c_4^2, Gஇன் உறுப்பு E யுடனும் G'இன் m_x மற்றும் m_y உறுப்புகள் Gஇன் m_x உறுப்புடனும் பலபடித்தான தொடர்பு கொண்டவை எனலாம்.

4.18 வகைக்குறிப்புக் கொள்கை (Representation Theory)

ஹில்பர்ட் வெளி(Hilbert space)யில் செயலி(Operator)கள் அணிகளாகக் (matrices) காட்டப்படுகின்றன. இதே போல் ஒரு

குலத்தின் உறுப்புகளை அணிகளாகக் காட்டுவதே வகைக்குறிப்புக் கொள்கையாகும்.

வரையறை.

$G = \{E, A, B, C \dots \dots\}$ என்பது g வரிசைக்குலம் என்போம். இப்போது $T = \{T(E), T(A), T(B), \dots\}$ என்பது ஒரே அணித்தரம் (Order) கொண்ட பூச்சியமில் கோவை அணி(non-singular matrix) களின் தொகுப்பு என்க.

குலத்தின் உறுப்புகளுக்கிடையே காணப்படும் $AB = C$ என்ற தொடர்புக்கு இணையாக அணிகளில்,

$$T(A)T(B) = T(AB) \quad \text{அல்லது} \quad \rightarrow (1)$$

$$T(A)T(B) = T(C) \quad \rightarrow (2)$$

என்ற தொடர்பு அமையுமானால், T என்ற அணித்தொகுப்பு குலம் Gஇன் வகைக்குறிப்பு எனப்படும். அணித்தரமானது வகைக்குறிப்பின் பரிமாணம் (dimension) எனப்படும்.

Gஇன் உறுப்புகள் செயலிகளாகச் செயல்படும் n பரிமாண திசையி வெளியை (vector space) L_n என்போம். L_n வெளியில் படித்தரச் செங்குத்து ஆயக்கூறுகள் (Orthonormal basis) $\{\varphi_i\}$ என்க. Gஇன் ஒரு உறுப்பு A, திசையி ஆயக்கூறில் செயல்படுவதை

$$A\varphi_i = A\sum_{j=1}^{n} \varphi_j T_{ji}(A) \quad \rightarrow (3)$$

எனலாம். இதில் $\{\varphi_i\}$ செங்குத்து ஆயங்களைக் கொண்டு, உறுப்பு Aஐக் குறிக்கும் அணி $T(A)$ஆகும். அணி $T(A)$ வின் ஒரு அணி மூலகம் (matrix element), $T_{ji}(A) = (\varphi_j, A\varphi_i)$ ஆகும்.

இவ்வாறே Gஇன் மற்ற உறுப்புகளைக் குறிக்கும் அணிகளையும் பெறமுடியும்.

இப்போது

$$AB\varphi_i = A\sum_{j=1}^{n}\varphi_j T_{ji}(B) = \sum_{k,j=1}^{n}\varphi_k T_{kj}(A)\, T_{ji}(B)$$

அல்லது

$$AB\varphi_i = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k\, T_{ki}(AB)$$

மேற்கண்ட இரண்டு செயல்களும் ஒரே முடிவைத்தான் தர வேண்டும். எனவே

$$\sum_{j=1}^{n} T_{kj}(A)\, T_{ji}(B) = T_{ki}(AB) \qquad 1 \le i, k \le n$$

அல்லது $T(A)T(B) = T(AB)$

அணிப்பெருக்கலுக்குக் கட்டுப்பட்ட, குலம் Tஇன் உறுப்புகள் வெவ்வேறானவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. எனவே ஒரு முறைக்கு மேல் அமையும் உறுப்புகளை, ஒரு முறை மட்டுமே எடுத்துக் கொண்டு குலம் Tஐ உருவாக்கினால் அதன் உறுப்புகள் வெவ்வேறானவையாக அமையும்.

குலம் Tஇன் உறுப்புகள் வெவ்வேறானவையாக அமையுமானால், அவை குலம் Gஇன் உறுப்புகளுடன் ஒன்றுக்கு ஒன்று என்ற தொடர்புடையவையாக அமையும். இப்போது Gயும் Tயும் ஒருபடித்தானவை (Isomorphic) எனலாம். T ஆனது Gஇன் உண்மையான வகைக்குறிப்பு (faithful representation) ஆகும்.

மாறாக Tஇன் சில உறுப்புகள் ஒரு முறைக்கு மேல் குலம் Tஇல் காணப்படுமானால், Gயிலிருந்து Tக்குப் ப லபடித்தான (homomorphism) தொடர்பு உள்ளது எனலாம். இத்தகைய வகைக்குறிப்பு உண்மையற்ற (unfaithful) வகைக்குறிப்பு எனப்படும்.

உண்மையற்ற வகைக்குறிப்பிற்கு எடுத்துக்காட்டு C_{4v} குலத்தின் அனைத்து உறுப்புகளும் 1 எனக் காட்டுவதாகும்.

உறுப்பு	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
வகைக்குறிப்பு	1	1	1	1	1	1	1	1

4.19 வகைக்குறிப்புகளின் சில பண்புகள்.

ஒரு குலத்தில் முற்றொருமை உறுப்பு E ஆனது $AE = EA = A$ எனும் பண்பை உடையது. இதில் A, குலத்தின் ஏதாவது ஒரு உறுப்பு. இதே தொடர்பு வகைக்குறிப்புகளின் அணிகளுக்கு,

$$T(A)T(E) = T(E)T(A) = T(A) \quad \rightarrow (4)$$

என அமையும். இந்த அணித் தொடர்பிலிருந்து $T(E)$ ஒரு அலகு அணி (Unit matrix) எனத் தெரிகிறது.

சமன்பாடு (1) இல் Bக்குப் பதிலாக A^{-1} ஐப் பயன்படுத்த

$T(A)T(A^{-1}) = T(AA^{-1}) = T(E)$ அல்லது

$$T(A^{-1}) = [T(A)]^{-1} \quad \rightarrow (5)$$

எனவே குலத்தில் ஒரு உறுப்பின் நேர்மாறினைக் குறிக்கும் அணியானது அவ்வுறுப்பினைக் குறிக்கும் அணியின் நேர்மாறு (inverse)க்குச் சமமாகும்.

$T_1 = \{T_1(E), T_1(A), T_1(B) \ldots\}$ மற்றும் $T_2 = \{T_2(E), T_2(A), T_2(B) \ldots\}$ என்பன ஒரே குலத்தின் இரு வகைக் குறிப்புகள் என்போம். இப்போது ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணி S ஐக் கொண்டு,

$$T_1(A) = S^{-1}T_2(A)S,\ T_1(B) = S^{-1}T_2(B)S, \ldots$$

என்ற நிலைமாற்றங்களைச் செய்யமுடியுமானால், குலங்கள் T_1 மற்றும் T_2 என்பன Gஇன் சமமான வகைக்குறிப்புகள் (Equivalent representations) எனப்படும்.

4.20 மாற்றமிலாத் துணை வெளிகளும் (Invariant subspaces) ஒடுக்கத்தக்க வகைக் குறிப்புகளும் (reducible representations)

ஒரு குலத்தின் வகைக்குறிப்பை உருவாக்கப் பயன்படும் திசையி வெளி L_n கீழ்க்கண்ட பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

குலத்தின் எந்த ஒரு உறுப்பு Aக்கும், L_n திசையி வெளியின் எந்த ஒரு திசையி φக்கும், $A\varphi$ என்ற திசையி L_nஐச் சேர்ந்ததாகும். அதாவது Gஇன் நிலைமாற்றங்களுக்கு L_n அடங்கும் (Closure property) பண்பைக் கொண்டது.

L_m என்ற திசையி வெளியின் அனைத்துத் திசையி கூறுகளும் L_n என்ற திசையி வெளியில் அடங்குமாயின், L_m என்பது L_n இன் துணைவெளி எனப்படும்.

Gஇன் அடங்கும் பண்பைக் கொண்ட திசையி வெளி L_nஇன் துணை வெளி L_m என்போம். L_mஉம் அடங்கும் பண்பைப் பெற்றிருக்குமானால், L_m ஆனது L_n இன் மாற்றமிலாத் துணை வெளி எனப்படும். இந்நிலையில் L_n ஆனது Gஐப் பொருத்து ஒடுக்கத்தக்கது எனப்படும்.

4.21 ஒரு வகைக் குறிப்பின் ஒடுங்கும் தன்மை (Reducibility of a representation)

L_n வெளியில் குலம் Gஇன் ஒரு வகைக் குறிப்பு $T = \{T(E), T(A), T(B) \dots\}$ என்போம். Gஐப் பொருத்த L_nஇன், முறையான (proper) துணைவெளி அல்லது மாற்றமிலா (invariant) துணைவெளி $L_m (m < n)$ என்க. இப்போது L_n லிருந்து L_mக்குப் பொருத்தமான ஆயங்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம், குலம் Tஇன் உறுப்புகளை,

$$T(A) = \begin{bmatrix} D^{(1)}A & 0 \\ X(A) & D^{(2)}A \end{bmatrix} \rightarrow (1)$$

என்ற அமைப்பில் காட்டமுடியும்.

இதில் $D^{(1)}(A)$ மற்றும் $D^{(2)}(A)$ முறையே m மற்றும் $(n-m)$ அணித்தரச் சதுர அணிகளாகும். $X(A)$ அணி $(n-m) \times m$ அணித்தரமுடையது. 0 என்பது முற்றும் பூச்சிய அணி (null matrix) ஆகும்.

இதனை நிரூபிக்க L_n வெளியின் ஆயக்கூறுகளை (Basis vectors) வரிசை திசையி (row vector) அமைப்பில் எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது,

$$\varphi_i = (000 \dots 1_i 00 \dots 0)$$

இவ்வணியின் i ஆவது நிரலில் 1உம் மற்ற நிரல்களில் 0உம் அமைகின்றன.

L_nஇன் ஆயக்கூறுகளை வரிசைப்படுத்தும்போது முதலாவது m ஆயக்கூறுகளை L_m இன் ஆயக்கூறுகளாகக் கொள்ள வேண்டும். இப்போது குலம் Gஇன் உறுப்பு A, L_m இன் ஆயக்கூறு $\varphi_\mu (1 \le \mu \le m)$ இன் மீது செயல்படுமானால்,

$$A\phi_\mu = (0\,0\,0\,\ldots\,1_\mu\,0\,\ldots\,0)\left[\begin{array}{ccc:ccc} T_{11} & \ldots & T_{1m} & T_{1,m+1} & \ldots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{m1} & \ldots & T_{mm} & T_{m,m+1} & \ldots & T_{mn} \\ \hdashline T_{m+1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & T_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & \ldots & T_{nm} & T_{n,m+1} & \ldots & T_{nn} \end{array}\right]$$

$$= T_{\mu 1}, T_{\mu 2}, \ldots\, T_{\mu m}, T_{\mu, m+1} \ldots T_{\mu n}$$

Gஐப் பொருத்து L_m ஒரு மாற்றமிலாத் துணை வெளியாகும். எனவே $A\varphi_\mu$ திசையியும் L_mஇல் அடங்கும். ஆகவே $\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2} \cdots, \varphi_n$ ஆயங்கள் வழியாக $A\varphi_\mu$ இன் கூறுகள் சுழியாகும்.

அதாவது $T_{\mu k}(A) = 0, \qquad m + 1 \leq k \leq n$

μ யாதாமொரு (arbitrary) எண்ணாகும். இதன் மதிப்பை 1 முதல் m வரை எடுத்துக் கொண்டால், சமன்பாடு (1) இல் 0 எனக் குறிப்பிடப்பட்ட m x $(n - m)$ அணித்தர அணியின் அனைத்து உறுப்புகளும் சுழியாகும்.

