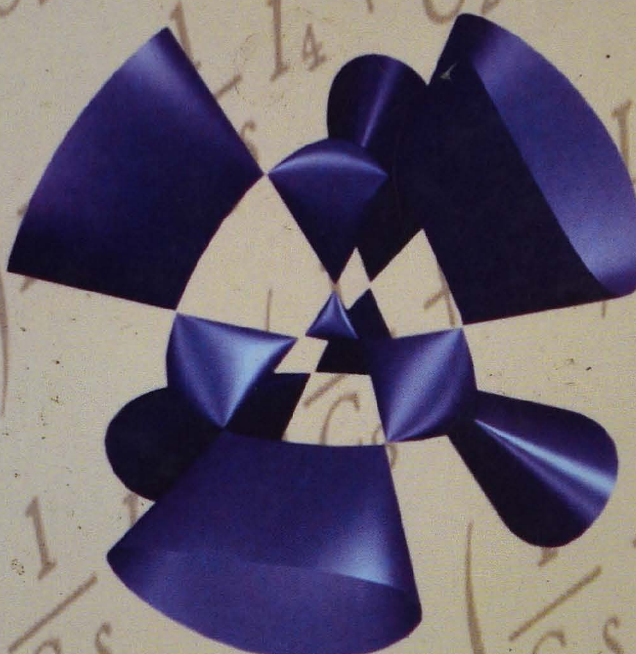
கணித இயற்பியல்

பகுதி-1



முனைவர். ஜே. பூங்கொடி

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
காமராஜர் சாலை, சென்னை-600 005.

கணித இயற்பியல்
பகுதி – I

முனைவர் ஜே. பூங்கொடி

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை – 600 005.

முதற் பதிப்பு	:	2011
பதிப்புரிமை	:	தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம் சென்னை – 600 005
நூலின் பெயர்	:	கணித இயற்பியல் பகுதி – I
நூலாசிரியர்	:	முனைவர். ஜே. பூங்கொடி துணைப் பேராசிரியர், இயற்பியல் துறை, காமராஜ் கல்லூரி, தூத்துக்குடி – 628 003
மறு ஆய்வு செய்தவர்	:	முனைவர் ஆர். சபேசன், பேராசிரியர், துறைத் தலைவர் (ஓய்வு), இயற்பியல் துறை, அழகப்பா பல்கலைக்கழகம், காரைக்குடி – 630 003
தமிழ் திருத்தம் செய்தவர்	:	திருமதி எஸ். சுவர்ணலதா, இணைப் பேராசிரியர், தமிழ்த்துறை, சி. கந்தசாமி நாயுடு கல்லூரி (ஆண்கள்), அண்ணா நகர் கிழக்கு, சென்னை 600 102.
விலை	:	ரூ.72.00
அச்சிட்டோர்	:	பாவை பிரிண்டர்ஸ் (பி) லிட்., 146, ஜானி ஜான்கான் ரோடு, இராயப்பேட்டை, சென்னை-600 014.

DR. T.M. LIBRARY ★ MADURAI KAMARAJ UNIVERSITY ★
299055

பொருளடக்கம்

அத்தியாயம்	தலைப்பு	பக்க எண்
1	வெக்டார் பகுப்பாய்வு	1
2 (a)	அணிகள்	131
2 (b)	டென்சார் பகுப்பாய்வியல்	162
3	வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்	185
	கலைச்சொற்கள்	i - xii
	துணைநூல் பட்டியல்	

அத்தியாயம் 1

வெக்டார் பகுப்பாய்வு

(Vector Analysis)

முன்னுரை (Introduction)

1.1 வெக்டாரின் இயற்கணிதம்:

எந்திரவியல், செயல்முறை கணிதம் போன்ற தலைப்புகளின் கீழுள்ள சில முக்கியமான கணக்கு முறைகளை ஆய்வதற்கு அமைந்துள்ள பல வழிகளில் ஒன்றாக வெக்டார் அமைந்துள்ளது.

நாம் காணும் அளவுகளை, கணியங்களை, இயற்பியலிலும், வேறு பல துறைகளிலும், இருவகைப்படுத்தலாம்.

அவையாவன:

1) ஸ்கேலார் அளவு

2) வெக்டார் அளவு.