இப்போது Gஇன் இரு உறுப்புகளுக்கு இடையேயான பெருக்கல்பலன் $AB = C$ஐக் கருதுவாம். Gஇன் வகைக்குறிப்புகளைக் கொண்டு,

$T(A)T(B) = T(C)$ எனலாம்.

$$T(C) = \left[\begin{array}{c:c} D^{(1)}(A) & 0 \\ \hdashline X(A) & D^{(2)}(A) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} D^{(1)}(B) & 0 \\ \hdashline X(B) & D^{(2)}(B) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} D^{(1)}(A)D^{(1)}(B) & 0 \\ \hdashline X(A)D^{(1)}(B) + D^{(2)}(A)X(B) & D^{(2)}(A)D^{(2)}(B) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} D^{(1)}(C) & 0 \\ \hline X(C) & D^{(2)}(C) \end{array}\right] \rightarrow (2)$$

இதில் $D^{(1)}(A)D^{(1)}(B) = D^{(1)}(C)$

$$D^{(2)}(A)D^{(2)}(B) = D^{(2)}(C) \rightarrow (3)$$

$$X(A)D^{(1)}(B) + D^{(2)}(A)X(B) = X(C) \rightarrow (4)$$

சுமன்பாடு (3)லிருந்து, குலம் Gக்கு புதிய இரு வகைக்குறிப்புகள் அமைவது தெரிகிறது, அவையாவன

i) m பரிமாண வெளியில் அணிகளின் கணம்

$$D^{(1)} = \{D^{(1)}(E), D^{(1)}(A), D^{(1)}(B) \ldots.\}$$

ii) $n-m$ பரிமாண வெளியில் அணிகளின் கணம்

$$D^{(2)} = \{D^{(2)}(E), D^{(2)}(A), D^{(2)}(B) \ldots.\}$$

$D^{(1)}$இன் ஆயக்கூறுகள் $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \cdots \varphi_m\}$ மற்றும் $D^{(2)}$இன் ஆயக்கூறுகள் $\{\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \cdots \varphi_n\}$ இந்நிலையில் T ஆனது Gஇன் ஒடுக்கத்தக்க வகைக்குறிப்பு எனப்படும். எனவே வகைக்குறிப்பின் ஒடுங்கும் தன்மையானது திசையி வெளியின், முறையான மாற்றமிலாத் துணைவெளி அமைவதைப் பொருத்தாகும்.

4.22 வகைக்குறிப்புகள் பற்றிய ஒரு தேற்றம்

ஒரு முடிவுறு குலத்தின், வகைக்குறிப்பு T ஆனது செங்குத்து அலகற்ற (Non Unitary matrices) அணிகளின் தொகுப்பு என்க. இதனை அதற்குச் சமமான செங்குத்து அலகு (Unitary matrices) அணிகளின் தொகுப்பாக, வடிவொப்புமை நிலைமாற்றத்தின் மூலமாக, மாற்ற முடியும்.

அதற்காக ஒரு ஹெர்மைட்டின் அணியை வரையறுப்போம்.

$$H = \sum_{A \in G} T(A) T^{\dagger}(A) \quad \rightarrow (1)$$

இந்த ஹெர்மைட்டின் அணியைச், செங்குத்து அலகு நிலைமாற்றத்தின் (Unitary transformation) மூலம், சமமூலை வரை அணியாக (Diagonal matrix) மாற்ற முடியும். இதனை

$U^{-1} H U = H_d$ என்போம். $\rightarrow (2)$

H_d – சமமூலை வரை அணி, U – தேவையான அணி. (1) மற்றும் (2) இல் இருந்து

$$H_d = U^{-1} \sum_{A \in G} T(A) T^{\dagger}(A) U$$

$$= \sum_{A \in G} U^{-1} T(A) U U^{-1} T^{\dagger}(A)\, U$$

$$H_d = \sum_{A \in G} T'(A) T'^{\dagger}(A) \quad \rightarrow (3)$$

(3) இன் k ஆவது சமமூலை வரை உறுப்பு

$$[H_d]_{kk} \equiv d_k = \sum_{A \in G} \sum_j T'_{kj}(A)\, T'^{\dagger}_{jk}(A)$$

$$= \sum_{A \in G} \sum_j T'_{kj}(A)\, T'^{*}_{kj}(A)$$

$$[H_d]_{kk} = \sum_{A \in G} \sum_j |\, T'_{kj}(A)\, |^2 \quad \rightarrow (4)$$

சமன்பாட்டின் வலப்புறக்கூட்டலில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் இருமடியாக அமைவதால், அவை நேர் எண்களாகும். $d_k \geq 0$ எனவே d_k ஐ நேர் எண்ணாகக் கொள்ளலாம். எனவே H_d ஒரு பூச்சியமில் கோவை

அணியாகும்.. H_d அணியின் மடங்குகளைப்பெற, சமமூலை வரை உறுப்புகளின் அதே மடங்குகளைக் கொண்ட அணியை அமைத்தாலே போதுமானதாகும்.

அதாவது $[(H_d)^p]_{kk} = (d_k)^p$ $\rightarrow (5)$

p என்பது நேர் அல்லது எதிர் மெய் எண்.

இப்போது செங்குத்து அலகற்ற அணிகள் $T(A)$ஐ, $\Gamma(A)$ என்ற செங்குத்து அலகு அணிகளாக மாற்றப் பயன்படும் வடிவொப்புமை நிலைமாற்ற அணி $V = UH_d^{1/2}$ எனத் தெரிகிறது.

$$\Gamma(A) = V^{-1}T(A)V$$

$$= H_d^{-1/2}\, U^{-1}T(A)UH_d^{1/2}$$

$$= H_d^{-1/2}\, T'(A)H_d^{1/2}$$

$\Gamma(A)$ என்பது செங்குத்து அலகு அணிதானா என்பதைக் காண,

$$\Gamma(A)\,\Gamma(A)^\dagger = \left[H_d^{-1/2}\, T'(A)H_d^{1/2}\right]\left[H_d^{1/2}\, T'^\dagger(A)H_d^{-1/2}\right]$$

$$= H_d^{-1/2}\, T'(A)H_d T'^\dagger(A)H_d^{-1/2}$$ சமன்பாடு (3) இல் இருந்து.

$$= H_d^{-1/2}\, T'(A)\sum_{B\in G} T'(B)T'^\dagger(B)T'^\dagger(A)H_d^{-1/2}$$

$$= H_d^{-1/2}\sum_{B\in G} T'(AB)T'^\dagger(AB)H_d^{-1/2}$$

$$= H_d^{-1/2}\, H_d H_d^{-1/2}$$ மீண்டும் (3) இல் இருந்து

$$= E$$

இதிலிருந்து $\Gamma(A)$ செங்குத்து அலகு அணி எனத் தெரிகிறது. T அணிகளை Γஅணிகளாக மாற்றுவதன் மூலம், சரிவான ஆயத்தொகுதியைச் செங்குத்து ஆயத்தொகுதியாக மாற்றுகிறோம். T அணிகளின் செங்குத்தலகு அற்ற தன்மை, L_n திசையி வெளியின் அடிப்படை ஆயக்கூறுகள் செங்குத்துப் படித்தரம் (orthonormal) அற்றவை எனக்காட்டுகின்றன. Γஅணிகள், அடிப்படை ஆயக்கூறுகள் செங்குத்துப் படித்தர தன்மை கொண்டவை என்பதை காட்டுகின்றன.

4.23 ஒடுக்கம் பெறா வகைக்குறிப்புகள் (Irreducible representations)

T மற்றும் Γ வகைக் குறிப்புகள் சமமாகவும், ஒரே திசையி வெளியில் வரையறுக்கப்பட்டவையாகவும் உள்ளன. எனவே T ஒடுக்கத்தக்கது எனில் Γம் ஒடுக்கத்தக்க வகைக்குறிப்பே. மேலும் Γஅணிகள் செங்குத்து அலகு அணிகளாகும். எனவே அவற்றின் அமைப்பு

$$\Gamma(A) = \left[\begin{array}{c:c} S^{(1)}(A) & 0 \\ \hdashline 0 & S^{(2)}(A) \end{array}\right]$$ ஆகும்.

இதிலிருந்து குலம் Gஇன் இரண்டு வகைக்குறிப்புகளைப் பெறமுடியும்.

i) $S^{(1)} = \{S^{(1)}(E), S^{(1)}(A) \ldots\ldots\}, L_m$ வெளியில் வரையறுக்கப்பட்டது.

ii) $S^{(2)} = \{S^{(2)}(E), S^{(2)}(A) \ldots\ldots\}, L_p$ வெளியில் வரையறுக்கப்பட்டது.

இவை முறையே $D^{(1)}$ மற்றும் $D^{(2)}$க்குச் சமமாகும்.

L_m மற்றும் L_p வெளிகள், மாற்றமிலாத் துணை வெளிகளைப் பெற்றிருக்குமானால் $S^{(1)}$ மற்றும் $S^{(2)}$மேலும் ஒடுக்கத்தக்கவை ஆகும். இச்செயலைத் தொடர்ந்தால் முடிவாக Γஅணிகளின் அமைப்பு,

$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} \Gamma^{(1)}(A) & & & 0 \\ & \Gamma^{(2)}(A) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Gamma^{(n)}(A) \end{bmatrix}$$

இந்நிலையில் குலம் Gஇன் S எண்ணிக்கையிலான ஒடுக்கம் பெறா வகைக்குறிப்புகள்

$$\Gamma^{(1)} = \{\Gamma^{(1)}(E), \Gamma^{(1)}(A), \ldots\ldots\}$$

$$\Gamma^{(2)} = \{\Gamma^{(2)}(E), \Gamma^{(2)}(A), \ldots\ldots\}$$

………………

………………

$$\Gamma^{(s)} = \{\Gamma^{(s)}(E), \Gamma^{(s)}(A), \ldots\ldots\}$$ ஆகும்.

இவற்றுள் சில வகைக்குறிப்புகள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தடவைகள் அமையும் என்பதைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

4.24 ஷுரின் துணைக்கோட்பாடுகள் (Schur's Lemma)

ஒரு குலத்தின் ஒடுக்கம்பெறா வகைக் குறிப்புகளை ஆராய்வதற்கும், செங்குத்துத் தன்மை தேற்றத்தை (Orthogonality Theorem) வருவிக்கவும் பயன்படுபவை ஷீரின் இரு துணைக் கோட்பாடுகளாகும்.

4.25 ஷுரின் முதலாவது துணைக்கோட்பாடு

$\Gamma^{(i)}$ என்பது குலம் Gன் ஒரு ஒடுக்கம்பெறா வகைக்குறிப்பு என்க. $\Gamma^{(i)}$ இன் அனைத்து உறுப்புகளுடனும் அணி P யானது பரிவர்த்திக்கும் (Commute) எனில், P ஒரு மாறிலி அணியாகும். அதாவது $P = cE$ இதில் c ஒரு திசையிலி (scalar).

நிரூபணம்

குலம் Gஇன் எதாவது ஒரு உறுப்பு A என்க. அனைத்து உறுப்புகளுக்கும்

$$\Gamma^{(i)}(A)P = P\,\Gamma^{(i)}(A) \qquad \rightarrow (1)$$

என்க.

$\Gamma^{(i)}$ இன் பரிமாணம் n எனில், P ஆனது n அணித்தர, சதுர அணியாகும்.

$\Gamma^{(i)}$இன் அணிகள் செங்குத்தலகு (Unitary) அணிகளாகும். எனவே $\Gamma(A), \Gamma(B), \ldots\ldots$ போன்ற ஒவ்வொரு அணியும் n சிறப்பியல் திசையி(eigen vectors) க்களைக் கொண்டவையாகும். அவற்றுடன் P பரிவர்த்திப்பதால் Pஉம் n சிறப்பியல் திசையிக்களைக் கொண்டது.

Pஇன், சிறப்பியல் மதிப்பு (eigen value) கள் C_j கொண்ட சிறப்பியல் திசையிக்கள் x_jஎனில்,

$$Px_j = c_j x_j \text{ ஆகும்.} \qquad \rightarrow (2)$$

இருபுறமும் $\Gamma^{(i)}(A)$ ஆல் பெருக்க

$$\Gamma^{(i)}(A)Px_j = \Gamma^{(i)}(A)c_j x_j$$

$$P\Gamma^{(i)}(A)x_j = c_j\,\Gamma^{(i)}(A)x_j\ , \qquad \text{(1)ன் படி}$$

எனவே Gஇன் அனைத்து உறுப்புகளுக்கும், $\Gamma^{(i)}(A)x_j$ ஆனது c_j சிறப்பியல் மதிப்பைக் கொண்ட சிறப்பியல் திசையி ஆகும். இவ்வாறு ஒரே சிறப்பியல் மதிப்பு c_jக்கு m சிறப்பியல் திசையிக்கள் அமையுமானால், அவை Gஐப் பொருத்து ஒரு முறையான மாற்றமிலாத் துணைவெளி L_mஐ உருவாக்கும். எனவே $\Gamma^{(i)}$ ஒடுக்கத்தக்க வகைக்குறிப்பாகிறது. ஆனால்

இது நமது, $\Gamma^{(i)}$ ஒடுக்கம் பெறா வகைக்குறிப்பு, என்ற எடுகோளுக்கு எதிரானது. எனவே L_m ஆனது L_nஇன் முறையான துணைவெளி ஆக முடியாது. L_nஉம் L_mஉம் சர்வ சமமானவை. ஆகவே Pஇன் அனைத்துச் சிறப்பியல் மதிப்புகளும் ஒரே மதிப்பாக $c_j \equiv c$ என்றாகிறது. இதனால் $P = cE$ ஆகும்.

4.26 ஷுரின் இரண்டாவது துணைக்கோட்பாடு

குலம் Gஇன் ஒடுக்கம்பெறா இரு வகைக்குறிப்புகள் $\Gamma^{(i)}$ மற்றும் $\Gamma^{(j)}$ என்க. அவற்றின் அணித்தரம் முறையே l_i மற்றும் l_j. குலம் Gஇன் அனைத்து உறுப்புகளுக்கும், $l_i \times l_j$ அணித்தர அணி M,

$$\Gamma^{(i)}(A)M = M\,\Gamma^{(j)}(A) \qquad \rightarrow (1)$$

என்ற தொடர்பைப் பெற்றிருக்குமானால் $a)$ $M = 0$ முற்றும் பூச்சிய அணி அல்லது $b)$ Mஇன் அணிக்கோவை $|M| \neq 0$ மற்றும் $\Gamma^{(i)}$உம் $\Gamma^{(j)}$உம் சமமான வகைக்குறிப்புகளாகும்.

நிரூபணம்

சமன்பாடு (1) இன் ஹெர்மைட்டின் பரிவர்த்தனை(Hermitian Conjugate) காண,

$M^{\dagger}\,\Gamma^{(i)\dagger}(A) = \Gamma^{(j)\dagger}(A)M^{\dagger}$, Gஇன் அனைத்து உறுப்புகளுக்கும் அல்லது,

$M^{\dagger}\,\Gamma^{(i)}(A^{-1}) = \Gamma^{(j)}(A^{-1})M^{\dagger}$ இருபுறமும் M ஆல் பெருக்க,

$M^{\dagger}\,\Gamma^{(i)}(A^{-1})M = \Gamma^{(j)}(A^{-1})M^{\dagger}M$, அனைத்து உறுப்புகளுக்கும் அல்லது சமன்பாடு (1) இன் படி

$$M^{\dagger}M\,\Gamma^{(j)}(A^{-1}) = \Gamma^{(j)}(A^{-1})M^{\dagger}M \qquad \rightarrow (2)$$

இதிலிருந்து அணி $M^\dagger M$ ஆனது $\Gamma^{(j)}(A)^{-1})$ உடன் பரிவர்த்தனை தொடர்புடையது எனத் தெரிகிறது. எனவே ஷுரின் முதலாவது துணைக்கோட்பாட்டின்படி $M^\dagger M$ ஒரு மாறிலி அணியாகும்.

$$M^\dagger M = cE \qquad \rightarrow (3)$$

வகை I

$l_i = l_j = \ n$ என்க.

(3) இல் காணும் அணியின் அணிக்கோவை,

$$|M^\dagger M| = |M^\dagger||M| = c^n \qquad \rightarrow (4)$$

$i)\ c\ \neq 0$

$|M^\dagger| = (|M|)^*$ எனவே $|M| \neq 0$. அணி M ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணி என்பதால் Mஇன் நேர்மாறு M^{-1}அமைகிறது. எனவே சமன்பாடு(1)இல் இருந்து,

$$M^{-1}\ \Gamma^{(i)}(A)M = M^{-1}M\ \Gamma^{(j)}(A)$$

அல்லது $\Gamma^{(j)}(A) = M^{-1}\ \Gamma^{(i)}(A)M$

எனவே $\Gamma^{(i)}$உம் $\Gamma^{(j)}$ உம் சமமான வகைக்குறிப்புகளாகும்.

$ii)\ c = 0$

சமன்பாடு (3) இன் (i, i) உறுப்பு

$$\sum_k M_{ik}^\dagger M_{ki} = 0$$

$$\sum_k M_{ki}^* M_{ki} = \sum_k |M_{ki}|^2 = 0$$

அல்லது $M_{ki} = 0,\ i \leq k \leq n$

i– யாதாமொரு எண்ணாகும். இதன் மதிப்பை 1 முதல் n வரை கொள்ள அணி $M = 0$ முற்றும் பூச்சிய அணி ஆகும்.

வகை II

$i)$ $l_i \neq l_j$ எனில் $l_i < l_j$ என்போம்.

அணி Mஐ சதுர அணியாக மாற்றக் கடைசியாக அமையும் $(l_j - l_i)$ வரிசைகளின் உறுப்புகளைச் சுழிகளாக இணைக்க, கிடைக்கப்பெறும் அணி

எனவே
$$M' = \overbrace{\begin{bmatrix} M \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}}^{l_j} \begin{matrix} \}l_i \\ \\ \}l_j - l_i \end{matrix}$$

$$M'^{\dagger} = [\ \overbrace{M^{\dagger}}^{l_i} \vdots \overbrace{0}^{l_j - l_i}\ ]\ \}l_j. \qquad \rightarrow (5)$$

இவற்றின் அணிப்பெருக்கல், $M'^{\dagger}M' = M^{\dagger}M.$ எனவே அணியின் அணிக்கோவை, $|M'^{\dagger}M'| = |M^{\dagger}M|$

$|M^{\dagger}||M| = c^n \rightarrow (4)$ இன் படி. ஆனால் (5) இல் இருந்து

$|M'| = |M'^{\dagger}| = 0$ எனவே $c = 0$ மற்றும் $M^{\dagger}M = 0$. இதிலிருந்து $M = 0$ எனத் தெரிகிறது.

$ii)$ $l_i \neq l_j$ எனவே $\Gamma^{(i)}(A)$ மற்றும் $\Gamma^{(j)}(A)$ சமமான வகைக்குறிப்புகளாக இருக்க முடியாது.

4.27 செங்குத்துத் தன்மை தேற்றம் (The orthogonality Theorem)

மேற்கண்ட, ஷுரின் இரு துணைக்கோட்பாடுகளின் பயன்பாடாக M என்ற ஒரு அணியை உருவாக்குவோம்.

$$M = \sum_{A \in G} \Gamma^{(i)}(A)\, X\, \Gamma^{(j)}(A^{-1}) \qquad \rightarrow (1)$$

$\Gamma^{(i)}$ மற்றும் $\Gamma^{(j)}$ முறையே l_i மற்றும் l_j பரிமாணங்களைக் கொண்டவை. இவை gவரிசை குலம் Gஇன் இரண்டு சமமற்ற, ஒடுக்கம்பெறா வகைக்குறிப்புகளாகும்.

X என்பது l_i x l_jஅணித்தரம் கொண்ட யாதாமொரு அணியாகும்.

(1) இன் இருபுறமும் $\Gamma^{(i)}(B)$ ஆல் பெருக்க,

$$\Gamma^{(i)}(B) M = \Gamma^{(i)}(B) \sum_{A \in G} \Gamma^{(i)}(A)\, X\, \Gamma^{(j)}(A^{-1})$$

$$= \sum_{A \in G} \Gamma^{(i)}(BA)\, X\, \Gamma^{(j)}(A^{-1})$$

$$= \sum_{C \in G} \Gamma^{(i)}(C)\, X\, \Gamma^{(j)}(C^{-1}B)$$

இதில் $BA = C, C^{-1}B = A^{-1}$

$$= \sum_{C \in G} \Gamma^{(i)}(C)\, X\, \Gamma^{(j)}(C^{-1})\, \Gamma^{(j)}(B)$$

$$= M\, \Gamma^{(j)}(B) \qquad \rightarrow (2)$$

ஷுரின் இரண்டாவது கோட்பாட்டின்படி $M = 0$. (1) இன் (k, s) அணி மூலகம் (Matrix Element)

$$\sum_{A \in G} \sum_{p.q} \Gamma^{(i)}_{kp}(A)\, X_{pq}\, \Gamma^{(j)}_{qs}(A^{-1}) = 0 \qquad \rightarrow (3)$$

X, யாதாமொரு அணியாகும். எனவே நம் வசதிக்காக Xஇன் (m,n) அணி மூலகத்தை 1 எனவும், மீதமுள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் 0 எனவும் கொள்வோம்.

$X_{pq} = \delta_{pm}\delta_{qn}$ எனவே (3) இல் இருந்து

$$\sum_{A\in G} \Gamma^{(i)}_{km}(A)\ \Gamma^{(j)}_{ns}(A^{-1}) = 0$$

அல்லது

$$\sum_{A\in G} \Gamma^{(i)}_{km}(A)\ \Gamma^{(j)*}_{sn}(A) = 0 \ \rightarrow (4) \qquad 1 \le k, m \le l_i\,,$$

$$1 \le n, s \le l_j$$

அதாவது குலம் Gஇன் அனைத்து உறுப்புகளுக்கும் ஒடுக்கம்பெறா வகைக்குறிப்பு $\Gamma^{(i)}$இன் (k,m) அணி மூலகத்தையும் ஒடுக்கம்பெறா வகைக்குறிப்பு $\Gamma^{(j)}$இன் (s,n) அணிமூலகத்தின் கலப்பின இணை (Complex conjugate)யையும் பெருக்கி, எடுக்கப்படும் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும்.

அடுத்ததாக,

$$N = \sum_{A\in G} \Gamma^{(i)}(A)\, X\ \Gamma^{(i)}(A^{-1}) \qquad \rightarrow (5)$$

என்ற அணியை உருவாக்குவோம். சமன்பாடு (2)ஐத் தருவித்தது போல் குலத்தின் அனைத்து உறுப்புகளுக்கும்

$\Gamma^{(i)}(A)N = N\,\Gamma^{(i)}(A)$ எனக்காட்டலாம்.

எனவே ஷுரின் முதலாவது துணைக்கோட்பாட்டின்படி N ஒரு மாறிலி அணி எனலாம். $N = aE$ என்க. (5) இன் (k,s) அணி மூலகம்

$$\sum_{A\in G}\sum_{p,q}\Gamma^{(i)}_{kp}(A)\,X_{pq}\,\Gamma^{(i)}_{qs}(A^{-1}) = a\ \delta_{ks} \qquad \rightarrow (6)$$

முன்போலவே $X_{pq} = \delta_{pm}\delta_{qn}$ எனவே

$$\sum_{A\in G}\Gamma^{(i)}_{km}(A)\ \Gamma^{(i)}_{ns}(A^{-1}) = a\delta_{ks} \qquad \rightarrow (7)$$

திசையிலி aஇன் மதிப்பைக் காண (5) இன் இருபுறமும் அணிகளின் தடத்தைக் (Trace) காண்போம். தடம்

$$N = al_i = \sum_{k=1}^{l_i}\sum_{A\in G}\sum_{p,q}\Gamma^{(i)}_{kp}(A)\,X_{pq}\,\Gamma^{(i)}_{qk}(A^{-1})$$

$$= \sum_{p,q} X_{pq}\sum_{A\in G}\sum_{k}\Gamma^{(i)}_{qk}(A^{-1})\,\Gamma^{(i)}_{kp}(A)$$

$$= \sum_{p,q} X_{pq}\sum_{A\in G}\Gamma^{(i)}_{qp}(E)$$

$$= g\sum_{p,q} X_{pq}\,\delta_{pq}$$

$$= g \text{ தடம் } X$$

அல்லது $a = g$ (தடம் X)$/l_i$ → (8)

நமது தேர்வின்படி $m \neq n$ எனில் தடம் $X = 0$ $m = n$ எனில் தடம் $X = 1$

அதாவது தடம் $X = \delta_{mn}$ (7) இல் பிரதியிட,

$$\sum_{A\in G}\Gamma^{(i)}_{km}(A)\ \Gamma^{(i)}_{ns}(A^{-1}) = \left(\frac{g}{l_i}\right)\delta_{ks}\delta_{mn} \qquad \rightarrow (9)$$

$1 \leq k,m,n,s \leq l_i$

சமன்பாடுகள் (4)மற்றும் (9)ஐ இணைத்து, ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குவோம்.

$$\sum_{A \in G} \Gamma_{km}^{(i)}(A)\, \Gamma_{ns}^{(j)}(A^{-1}) = \left(\frac{g}{l_i}\right) \delta_{ij}\delta_{ks}\delta_{mn}$$

அல்லது

$$\sum_{A \in G} \Gamma_{km}^{(i)}(A)\, \Gamma_{sn}^{(j)*}(A) = \left(\frac{g}{l_i}\right) \delta_{ij}\delta_{ks}\delta_{mn} \quad \rightarrow (10)$$

இதுவே செங்குத்துத் தன்மை தேற்றம் எனப்படும்.

4.28 ஒரு வகைக்குறிப்பின் பண்புக்கோவைகள் (Characters of a representation)

ஒரு திசையி வெளியில், ஒரு குலத்தின் வகைக்குறிப்பு ஒரே அணித்தொகுப்பினால் மட்டுமே அறியப்படுவதில்லை. ஆயக்கூறுகளின் தேர்வைப் பொருத்தும், அவற்றின் வரிசை மாற்றத்தைப் பொருத்தும் வெவ்வேறு அணித்தொகுப்புகள் வகைக்குறிப்புகளாக அமைய முடியும். இருப்பினும் அத்தகைய வகைக்குறிப்புகள், சில வடிவொப்பமை நிலைமாற்றங்களின் மூலம் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையவை.