ஒரு சில கணியங்கள் எண் மதிப்பு மட்டிலும் (magnitude) தெரிந்தாலே, அறுதியிட்டு நிர்ணயிக்கத் தகுந்தனவாக இருக்கின்றன. மூவளவை வெளியில் (3-dimensional space) அவற்றின் திசை என்னவென்று அறிய வேண்டியதில்லை. உதாரணமாக, ஒரு பொருளின் நிறை அல்லது பொருண்மை (mass), நீளம், கன அளவு, உஷ்ணநிலை, வேகம் (speed) போன்றவற்றைக் குறிப்பிடலாம். இவைகளை திசையிலி (scalar) என்று கூறுகிறோம். இவைகளை ஏதோ ஒரு அளவுகோல் அல்லது அலகு (unit) கொண்டு அளந்து, அவ்வளவினை ஒரு மெய் எண்ணால் குறிப்பிடுகிறோம். இதற்கு மாறாக எண் மதிப்போடு, திசையும் சேர்ந்து குறிப்பிட்டால் மட்டுமே உண்மையான பொருள் கொடுக்கும் வேறு சில கணியங்களும்

உள்ளன. அவற்றினை வெக்டார் (Vector) என்கிறோம். உதாரணமாக, திசை வேகம் (Velocity), முடுக்கம் (acceleration), விசை (force) போன்றவைகளைக் குறிப்பிடலாம்.

திசையிலிகளை முழுமையாக குறிப்பிடுவதற்கு

(1) திசையில் அலகையும்

(2) குறிப்பிட்ட திசையிலி கணியம் எவ்வளவு திசையிலி அலகைக் கொண்டுள்ளது என்றும் அறிய வேண்டும்.

ஆனால், வெக்டார்களைக் குறிப்பிடுவதற்கு

(1) வெக்டார் அலகு

(2) குறிப்பிட்ட வெக்டார் கணியம் எவ்வளவு வெக்டார் அலகுகளைக் கொண்டுள்ளது என்ற அறிவு

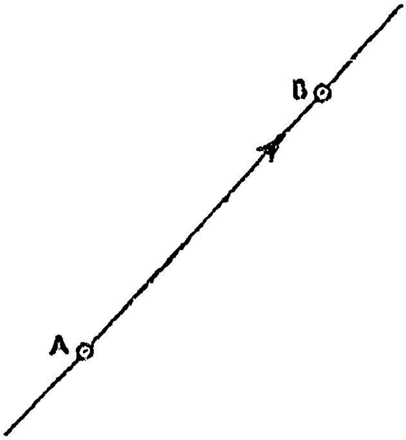
(3) திசைப் பற்றிய குறிப்பு ஆகிய மூன்றும் தேவைப்படுகின்றன.

1.2. திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டுகள் (Directed line segments)

வெக்டாரைக் குறிக்கும் முறை:

வெறும் அளவுகளிலிருந்து வெக்டாரை வேறுபடுத்திக் காட்டுவதற்காக, நாம் அவ்வெழுத்துகளின்மீது தலைக்கோடிட்டுக் காட்டலாம். படத்தின் மூலம் ஒரு வெக்டாரைக் குறிக்க, திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டினைப் பயன்படுத்தலாம். ஆரம்பப் புள்ளி முற்றுப் புள்ளிகளால் வரையறுக்கப்பட்ட, நேர்கோட்டின் எந்த ஒரு பகுதியும் திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டு எனக் கூறப்படும்.

படம் (1)-ல் காட்டியுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டு $\overline{AB}$, A-யினை ஆரம்பப்



படம் 1

புள்ளியாகவும், B-யினை முடிவுப் புள்ளியாகவும் கொண்டு, A-யிலிருந்து B-க்கு என்ற திசையுணர்வையும், கொண்டு விளங்குவதால் $\overline{AB}$, ஒரு வெக்டாரைக் குறிக்கிறது. A-ஐயும், B-ஐயும், இடம் மாற்றினால் இரண்டும் ஒரே திசை நேர்க்கோட்டினைக் குறிக்காது. $\overline{AB}$, ஒரு திசையைக் குறித்தால், $\overline{BA}$ மற்றொரு திசையைக் குறிக்கும். ஆனால், அவை அளவில் மட்டும் சமமாய் இருக்கும்.

1.3. திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டுகளின் சிறப்பியல்புகள்:

ஒவ்வொரு திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டும் பின்வரும் மூன்று இயல்புகளைக் கொண்டுள்ளது:

(1) நீளம்,

(2) ஆதாரம் (support),

(3) திசையுணர்வு (sense).

(1) **நீளம்:** திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டின் நீளமானது $|\overline{AB}|$ என்று குறிக்கப்படும். இதிலிருந்து $\overline{AB}$-யும் $\overline{BA}$-யும் ஒரே நீளமுள்ளவை எனத் தெளிவாகத் தெரிகிறது.