ஆனால் ஒரு அணியின் தடமானது (trace) வடிவொப்புமை நிலைமாற்றத்தினால் மாறுவதில்லை. எனவே அடிப்படை ஆயக்கூறுகளின் தேர்வு எவ்வாறாயிருப்பினும் அணிகளின் தடங்களைக் கொண்டு வகைக்குறிப்புகளை வரையறுக்க முடியும்.

ஒரு குலத்தின் ஒடுக்கம்பெறும் அல்லது ஒடுக்கம்பெறா வகைக்குறிப்பின் பண்புக் கோவைகள் என்பன அதிலுள்ள அணிகளின் அணித்தடத் தொகுப்பாகும்.

$$\chi(A) = \sum \Gamma_{kk}(A) \quad \rightarrow (11)$$

ஒற்றைப் பரிமாண வகைக்குறிப்பின் பண்புக் கோவைகள் அனைத்தும் 1 என்ற மதிப்பைப் பெறும். ஒன்றுக்கொன்று பரிவர்த்திக்கும் உறுப்புகளின் (conjugate elements) பண்புக் கோவைகள் சமமாக இருக்கும். எனவே ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்த உறுப்புகளின் பண்புக் கோவைகள் அனைத்தும் ஒரே மதிப்புடையவையாக இருக்கும்.

4.29 பண்புக்கோவைகளின் செங்குத்துத் தன்மை (Orthogonality of characters)

ஒடுக்கம்பெறா வகைக்குறிப்பில் பண்புக் கோவைகளின் செங்குத்துத் தன்மையைக் கண்டறிய சமன்பாடு (10) இல்

$k = m$ என்றும் $s = n$ என்றும் கொண்டு (11)ஐப் பயன்படுத்திக் கூட்டுத்தொகை கண்டறிய,

$$\sum \chi^{(i)}(A)\,\chi^{(j)*}(A) = \frac{g}{l_i}\delta_{ij}l_i = g\delta_{ij}$$

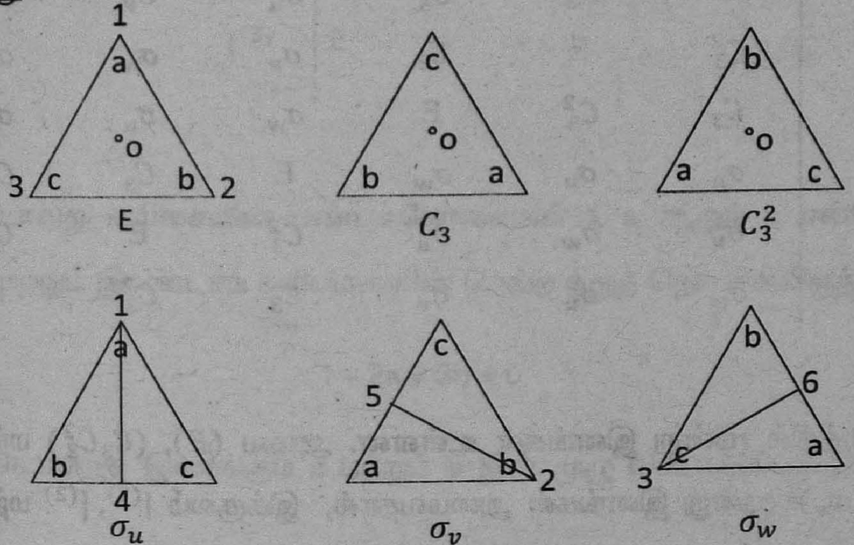
இதில் $\Gamma^{(i)}$ வகைக்குறிப்பில், உறுப்பு A இன் பண்புக்கோவை $\chi^{(i)}(A)$. ஒரு குலத்தில் C_k என்ற இனத்தின் உறுப்புகள் எண்ணிக்கை n_k எனில் மேற்கண்ட சமன்பாட்டை

$$\sum_k \sqrt{\frac{n_k}{g}}\chi_k^{(i)}\sqrt{\frac{n_k}{g}}\chi_k^{(j)*} = \delta_{ij}$$

எனலாம். இதில் $\Gamma^{(i)}$ வகைக்குறிப்பில், C_k என்ற இனத்தைச் சேர்ந்த A என்ற உறுப்பின் பண்புக்கோவை $\chi_k^{(i)}$ ஆகும்.

4.30 C_{3v}இன் பண்புக்கோவை அட்டவணை (The character table of C_{3v})

ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் சமச்சீர் நிலைமாற்றங்களைக் கருதுவோம்.



படம் 4.3

ஒரு தாளின் மீது அமையும் abc என்ற முக்கோணத்தைக் கருதுவோம். இதன் முனைகள் தாளில் 1,2,3 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. முக்கோணத்தின் பக்க மையங்கள் முறையே 4,5,6 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இதன் சமச்சீர் நிலைமாற்றங்கள் முறையே

1) முற்றொருமை நிலைமாற்றம் (E)

2) நடுக்கோட் டு மையத்தைப் (0) பற்றிய 120°வலஞ்சுழற்சி (C_3)

3) 240 °வலஞ்சுழற்சி (C_3^2)

4) 1–4 கோட்டில் அமையும் ஆடி பிரதிபலிப்பு (σ_u)

5) 2 –5 கோட்டில் அமையும் ஆடி பிரதிபலிப்பு (σ_v)

6) 3 –6 கோட்டில் அமையும் ஆடி பிரதிபலிப்பு (σ_w)

இவற்றுக்கான பெருக்கல் அட்டவணை

இரண்டாம் செயல்	முதல் செயல் E	C_3	C_3^2	σ_u	σ_v	σ_w
E	E	C_3	C_3^2	σ_u	σ_v	σ_w
C_3^2	C_3^2	E	C_3	σ_v	σ_w	σ_u
C_3	C_3	C_3^2	E	σ_w	σ_u	σ_v
σ_u	σ_u	σ_v	σ_w	E	C_3	C_3^2
σ_v	σ_v	σ_w	σ_u	C_3^2	E	C_3
σ_w	σ_w	σ_u	σ_v	C_3	C_3^2	E

C_{3v} குலத்தில் மூன்று இனங்கள் உள்ளன. அவை (E), $(C_3C_3^2)$ மற்றும் $(\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w)$. மூன்று இனங்கள் அமைவதால், இக்குலம் $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ மற்றும் $\Gamma^{(3)}$ என்ற மூன்று ஒடுக்கம் பெறா வகைக்குறிப்புகளைக் கொண்டது.

இவ்வகைக்குறிப்புகளின் பரிமாணங்கள் l_1, l_2 மற்றும் l_3 என்போம். இவற்றின் தொடர்பு $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 6$, குலத்தின் வரிசை. இச்சமன்பாட்டிற்கு இணங்கும் l_i இன் முழு எண் மதிப்புகள் $l_1 = l_2 = 1$ மற்றும் $l_3 = 2$.

வகைக்குறிப்புகளுள் முறையற்ற பலபடித்தான ஒற்றைப் பரிமாண $\Gamma^{(1)}$ வகைக்குறிப்பின் அனைத்து உறுப்புகளுக்கும் மதிப்பு 1 ஆகும்.

உறுப்பு	E	C_3	C_3^2	σ_u	σ_v	σ_w
வகைக்குறிப்பு	1	1	1	1	1	1

அனைத்து வகைக்குறிப்புகளுக்கும் E எனப்படும் அலகு அணியின் தடம் அல்லது பண்புக் கோவை அணியின் பரிமாணம் l_iக்குச் சமமாகும். எனவே அட்டவணை

	E	2c	3σ
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1		
$\Gamma^{(3)}$	2		

இரண்டாவது வரிசையின் பண்புக்கோவைகள் 1, a மற்றும் b என்போம்.

முதல் மற்றும் இரண்டாம் வரிசைகளின் செங்குத்துத் தொடர்பிலிருந்து,

$$1 + 2a + 3b = 0$$

இத்தொடர்பிற்கு இணங்கும் a மற்றும் b இன் முழு எண் மதிப்புகள் $a = 1$ மற்றும்

$b = -1$ என அமையும்.

எனவே இரண்டாவது வரிசை $\Gamma^{(2)} \rightarrow 1 \quad 1 \quad -1$

இப்போது மூன்றாம் வரிசை $\Gamma^{(3)} \rightarrow 2 \quad c \quad d$, என்போம்.

இவற்றின் முதல் மற்றும் இரண்டாம் வரிசை செங்குத்துத் தொடர்புகளிலிருந்து

$$2 + 2c + 3d = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

$$2 + 2c - 3d = 0 \qquad \rightarrow (2)$$

கழிக்க, $6d = 0$ அல்லது $d = 0$ இம்மதிப்பைச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட, $2 + 2c = 0$ அல்லது $c = -1$ எனவே மூன்றாவது வரிசை $\Gamma^{(3)} \rightarrow 2$

$-1 \quad 0$

C_{3v} குலத்தின் பண்புக்கோவை அட்டவணை

	E	2c	3σ
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	1	−1
$\Gamma^{(3)}$	2	−1	0

4.31 C_{4v} குலத்தின் பண்புக்கோவை அட்டவணை

குலம் C_{4v} இல் (E),$(C_4^2), (C_4\ , C_4^3), (m_x, m_y), (\sigma_u, \sigma_v)$ என ஐந்து இனங்கள் உள்ளன. எனவே $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}$ மற்றும் $\Gamma^{(5)}$ என ஐந்து ஒடுக்கம்பெறா வகைக்குறிப்புகள் அமைய வேண்டும். அவற்றின் பரிமாணங்கள் முறையே l_1, l_2, l_3, l_4 மற்றும் l_5 என்போம். இவற்றிற்கிடையே தொடர்பு

$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = g$, குலத்தின் வரிசை

அதாவது $\quad l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 = 8 \qquad \rightarrow (1)$

l_i முழு எண் மதிப்புகளைப் பெறுமானால், $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$ மற்றும் $l_5 = 2$

ஒரு குலத்தின் முறையற்ற ஒடுக்கம்பெறா வகைக்குறிப்பில் அனைத்து உறுப்புகளும் 1 என்ற மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

உறுப்பு	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
வகைக்குறிப்பு	1	1	1	1	1	1	1	1

எந்த ஒரு வகைக்குறிப்பிலும் முற்றொருமை உறுப்பு (E) அலகு அணியாகும். வகைக்குறிப்பின் பரிமாணம் அணியின் அணித்தரத்திற்குச் சமமாகும். அட்டவணையின் முதலாவது நிரலில் ஒற்றைப் பரிமாண வகைக்குறிப்புகள் $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}$ மற்றும் $\Gamma^{(4)}$ மதிப்பு 1ஐயும் $\Gamma^{(5)}$ மதிப்பு 2ஐயும் பெற்றிருக்கும்.

C_{4v} பெருக்கல் அட்டவணைப்படி,

$$m_x m_x = m_y m_y = \sigma_u \sigma_u = \sigma_v \sigma_v = E$$

ஒற்றைப் பரிமாண வகைக்குறிப்புகளுக்கு $m_x, m_y, \sigma_u, \sigma_v$ ஆகியன +1 அல்லது –1 மதிப்பைப் பெறும். எம்மதிப்புக்கும் C_4^2=+1 ஆகத்தான் இருக்க முடியும். மூன்றாவது நிரலில் $\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}$ மற்றும் $\Gamma^{(4)}$ ஆகியவற்றின் C_4^2 மதிப்புகள் +1 ஆகும்.

மேலும் $C_4 C_4 = C_4^3 C_4^3 = C_4^2 = +1$ எனவே $\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}$ மற்றும் $\Gamma^{(4)}$ இல் C_4 அல்லது C_4^3இன் மதிப்பு +1 அல்லது –1 ஆக அமையும். எனவே அட்டவணையின் அமைப்பு,

	(E)	(C_4, C_4^3)	(C_4^2)	(m_x, m_y)	$(\sigma_u \sigma_\vartheta)$
	1	2	1	2	2
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	a	1	b	c
$\Gamma^{(3)}$	1		1		
$\Gamma^{(4)}$	1		1		
$\Gamma^{(5)}$	2				

$\Gamma^{(1)}$ மற்றும் $\Gamma^{(2)}$ வகைக்குறிப்புகளின் செங்குத்துத் தன்மையைக் கொண்டு,

$1 + 2a + 1 + 2b + 2c = 0$ எனலாம்.

அல்லது $2 + 2a + 2b + 2c = 0$

$$1 + a + b + c = 0$$

a,b மற்றும் c இன் முழு எண் மதிப்புகளுக்கு, $a = b = -1$ எனவும் $c = 1$ எனவும் கொள்வோம். எனவே

இரண்டாவது வரிசை, $\Gamma^{(2)} \rightarrow 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1$

மூன்றாம் வரிசை $\Gamma^{(3)} \rightarrow 1 \quad a' \quad 1 \quad b' \quad c'$ என்போம். $\Gamma^{(1)}$ மற்றும் $\Gamma^{(3)}$இன் செங்குத்துத் தன்மையிலிருந்து,

$$1 + 2a' + 1 + 2b' + 2c' = 0, \qquad 1 + a' + b' + c' = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

$\Gamma^{(2)}$ மற்றும் $\Gamma^{(3)}$இன் செங்குத்துத் தன்மையிலிருந்து,

$$1 - 2a' + 1 - 2b' + 2c' = 0, \qquad 1 - a' - b' + c' = 0 \qquad \rightarrow (2)$$

(1) + (2), $2 + 2c' = 0$ அல்லது $c' = -1$

(1) இல் பிரதியிட, $1 + a' + b' - 1 = 0, \quad a' + b' = 0, \quad a' = -b'$

எனவே $a' = 1$ எனில் $b' = -1$

இம்மதிப்புகளிலிருந்து மூன்றாம் வரிசை $\Gamma^{(3)} \rightarrow 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1$

இப்போது வரிசை நான்கை $\Gamma^{(4)} \rightarrow 1 \quad a'' \quad 1 \quad b'' \quad c''$ என்போம்.

$\Gamma^{(4)}$ மற்றும் $\Gamma^{(2)}$இன் செங்குத்துத் தன்மையிலிருந்து

$$1 - 2a'' + 1 - 2b'' + 2c'' = 0, \qquad 1 - a'' - b'' + c'' = 0 \qquad \rightarrow (3)$$

$\Gamma^{(4)}$ மற்றும் $\Gamma^{(3)}$இல் இருந்து

$1 + 2a'' + 1 - 2b'' - 2c'' = 0$, $1 + a'' - b'' - c'' = 0$ → (4)

(3) + (4), $2 - 2b'' = 0$ அல்லது $b'' = 1$

(3) இல் பிரதியிட, $1 - a'' - 1 + c'' = 0$ அல்லது $a'' = c''$

$a'' = -1$ எனில் $c'' = -1$ எனவே

நான்காம் வரிசை $\Gamma^{(4)} \rightarrow 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1$

	(E)	(C_4, C_4^3)	(C_4^2)	(m_x, m_y)	$(\sigma_u \sigma_v)$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	−1	1	−1	1
$\Gamma^{(3)}$	1	1	1	−1	−1
$\Gamma^{(4)}$	1	−1	1	1	−1
$\Gamma^{(5)}$	2	a	b	c	d

$\Gamma^{(5)}$ மற்றும் $\Gamma^{(1)}$இன் செங்குத்துத் தொடர்பிலிருந்து,

$$2 + 2a + b + 2c + 2d = 0 \quad \rightarrow (5)$$

$\Gamma^{(5)}$ மற்றும் $\Gamma^{(2)}$இல் இருந்து $2 - 2a + b - 2c + 2d = 0$ → (6)

$\Gamma^{(5)}$ மற்றும் $\Gamma^{(3)}$இல் இருந்து $2 + 2a + b - 2c - 2d = 0$ → (7)

$\Gamma^{(5)}$ மற்றும் $\Gamma^{(4)}$இல் இருந்து $2 - 2a + b + 2c - 2d = 0$ → (8)

$\frac{(5)+(6)}{2}$, $2 + b + 2d = 0$ → (9)

$\frac{(6)+(7)}{2}$, $2 + b - 2c = 0$ → (10)

$\frac{(5)+(7)}{2}$, $2 + 2a + b = 0$ → (11)

$\frac{(7)+(8)}{2}$, $$2+b-2d=0 \quad \rightarrow (12)$$

(9) மற்றும் (12) இல் இருந்து $d=0$, (10) மற்றும் (12) இல் இருந்து $c=d$

எனவே $c=d=0$

(9) இல் இருந்து, $2+b=0$ அல்லது $b=-2$

(11) இல் இருந்து, $2+2a-2=0$ அல்லது $a=0$

எனவே C_{4v}இன் பண்புக்கோவை அட்டவணை

	(E)	(C_4, C_4^3)	(C_4^2)	(m_x, m_y)	$(\sigma_u \sigma_v)$
	1	2	1	2	2
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	−1	1	−1	1
$\Gamma^{(3)}$	1	1	1	−1	−1
$\Gamma^{(4)}$	1	−1	1	1	−1
$\Gamma^{(5)}$	2	0	−2	0	0

4.32 இடப்பெயர்வு குலம் மற்றும் வெளிக்குலம் (Translation Group and Space Group)

ஒரு நேர்கோட்டுப் படிக அலகை (lattice) க் கருதுவோம். இதன், a படிக அலகு மாறிலி (lattice constant) கொண்ட N அலகு புள்ளிகளைக் காண்போம். இதற்குக் கால வட்ட வரம்பு நிபந்தனை (Periodic boundary condition) $x-Na \equiv x$ என்போம். இதில் x என்பது நேர்கோட்டுப் படிக அலகில் ஆயத்தொலைவு. இத்தகைய படிக அலகில், aஇன் மடங்குகளின் இடப்பெயர்வு, மாறாத்தன்மை (invariant) கொண்டது.

a இடப்பெயர்வுக்கான செயலி T_1 என்றும் na இடப்பெயர்வுக்கான செயலி T_n என்றும் கொள்வோம்.

$$T_1 x = x - a, \; T_n x = (T_1)^n x = x - na$$

காலவட்ட வரம்பு நிபந்தனைப்படி,

$$T_N x = (T_1)^N x = x - Na = x$$

T_1இன் அடுக்குகள், N வரிசை கொண்ட வட்டக் குலத்தை உருவாக்குகின்றன. இத்தகைய குலத்தை நாம் இடப்பெயர்வுக் குலம் T என்கிறோம்.

$$T = T_N\{E, T_1, T_2, \dots T_{N-1}\}$$

T ஒரு ஏபெலின் குலத்தைச் சேர்ந்தது. எனவே Tஇன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு இனத்தைச் சேர்ந்ததாகும்.

முப்பரிமாண படிக அலகுகளில், சமச்சீர் இடப்பெயர்வு (Translation Symmetry) செயலிகள் இணைந்தும், ஒரு குலத்தை உருவாக்கலாம்.

ஒரு படிக அலகை, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ என்று மூன்று அடிப்படை இடப்பெயர்வு திசையிக்களைக் கொண்டு உருவாக்குவோம். இதற்குக் கீழ்க்கண்ட வரம்பு நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\vec{r} - N_1\overrightarrow{a_1} \equiv \vec{r}, \quad \vec{r} - N_2\overrightarrow{a_2} \equiv \vec{r}, \; \vec{r} - N_3\overrightarrow{a_3} \equiv \vec{r}$$

இதில் $\vec{r}$ என்பது ஒரு புள்ளியின் திசையி நிலை (Position Vector)

$t(n_1, n_2, n_3)$ திசையி இடப்பெயர்வைக் கொடுக்கும் செயலி $T(n_1, n_2, n_3)$ எனில்,

$T(n_1, n_2, n_3)\vec{r} = \vec{r} - n_1\overrightarrow{a_1} - n_2\overrightarrow{a_2} - n_3\overrightarrow{a_3} = \vec{r} - \vec{t}(n_1, n_2, n_3)$ இதில்

$1 \le n_i \le N_i$

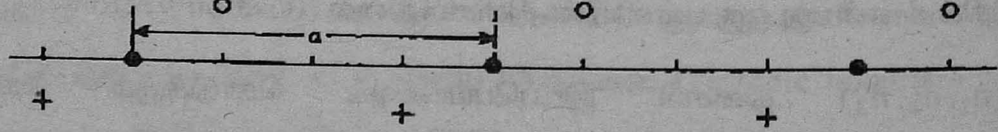
அடுத்தடுத்த இரு செயலிகளினால் ஏற்படும் இடப்பெயர்வை ஒரே செயலியினால் ஏற்படுத்தலாம். இதனை

$$T(m_1, m_2, m_3)T(n_1, n_2, n_3)\vec{r} = T(m_1 + n_1, m_2 + n_2, m_3 + n_3)\vec{r}$$

எனலாம்.

இத்தகைய அனைத்துச் செயலிகளையும் $N_1N_2N_3$ வரிசை (Order) கொண்ட ஒரு குலமாக அமைக்கலாம். இது ஒரு முப்பரிமாணப் படிக அலகின், முழுமையான இடப்பெயர்வுக் குலமாகும். இக்குலத்தின் முற்றொருமை உறுப்பு $T(0,0,0) = T(N_1, N_2, N_3)$. மேலும் உறுப்புகள் பரிவர்த்தனைக்கு உட்பட்டவை. எனவே இக்குலம், ஒரு வட்டக்குலமாக இல்லாவிட்டாலும், ஒரு ஏபெலின் குலமாகும்.

புள்ளிக்குல நிலைமாற்றங்கள் மற்றும் இடப்பெயர்வுச் செயல்களைப் பொருத்து, படிக அலகு மாற்றமிலாதது. ஆனால் சில படிகங்களில், ஒரு அடிப்படை அலகில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அணுக்கள் அமையலாம். அவற்றில் இடப்பெயர்வுச் செயலோ, புள்ளி நிலைமாற்றமோ சமச்சீர் நிலைமாற்றமாக இல்லாமல் இருக்கலாம். ஆனால் அவற்றில் புள்ளி நிலைமாற்றத்தைத் தொடர்ந்து இடப்பெயர்வுச் செயல் ஏற்படுமானால், மொத்த மாற்றம் சமச்சீர் நிலை மாற்றமாக அமையலாம். இது கீழ்க்கண்ட படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 4.4 இரு மடிப்பு, திருகு சமச்சீர் சுழற்சி கொண்ட, ஒற்றைப் பரிமாணப் படிக அமைப்பு

இதில் ஒற்றைப் பரிமாண படிக அலகு காட்டப்பட்டுள்ளது. இதன் படிக அலகு மாறிலி a. புள்ளிகள் (•) படிகப்புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. அவற்றைச் சேர்ந்த அணுக்கள் + மற்றும் ∘ எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன. படிக அலகு இடப்பெயர்வுத் திசையிக்கள் $\vec{a}$ இன் மடங்குகளாகும். மேலும் (2n+1)a/2 இடப்பெயர்வும், அதைத் தொடர்ந்த இரு மடிப்புச் (π கோணம்) சுழற்சியும், படிகத்தின் சமச்சீர் நிலைமாற்றமாகும். இத்தகைய செயல், திருகு சுழற்சி எனப்படும்.

இதே போல் ஒரு படிகத்திற்கு ஒரு தளத்தில் பிரதிபலிப்பைத் தொடர்ந்த இடப்பெயர்வுச் சமச்சீர் நிலைமாற்றமாகும். இதில் படிகம் ஒரு நழுவு தளத்தைப் (Glide Plane) பெற்றது என்பர். இவ்வாறு ஒரு முப்பரிமாண படிகத்தில் அமையும் அனைத்து நிலைமாற்றங்களின் குலம் ஒரு வெளிக்குலம் (space group) எனப்படும்.

ஒரு வெளிக்குலத்தின் ஒவ்வொரு செயலும் ஒரு புள்ளிக்குலச் செயலைத் தொடர்ந்த இடப்பெயர்வைக் கொண்டதாகும். எனவே வெளிக்குலத்தின் உறுப்பு $\{A \mid \tau\}$ என்று குறிக்கப்படும். இதில் A ஒரு புள்ளிக்குலச் செயலையும், τ இடப்பெயர்வையும் குறிப்பன.

ஒரு திசையிநிலை (Position Vector) யின் மேல் $\{A \mid \tau\}$இன் செயலை

$\{A \mid \tau\}\vec{r} = A\vec{r} - \tau$ எனலாம்.

அடுத்தடுத்த இரு செயல்களைக் குறிப்பிடும் போது,

$\{B \mid \tau_2\}\{A \mid \tau_1\}\vec{r} = \{B \mid \tau_2\}(A\vec{r} - \tau_1) = BA\vec{r} - B\tau_1 - \tau_2$ இதிலிருந்து,

$\{B \mid \tau_2\}\{A \mid \tau_1\} = \{BA \mid B\tau_1 + \tau_2\}$ ஆகும்.

வெளிக்குலத்தின் முற்றொருமை உறுப்பு $\{E \mid 0\}$, நேர்மாறு உறுப்பு $\{A \mid \tau\}^{-1} = \{A^{-1} \mid -A^{-1}\tau\}$ பொதுவாக ஒரு வெளிக்குலம் S என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். பொதுவாக வெளிக்குலத்தில் புள்ளிக்குலச் செயலும், இடப்பெயர்வும் பரிவர்த்திக்கமாட்டா.

4.33 அச்சுச் சுழற்சிக் குலம் (The axial rotation group S0(2))

ஒரு வட்டத்தின் தளத்திற்குக் குத்தாக, மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் அச்சைப் பற்றிய அவ்வட்ட சுழற்சிகளின் கணத்தைக் கருதுவோம். இக்கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒற்றைச் சாராமாறி (parameter) கொண்டு அறியப்படும். அச்சாராமாறி $[0,2\pi]$ இடைவெளிக்குள் அமையும் சுழற்சி கோணம் φ ஆகும். அத்தகைய குலம் அச்சுச் சுழற்சிக் குலம் என்று $SO(2)$ என்ற குறியீட்டால் அறியப்படும்.

சுழற்சி φம் $(\varphi + 2\pi n)$ம் சமமாகும். சுழற்சிக் குலத்தின் உறுப்பு $T(\varphi)$ எனில் உறுப்புகளின் இணைப்பு விதி,

$$T(\varphi)T(\theta) = T(\theta)\,T(\varphi) = \begin{cases} T(\varphi+\theta), & \varphi+\theta < 2\pi \\ T(\varphi+\theta-2\pi), & \varphi+\theta \geq 2\pi \end{cases} \quad \text{எனில்}$$

முற்றொருமை உறுப்பு $T(0)$, $T(\varphi)$ இன் நேர்மாறு உறுப்பு $T(2\pi - \varphi)$.

வட்டத்தின் தளத்தில் அமையும், தேக்காட்டின் ஆயக்கூறுகளின் (cartesian coordinates) நிலைமாற்றங்கள், $SO(2)$ குலத்தின் வகைக்குறிப்பைக் காணப் பயன்படுகின்றன. (x, y) புள்ளியில் $T(\varphi)$ இன் செயல்,

$$T(\varphi)(x,y) \equiv (x',y') = (x,y)\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

மேற்கண்ட வகைக்குறிப்பில் அமையும் அணி, அணித்தரம் 2 கொண்ட செங்குத்து (Orthogonal) அணியாகும். குலத்தின் ஒவ்வொரு

உறுப்பிற்கும், ஒன்றுக்கு–ஒன்று என்ற தொடர்பில் ஒரு 2 x 2 செங்குத்து அணி அமையும். இவ்வணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு +1.

அணித்தரம் 2உம், அணிக்கோவை மதிப்பு +1உம் கொண்ட அனைத்துச் செங்குத்து அணிகளின் கணம், அச்சுச் சுழற்சிக் குலத்துடன் ஒருபடித்தான தொடர்பு கொண்டது. எனவே $SO(2)$ இன் வகைக்குறிப்பாக இக்கணம் அமையும். இவ்வகைக் குறிப்பும் $SO(2)$ என்றே குறிப்பிடப்படும். அச்சுச் சுழற்சிக் குலம் ஏபெலின் குலமாகும். எனவே இதன் ஒடுக்கம்பெறா வகைக்குறிப்பு ஒற்றைப் பரிமாணம் கொண்டது.

4.34 புள்ளிக் குலங்கள் (point groups)

முன்னுரை :

ஒரு படிகம் எனப்படுவது, முப்பரிமாணத்தில் அணுக்களின் சீரான கட்டமைப்பாகும். அத்தகைய படிகத்தின் சமச்சீர் தன்மையானது, அதன் பண்புகளை ஆராய்வதில் முக்கிய இடம் வகிக்கிறது.

படிகத்தில், மின்காந்த அலைகளின் விளிம்பு வளைவு, எலக்ட்ரான்களின் அமைப்பு ஆகியவற்றையும், படிகத்தின் நிறத்தைக் கொடுக்கும் மாசு மற்றும் குறைபாடுகள், மாசு அணுக்களின் பெராகாந்த ஒத்ததிர்வு போன்றவையும் மாசு அணுக்களைச் சூழ்ந்துள்ள சமச்சீர் தன்மையைப் பொருத்ததாகும்.

படிகங்களின் வடிவமைப்புச் சமச்சீர் நிலைமாற்றங்கள் (geometrical symmetry transformations) மூன்று வகைப்படும். அவையாவன,

i) இடப்பெயர்வுகள் (translations)
ii) சுழற்சிகள் (rotations), பிரதிபலிப்புகள் (reflections), நேர்மாறுகள் (inversions)
iii) மேற்கண்டவற்றின் இணைவுச் செயல்கள்

இவற்றுள் சுழற்சிகள், பிரதிபலிப்புகள் மற்றும் நேர்மாறுகள் ஆகியவை புள்ளிச் சமச்சீர் செய்கைகள் எனப்படும். ஒரு பொருளின் நிலைமாற்றங்களில் அப்பொருளின் ஒரே ஒரு புள்ளி மட்டும் இடம் பெயராமல் அமையுமானால், அத்தகைய சமச்சீர் நிலை மாற்றங்களின் குலமானது, ஒரு புள்ளிக்குலம் என்றழைக்கப்படும். எனவே (ii) இம் வகை செய்கைகள் புள்ளிக்குலத்தைச் சேர்ந்தவை.

புள்ளிக் குலங்களில், படிகமைப்புப் புள்ளிக்குலம் (crystallographic point group) மற்றும் மூலக்கூறு புள்ளிக்குலம் (Molecular point group) என்ற வகைகளும் உண்டு.

4.35 படிகமைப்புப் புள்ளிக்குலங்கள் (crystallographic point groups)

படிகமைப்புப் புள்ளிக் குலங்களின் எண்ணிக்கையானது படிகங்களின் இடப்பெயர்வுச் சமச்சீர் தன்மையினால் கட்டுப்படுத்தப்படுகிறது. படிகங்களின் அலகு மூலைகள் (lattice points)ஒன்றுக்கொன்று வடிவொத்தவையாகும். அலகு மூலை ஒன்றின் வழியாக அதற்குக் குத்தாக அமையும் அச்சைப் பற்றி $2\pi/n$ (n ஒரு முழு எண்) சுழற்றும் போது படிகம் வடிவம் மாறா அமைப்பைப் பெறுமானால், அந்த அச்சுக்கு இணையாக வேறொரு அலகு மூலையில் அமையும் அச்சைப் பற்றிய $2\pi/n$ கோணச்சுழற்சியிலும் படிகம் மாறாநிலையை அடையும். இச்சமச்சீர் தன்மையினால் படிகத்தின் புள்ளிக் குலங்களின் எண்ணிக்கை கட்டுப்படுத்தப்படுகிறது.

இவ்வாறு இடப்பெயர்வுச் சமச்சீர் தன்மைக்கு ஏற்ப அமையும் n மடிப்பு $(n-fold)$ சுழற்சிகள் $n = 1,2,3,4$ மற்றும் **6** மதிப்புக்கொண்ட $2\pi/n$ சுழற்சிகளாகும். அவை மொத்தம் **32** படிகமைப்புப் புள்ளிக் குலங்களாகும்.

தேக்காட்டின் ஆயக்கூறு (cartesian coordinates) களின் ஆதி (origin)யைப் புள்ளிகுலங்களின் நிலைமாறாப் (invariant) புள்ளியாகக் கொண்டால் புள்ளிக்குலங்களின் செயல்கள்

i) ஆதி வழியாகப் பாயும் அச்சினைப் பற்றிய சுழற்சி

ii) ஆதி வழியாக அமையும் தளங்களில் பிரதிபலிப்பு

iii) நேர்மாறு (inversion)ஆகியவையாக அமையும்.

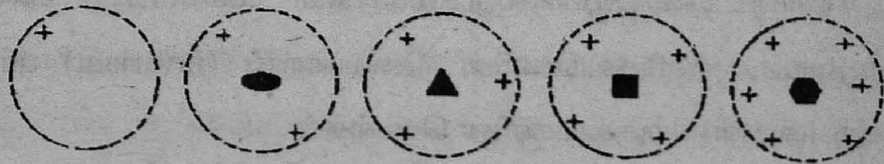
மேற்கண்ட மூன்று வித செயல்களை ஒன்றுக்கொன்று தன்னிச்சையானவையாகக் கொள்ள முடியாது. ஏனெனில் இவற்றில் ஏதாவது இரண்டின் அடுத்தடுத்த செயல்கள் மூன்றாவது செயலுக்கு ஒப்பாக அமையலாம். உதாரணமாக முதலில் ஆதிவழியாகப் பாயும் அச்சினைப் பற்றிய π அளவு சுழற்சிக்குப் பிறகு அவ்வச்சுக்குக் குத்தான தளத்தில் ஏற்படும் பிரதிபலிப்பானது நேர்மாறு செயலை (inversion operation) ஒத்திருக்கலாம்.

4.36: 32 புள்ளிக் குலங்களின் உருவாக்கம்

இப்போது முப்பரிமாணத்தில் மேற்சொன்ன 32 புள்ளிக் குலங்களையும் வரிசைப்படுத்துவோம். பொதுவாக ஒரு n பக்க பலகோண அமைப்பின் வடிவ மையத்தில், தளத்திற்குக் குத்தாக அமையும் அச்சைப் பற்றிய, $2\pi/n$ சுழற்சியானது ஒரு சமச்சீர் செயலாகும் (symmetry operation).

n சுழற்சிகளை உள்ளடக்கிய வட்டச்சுழற்சிக் (cyclic) குலமானது $(C_n, C_n^2, C_n^3, \ldots\ldots C_n^n = E)$ ஆகும். இது C_n எனப்படும்.

படிகங்களில் இடப்பெயர்வுச் சமச்சீர் தன்மைக்கு ஏற்ப அமையும் சுழற்சிக் குலங்கள் C_1, C_2, C_3, C_4 மற்றும் C_6 மட்டுமேயாகும். இவற்றின் வடிவமைப்புகள் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகின்றன.



படம் 4.5

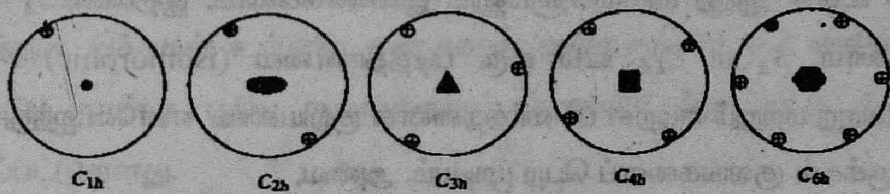
இவை, ஒரு தளத்தில் அணுக்களின் வீச்சுகளைக் (projections) காட்டுகின்றன. இதில் காட்டப்படும் படங்களில் ஒரு தளத்திற்கு மேல் அமையும் புள்ளிகளை + குறியாலும் தளத்திற்குக் கீழ் அமையும் புள்ளிகளை ∘ குறியாலும் காட்டுகிறோம். சுழற்சி அச்சின் தன்மையை வட்டத்தின் மையத்தில் அமையும் அடையாளத்தால் அறியலாம். இதன்படி, இருமடிப்பு (two fold) அச்சை நீள்வட்டத்தாலும் மும்மடிப்பு (three fold) அச்சை ஒரு முக்கோணத்தாலும் நான்கு மடிப்பு அச்சை ஒரு சதுரத்தாலும் ஆறு மடிப்பு அச்சை ஒரு அறு கோணத்தாலும் குறிக்கிறோம். இந்த அடையாளங்கள் வரம்புகளால் (boundary) மட்டுமே காட்டப்படுமானால் அவை n மடிப்பு முறையற்ற (improper) சுழற்சிகளைக் குறிக்கும்.

இதில் முறையற்ற சுழற்சி எனப்படுவது ஒரு பிரதிபலிப்பு அல்லது நேர்மாறு செய்கைக்குப் பிறகு தொடர்ந்து வரும் சுழற்சியாகும்.

மேலும் ஒரு சமச்சீர் உறுப்பைச் சேர்த்துப் புதிய ஐந்து குலங்களைக் காண்போம். அச்சமச்சீர் உறுப்பானது σ_h எனக்குறிப்பிடப்படும் கிடைத்தளப் பிரதிபலிப்பாகும். C_{1h} எனப்படும் ஈருறுப்புக் குலத்தைக் (E, σ_h) கருதுவோம். செங்குத்து அச்சைப் பற்றிய சுழற்சியுடன் σ_h பரிவர்த்திக்கும் என்பதைக் கருத்தில் கொண்டு C_{nh} என்ற குலத்தை உருவாக்குவோம். C_{nh} ஆனது C_n மற்றும் (E, σ_h) குலத்தின் நேரடிப்

பெருக்கல் குலமாகும். இது $C_{nh} = C_n \otimes C_{1h}$ ஆகும். இக்குலம் $2n$ உறுப்புகளைக் கொண்டது.

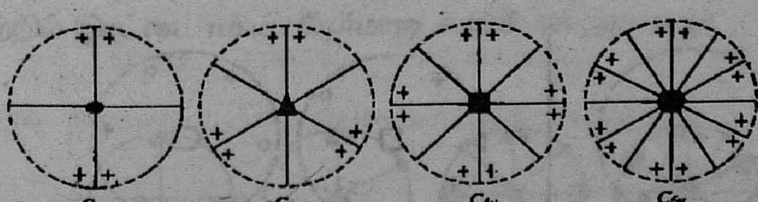
இவற்றின் வடிவமைப்புக் கிடைத்தளப் பிரதிபலிப்புத் தளத்தைக் குறிக்கும் முழு வட்டங்களால் ஆனதாகும்.



படம் 4.6

படம் 4.5ல் அமையும் கடைசி நான்கு குலங்களுடனும் n மடிப்புச் செங்குத்து அச்சின் வழியாக அமையும் பிரதிபலிப்புத் தளத்தைச் சேர்த்து மேலும் நான்கு குலங்கள் அமைகின்றன. இத்தகைய பிரதிபலிப்புத் தளமானது மற்ற, $n-1$ தளங்களையும் குறிப்பதாகும். இக்குலங்கள் C_{nv} எனக் குறிக்கப்படும். அவை படம்(4.7) இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

பிரதிபலிப்புத் தளங்கள் கோடுகளாகக் காட்டப்பட்டுள்ளன. இதில் பிரதிபலிப்பும் சுழற்சியும் பரிவர்த்தனைக்கு (commute) உட்பட்டவை அல்ல. எனவே இக்குலத்தை இரு சிறு குலங்களின் நேரடிப் பெருக்கல் குலமாகக் கருத முடியாது. எனினும் இதில் $2n$ உறுப்புகள் உள்ளன.



படம் 4.7

C_1இன் கிடைக்கோடு மற்றும் செங்குத்துக்கோடுகள் பிரித்தறிய முடியாதவை. எனவே C_{1v} என்ற புதிய குலம் அமைய முடியாது. அல்லது C_{1v}உம் C_{1h}உம் ஒன்றே.

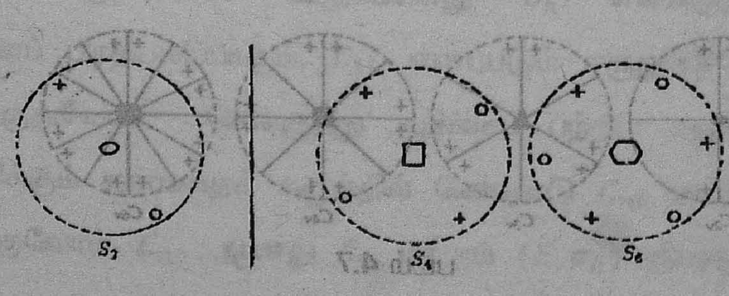
இப்போது நேர்மாறு சமச்சீர் (inversion symmetry) J ஐப் படம் **(4.5)** இல் உள்ள ஐந்து குலங்களுடனும் இணைக்கலாம். இதனை $S_2 = (E, J)$ எனலாம். S_2 ம் C_{1h} உம் ஒரு படித்தானவை (isomorphic) . மேலும் நேர்மாறு மற்றும் சுழற்சி பரிவர்த்தனைக் குறியவை. எனவே ஐந்து நேரடிப் பெருக்கல் குலங்களைப் பெற முடியும். அவை,

$$S_{2n} = C_n \otimes S_2$$

ஆனால் இவற்றின் அனைத்துக் குல ங்களும் வெவ்வேறானவை அல்ல. உண்மையில், n இரட்டை $(n = 2,4,6)$ எனில், $C_n \otimes S_2$ ஆனது C_{nv} யை ஒத்திருக்கும். $n = 1$ மற்றும் **3**க்கான புதிய குலங்கள் S_2 மற்றும் S_6 ஆகும்.

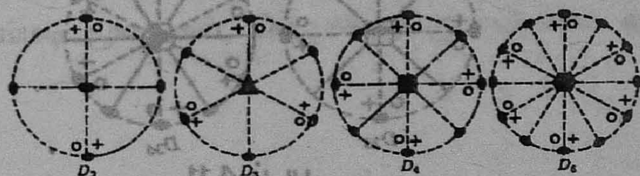
இதுவரை கண்ட அனைத்துப் புள்ளிக் குலங்களிலிருந்து வேறுபட்ட மூன்றாவது குலம் S_4 ஆனது நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்டது. அவ்வுறுப்புகள் JC_4 இன் மடங்குகளாகும். அதாவது $S_4 = (E, S_4, C_4^2, S_4^3)$. இதில் $J^2 = E$ ஆகும். இவை படம் **4.8**இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

S_2 மற்றும் S_6 சமச்சீர் குலங்கள் நேர்மாறு சமச்சீர் தன்மையைக் கொண்டவை. ஆனால் S_4 அவ்வாறல்ல. S_2 மற்றும் S_6 முறையே $C_1 \otimes S_2$ மற்றும் $C_3 \otimes S_2$ என்ற நேரடிப் பெருக்கல் குல்ங்களாகும். ஆனால் S_4 குலமானது சிறிய குலங்களின் நேரடிப் பெருக்கல் குலமல்ல.



படம் **4.8**

மேலே விவாதிக்கப்பட்ட 17 குலங்களும் n மடிப்புச் சமச்சீர் கொண்ட ஒரே ஒரு அச்சைக் கொண்டவை. இப்போது செங்குத்து அச்சுடன் கிடைத்தளத்திலும் சமச்சீர் அச்சுகளைக் கொண்டு புதிய குலங்களை உருவாக்க முடியும். m மடிப்புச் சமச்சீர் கிடைத்தள அச்சுடன், n மடிப்புச் சமச்சீர் செங்குத்து அச்சையும் இணைப்பது, m மடிப்புச் சமச்சீர் கிடைத்தள அச்சுகள் உள்ளன என்பதைக் குறிக்கும். $m = 2$ எனில் D_n எனப்படும் நான்கு புதிய குலங்களைப் பெறலாம். இது படம் 4.9இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

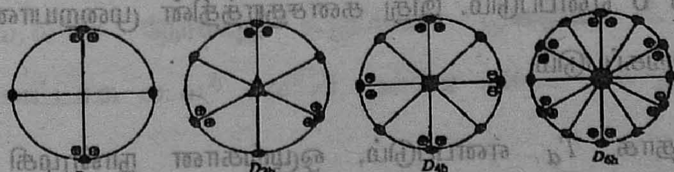


படம் 4.9

இப்போது படம் 4.6இல் காட்டப்பட்ட ஐந்து C_{nh} குலங்களுடனும் இரண்டு மடிப்புக் கிடை அச்சுகளை இணைப்போம். இதனால் படம் 4.10இல் காட்டப்பட்ட D_{nh} என்று நான்கு புதிய குலங்களைப் பெறலாம்.

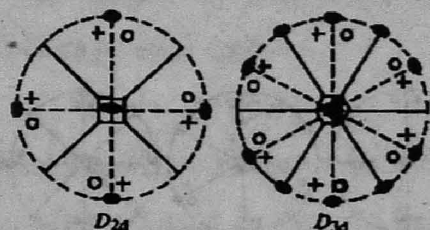
இரண்டு மடிப்புக் கிடை அச்சுடன் இணைந்த C_{1h} குலமானது C_{2v} குலத்தை ஒத்திருக்கும். D_n குலங்களுடன் கிடைமட்ட ஆடித்தள இணைப்பினால் குலம் D_{nh} எழுந்தது எனலாம். படம் 4.9 மற்றும் படம் 4.10ஐ

ஒப்பிட இதை உணரலாம். D_{nh} குலங்கள் $4n$ உறுப்புகளைக் கொண்டவை. இவற்றில் இரட்டை nக்கு நேர்மாறு சமச்சீராக அமையும்.



படம் 4.10

இறுதியாக D_n குலங்களின் இருமடிப்புக் கிடை அச்சுகளின் இடையில் அமையும் கோணங்களின் இரு சம வெட்டிகளாக மூலைவிட்டப் (diagonal) பிரதிபுலிப்புத் தளங்களை அமைத்து இரு குலங்களைப் பெறலாம். அவை D_{nd} எனப்படும். இதில் $n = 2$ மற்றும் 3. இவை படம் 4.11இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.



படம் 4.11

மேலே காணப்பட்ட 27 குலங்களும் ஒரு n மடிப்பு முதன்மை அச்சையும் கிடைத்தளத்தில் n இரட்டை மடிப்பு அச்சுகளையும் கொண்டவையாகும். இக்குலங்கள் எளிய புள்ளிக்குலங்கள் (simple point groups) எனப்படும். இவை இரட்டைப் பரிமாணத்தில் படிக அமைப்புகளை விவரிப்பவை.

முப்பரிமாணத்தில் மிகப்பெரிய குலம், 48 உறுப்புகளைக் கொண்ட O_h எனப்படும் கனசதுரத்திற்கான புள்ளிக் குலமாகும். இதில் 24 உறுப்புகள் முறையான (proper) சுழற்சிகளையும் 24 உறுப்புகள் முறையற்ற (improper) சுழற்சிகளையும் குறிப்பவை.

முறையான 24 ச்ழற்சிகளைக் கொண்ட குலம் O_h இன் துணைக்குலம் 0 எனப்படும். இது கனசதுரத்தின் முறையான சுழற்சிக் குலம் என வழங்கப்படும்.

அடுத்ததாக T_d எனப்படும், ஒழுங்கான நான்முகி (Regular Tetrahedron) யின் சமச்சீர் குலம். இது 24 உறுப்புகளைக் கொண்டது.

இதன் துணைக்குலம் T எனப்படுவது நான்முகியின் 12 முறையான சுழற்சிகளைக் கொண்டது.

இறுதியாக T மற்றும் (E,J) எனப்படும் நேர்மாறு குலத்தின் நேரடிப் பெருக்கல் குலம் $T_h = T \otimes (E,J)$ ஒரு சமச்சீர் புள்ளிக்குலமாகும்.

இவ்வாறு 32 விதமான சமச்சீர் குலங்கள், படிகப் புள்ளிக்குலங்கள் எனப்படும்.

மாதிரி – 1

எண் 1இன் மும்மடி மூலங்கள், பெருக்கலுக்கு ஏபெலின் முடிவுறு குலம் எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

குலம் $G = \{1, \omega, \omega^2\}, \omega^3 = 1$ இக்குலத்தின் பெருக்கல் அட்டவணை படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

i) பெருக்கல் அட்டவணையில் அனைத்து உறுப்புகளும் Gஐச் சேர்ந்தவை. இது அடங்கும் பண்பைக் காட்டும்.

ii) முற்றொருமை உறுப்பு 1

iii) $1, \omega, \omega^2$ன் நேர்மாறு உறுப்புகள் முறையே $1, \omega^2, \omega$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக $\omega.\omega^2 = \omega^3$=1 எனவே wம் ω^2உம் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு.

iv) சேர்ப்பு விதி $(1.\omega)\omega^2 = \omega.\omega^2 = \omega^3$=1

$1.(\omega,\omega^2) = 1(\omega^3) = 1$

இது ஏபெலின் குலம் என்பதை நிரூபிப்போம்.

$\omega.\omega^2 = \omega^3 = 1$

$\omega^2.\omega = \omega^3 = 1$

எனவே $\omega.\omega^2 = \omega^2.\omega$ அனைத்து உறுப்புகளுக்கும் இது பொருந்தும்.

மாதிரி–2 பெருக்கலுக்கு உட்பட்ட, சுழி தவிர்த்து அனைத்துக் கலப்பின எண்களின் குலம் G இன் துணைக்குலம் $s = \{1, i, -1, -i\}$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

முதன்மைக் குலம் $(G,\circ)$ என்போம்.

G ஆனது உறுப்புகளையும் $\circ$ ஆனது பெருக்கலையும் குறிக்கும். துணைக்குலம் $(S,\circ)$ என்போம்.

இதில் (i)

$$1 \circ i = i \in s;\ i \circ (-1) = -i \in s$$

$$1 \circ (-1) = -1 \in s;\ i \circ (-i) = 1 \in s$$

$$1 \circ (-i) = -i \in s;\ (-1) \circ (-i) = i \in s$$

(ii) முற்றொருமை எண் 1

(iii) 1இன் நேர்மாறு 1, i இன் நேர்மாறு $-i$, -1இன் நேர்மாறு -1, $-i$இன் நேர்மாறு i

எடுத்துக்காட்டாக $(-i) \circ (i) = -i^2 = 1$

(iv) சேர்ப்பு விதி

$$i \circ (-i \circ -1) = i \circ i = i^2 = -1$$

$$(i \circ -i) \circ -1 = (-i^2) \circ -1 = 1 \circ -1 = -1$$

எனவே $(S,\circ)$ ஆனது $(G,\circ)$இன் துணைக்குலமாகும்.

மாதிரி 3 :

2 அல்லது 3ஆம் வரிசை குலங்கள், வட்டக்குலங்கள் எனக்காட்டுக.

தீர்வு : இரண்டாம் வரிசைக்குலத்தின் உறுப்புகள் E மற்றும் A என்போம். E முற்றொருமை உறுப்பு.

	E	A
E	E	A
A	A	E

மேலும் $EA = A$

$AA = A^2$ஆம் குலத்தின் உறுப்பு எனில் $A^2 = E$ அல்லது A. ஆனால் $A^2 \neq A$ எனவே $A^2 = E$. எனவே குலம் $\{A, A^2 = E\}$ ஒரு வட்டக்குலமாகும். மூன்றாம் வரிசைக்குலம் $\{E, A, B\}$ என்க. இதில் $A.A = A^2$ குலத்தின் உறுப்பாகும். எனவே $A^2 = E$ அல்லது A அல்லது B ஆகும். ஆனால் $A^2 \neq E$ ஏனெனில் 3ஆம் வரிசைக் குலத்திற்கு 2ஆம் வரிசைக்குலம் துணைக்குலமா காது.

மேலும் $A^2 \neq A$ ஏனெனில் $A \neq E$ மற்றும் $A^2 \neq B$ எனவே குலத்தின் உறுப்புகள் E, A, A^2.

மேலும் $A.A^2 = A^3$ குலத்தின் உறுப்பாகும். எனவே $A^2 = E$ அல்லது A அல்லது A^2. ஆனால் $A^3 \neq A$. ஏனெனில் $A^2 \neq E$ மற்றும் $A^3 \neq A^2$, $A \neq E$ அல்லது $A^3 = E$ ஆகும். எனவே 3ஆம் வரிசைக்

குலத்தின் உறுப்புகள் $A, A^2, A^3 = E$ ஆகும். $\{E, A, A^2\}$ ஒரு வட்டக்குலமாகும்.

பயிற்சி 4.1

1. துணைக்குலத்தைக் கொண்ட ஒரு குலத்திற்கான எடுத்துக்காட்டைத் தருக. துணைக்குலத்திற்கன பெருக்கல் அட்டவணையைத் தயார் செய்க.

2. ஒரு வட்டக்கலத்தின் ஒவ்வொரு துணைக்குலமும் வட்டக்குலம் என்பதை நிரூபிக்க.

3. வரையறு (a) குலம் (b) துணைக்குலம் (c) இனம்.

4. ஆறு உறுப்புகள் கொண்ட D_3 குலத்தின் உறுப்புகள்

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix};$$

குலத்தின் பெருக்கல் அட்டவணையைத் தயார் செய்க. மேலும் இக்குலம் ஏபெலின் குலம் அல்ல எனக்காட்டுக.

5. ஒரு குலத்தின் அணி வகைக் குறிப்பு என்றால் என்ன? ஒரு குறிப்பிட்ட வகைக்குறிப்பில் குலத்திலுள்ள ஒரு உறுப்பின் பண்புக்கோவையை வரையறு.

6. வகைக்குறிப்பின் கோட்பாட்டை விவரிக்க. குலக்கொள்கையின் செங்குத்துத் தேற்றத்தை நிரூபிக்க.

7. ஒரு குலத்தின் சமமான வகைக்குறிப்புகள் ஒரே பண்புக்கோவை கணத்தைப் பெற்றிருக்கும் எனக் காட்டுக.

8. ஒரு முடிவுறு குலத்தின், ஒடுக்கம்பெறா வகைக்குறிப்புகளின் பண்புக்கோவைகள் குல உறுப்புகளின் வெளியில், செங்குத்துத் தொகுதியை உருவாக்கும் எனக்காட்டுக.

மேற்கோள் நூல் பட்டியல்

1. குப்தா – பி. டி (2004) – கணித இயற்பியல், மூன்றாம் பதிப்பு – விகாஸ் பிரசுர இல்லம், புதுடெல்லி.

2. தாஸ் – எச்.கே (2003) – கணித இயற்பியல், நான்காம் திருத்திய பதிப்பு எஸ். சாந்த் கம்பெனி, புது டெல்லி.

3. வெபர் ஜே மற்றும் ஆர்ஃபெக்கென். பி (2005) – இயற்பியல் அறிஞருக்கான கணித முறைகள் – முதல் இந்திய மறுபதிப்பு – எல்சேவியர், புதுடெல்லி.

4. ஜோஷி ஏ. டபுள்யு (2005) – இயற்பியல் அறிஞருக்கான குலக்கொள்கை அடிப்படைகள். – நான்காம் பதிப்பு, நியூ ஏஜ் இன்டர்நேஷனல் பதிப்பாளர்கள், புதுடெல்லி.

கலைச்சொற்கள்

கணித இயற்பியல்

அடங்கும் பண்பு	-	Closure Property
அடுக்கு	-	Power
அடுக்குக்குறி	-	Exponential
அடுக்குத் தொடர்	-	Power Series
அரங்கம்	-	Domain
அருகாமைப் பகுதி	-	Neighbourhood
அணி	-	Matrix
அணிக்கோவை	-	Determinant
அணித்தரம்	-	Order of Matrix
அணி மூலகம்	-	Matrix Element
அலகு அணி	-	Unit Matrix
சமமூலை வரை அணி	-	Diagonal Matrix
செங்குத்து அணி	-	Orthogonal Matrix
செங்குத்து அலகு அணி	-	Unitary Matrix
பூச்சியமில் கோவை அணி	-	Non-Singular Matrix
முற்றும் பூச்சிய அணி	-	Null Matrix
ஆதி	-	Origin
இரண்டாம் படி	-	Second Degree
இரண்டாம் வரிசை	-	Second Order
இனம்	-	Class
இணையிய	-	Conjugate
இயற்கணிதம்	-	Algebra
ஈருறுப்பு	-	Binomial
உருவரை	-	Contour
எச்சம்	-	Residue
எண்ணளவு	-	Modulus
எல்லை	-	Limit
ஒடுக்கத்தக்க	-	Reducible
ஒடுக்கம்பெறா	-	Irreducible
ஒருங்கும்	-	Convergent
ஒருபடித்தான	-	Isomorphic
கரு	-	Kernal
கலப்பின	-	Complex
கணம்	-	Set

மேற்கோள் நூல் பட்டியல்

1. குப்தா பி. டி (2004) கணித இயற்பியல், மூன்றாம் பதிப்பு – விகாஸ் பிரசுர இல்லம், புதுடெல்லி.

2. தாஸ் – எச்.கே (2003) கணித இயற்பியல், நான்காம் திருத்திய பதிப்பு எஸ். சாந்த் கம்பெனி, புது டெல்லி.

3. வெபர் ஜே மற்றும் ஆர்ஃப்கென். பி (2005) இயற்பியல் அறிஞருக்கான கணித முறைகள் – முதல் இந்திய மறுபதிப்பு – எல்சேவியர், புதுடெல்லி.

4. ஜோஷி ஏ. டபுள்யு (2005) – இயற்பியல் அறிஞருக்கான குலக்கொள்கை அடிப்படைகள் – நான்காம் பதிப்பு, நியூ ஏஜ் இன்டர்நேஷனல் பதிப்பாளர்கள், புதுடெல்லி.

கலைச்சொற்கள்

கணித இயற்பியல்

அடங்கும் பண்பு	-	Closure Property
அடுக்கு	-	Power
அடுக்குக்குறி	-	Exponential
அடுக்குத் தொடர்	-	Power Series
அரங்கம்	-	Domain
அருகாமைப் பகுதி	-	Neighbourhood
அணி	-	Matrix
அணிக்கோவை	-	Determinant
அணித்தரம்	-	Order of Matrix
அணி மூலகம்	-	Matrix Element
அலகு அணி	-	Unit Matrix
சமமூலை வரை அணி	-	Diagonal Matrix
செங்குத்து அணி	-	Orthogonal Matrix
செங்குத்து அலகு அணி	-	Unitary Matrix
பூச்சியமில் கோவை அணி	-	Non-Singular Matrix
முற்றும் பூச்சிய அணி	-	Null Matrix
ஆதி	-	Origin
இரண்டாம் படி	-	Second Degree
இரண்டாம் வரிசை	-	Second Order
இனம்	-	Class
இணையிய	-	Conjugate
இயற்கணிதம்	-	Algebra
ஈருறுப்பு	-	Binomial
உருவரை	-	Contour

எச்சம்	-	Residue
எண்ணளவு	-	Modulus
எல்லை	-	Limit
ஒடுக்கத்தக்க	-	Reducible
ஒடுக்கம்பெறா	-	Irreducible
ஒருங்கும்	-	Convergent
ஒருபடித்தான	-	Isomorphic
கரு	-	Kernal
கலப்பின	-	Complex
கணம்	-	Set
கால வட்டம்	-	Period
காலவட்ட ஒழுங்குடைய	-	Periodic
கிளைத் தேற்றம்	-	Corollary
கீழ்க் குறியீடு	-	Subscirpt
குலம்	-	Group
இடப்பெயர்வுக் குலம்	-	Translation Group
இயல்நிலை துணைக்குலம்	-	Normal Sub Group
குலத்தின் வரிசை	-	Order of the Group
காரணிக் குலம்	-	Factor Group
சுழற்சிக் குலம்	-	Rotation Group
தனித்தனி குலம்	-	Discrete Group
துணைக்குலம்	-	Sub Group
தொடர்ச்சி குலம்	-	Continuous Group
புள்ளிக்குலம்	-	Point Group
முடிவிலி குலம்	-	Infinite Group
முடிவுறு குலம்	-	Finite Group
வட்டக்குலம்	-	Cyclic Group
வெளிக்குலம்	-	Space Group

கூற்றுக்கணம்	-	Coset
கோண விகிதச் சார்பு	-	Trigonometric Function
கோண வீச்சம்	-	Argument
கோண தூர வடிவம்	-	Polar Form
கோளக கோண தூர ஆயங்கள்	-	Spherical Polar Coordinator
சமச்சீர்	-	Symmetry
சார்பு	-	Function
சாராமாறி	-	Parameter
சிறப்பியல் திசையி	-	Eigen vector, Characteristic vc
சிறப்பியல் மதிப்பு	-	Eigen value, Characteristic val
சிறப்புச் சார்பு	-	Special function
சிறப்புத் தீர்வு	-	Particular integral
சிறப்புப் புள்ளி	-	Singular point
சீரிசை அலைவி	-	Harmonic oscillator
செங்குத்துத் தன்மை	-	Orthogonality
செங்குத்துப் படித்தரம்	-	Orthonormal
தடம்	-	Trace
திசையி	-	Vector
திசையிலி	-	Scalar
திசையி நிலை	-	Position vector
திசைவில்	-	Azimuthal
திரும்புச் சார்பு	-	Periodic function
திரும்பு தொடர்பு அல்லது மடங்கும் தொடர்பு	-	Recurrence relation
துணைக்கோட்பாடு	-	Lemma
துணைத் தீர்வு	-	Complementary function
தேக்காட்டின் ஆயக்கூறு	-	Cartesian coordinate
தொகை	-	Integral
தொகை காண்	-	Integrate

நான்முகி	-	Tetrahedron
நிரல்	-	Column
நிறுவல்	-	Deduction
நிலைமாற்றம்	-	Transformation
நேர்போக்கு	-	Linear
நேர்மாறு	-	Inverse
பகுமுறைச் சார்பு	-	Analytic function
படிக மாறிலி அலகு	-	Lattice constant
படிக அலகு மூலை	-	Lattice point
படித்தரச் செங்குத்து ஆயக்கூறு	-	Orthonormal basis
பரிமாணம்	-	Dimension
பரிவர்த்திக்கும்	-	Commutative
பல்லுறுப்பு	-	Polynomial
பல படித்தான	-	Homomorphic
பிறப்பிப்பான்	-	Generator
மடிப்புத் தேற்றம்	-	Convolution theorem
n - மடிப்பு	-	n - fold
மாறி	-	Variable
மாறிலி	-	Constant
மாற்றமிலா	-	Invariant
முழுத்தீர்வு	-	Complete integral
முற்றொருமை	-	Identity
முனைவு	-	Pole
யாதாமொரு	-	Arbitrary
வகைக்குறிப்பு	-	Representation
வகைக் குறிப்பின் பண்புக்கோவை	-	Characters of representation
வகைக்கெழு	-	Differential coefficient
வகையிடத்தக்க	-	Differentiable

MADURAI KAMARAJ UNIVERSITY DR. T.P.M. LIBRARY 69069