$|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$

(2) **ஆதாரம்:** திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டு எந்த நேர்கோட்டின் பகுதியாக அமைகிறதோ, அந்த நேர்கோடு ஆதாரக் கோடு அல்லது ஆதாரம் எனப்படும்.

(3) **திசையுணர்வு:** $\overline{AB}$-யின் திசையுணர்வு, A-யிலிருந்து B-ஆகவும், $\overline{BA}$-யின் திசையுணர்வு B-யிலிருந்து A-ஆகவும் அமைகிறது. அதாவது நேர்கோட்டுத் துண்டின் திசையுணர்வு, அதன் ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து. முடிவுப் புள்ளியின் திசையில் அமைகிறது. எனவே, $\overline{AB}$-யும், $\overline{BA}$-யும் ஒரே நீளமும் ஆதாரமும் உள்ளனவாயும், ஆனால் வெவ்வேறு திசையுணர்வுகளைக் கொண்டனவாயும் இருக்கின்றன.

1.4 வெக்டாரின் வகைகள்

1. **ஓரலகு வெக்டார் (Unit vector):** ஒரு வெக்டாரின் எண் மதிப்பு ஒருமை (1) என்று இருந்தால், அவ் வெக்டாரை **ஓரலகு வெக்டார்** என்று கூறலாம். $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c},$ எனும் வெக்டார்களின் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டார்கள்

முறையே $\frac{a}{|a|}, \frac{b}{|b|}, \frac{c}{|c|},$ ஆகும். இவற்றை $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c},$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

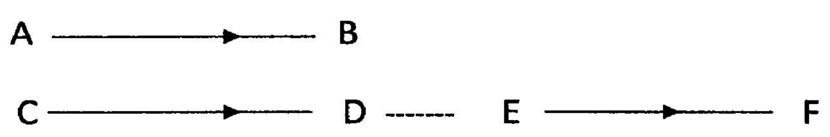
2. **சுழி வெக்டார்** (Null vector or zero vector): எண் மதிப்பு சுழியமாக உள்ள வெக்டார் **சுழி வெக்டார்** எனப்படும். இதன் ஆரம்பப் புள்ளியும், முடிவுப் புள்ளியும் ஒன்றியிருக்கும். எனவே, இதன் திசை நிர்ணயிக்க இயலாது.

3. **ஒ த்த வெக்டார்கள்** (Like vectors): இணையான தாங்கும் கோடுகளையுடைய . வெக்டார்கள் **ஒத்த வெக்டார்கள்** எனப்படும்.

4. **சம வெக்டார்கள்** (Equal vectors): ஒரே அளவான எண் மதிப்பும் ஒரே திசையும் கொண்ட வெக்டார்கள் **சம வெக்டார்கள்** எனப்படும்.

படம் 2-ல் AB = CD = EF எனும்படியும், |AB||CD||EF| எனும்படியும் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன.

$$\therefore \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$$



படம் 2

5. எதிர்மறை வெக்டார் (Negative vector): $\bar{a}$ எனும் வெக்டாரின் எண்மதிப்பும், $\bar{a}$-ன் திசைக்கு எதிர்த்திசையும் உடைய வெக்டாரை $\bar{a}$-ன் **எதிர்மறை வெக்டார்** எனலாம். இதனை (-$\bar{a}$) எனக் குறிப்பிடலாம்.

6. **கட்டிலா வெக்டார்** (Free vector): கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டாரின் தாங்கும் கோட்டிற்கு இணையாக மூவளவை வெளியில், எத்தனையோ. கோடுகள் வரைய இயலும். அக் கோடுகளில் எடுக்கப்படும், திசைக் குறியிட்ட கொடுக்கப்பட்ட வெக்டாரின் எண் மதிப்பிற்கு சமநீளமுள்ள. நேர்கோட்டுத் துண்டுகள் அனைத்தும் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டாருக்குச் சமம். எனவே, வெக்டாரின் ஆரம்பப் புள்ளி குறிப்பிடப்படாத வரையிலும், அவ் வெக்டாரைக் **கட்டிலா வெக்டார்** என்று கூறலாம்.

7. **அறுதியிட்ட வெக்டார்** (Localised vector): வெக்டாரின் ஆரம்பப் புள்ளி அறுதியிட்டுக் கூறப்பட்டு விட்டால், அப் புள்ளி வழியே, கொடுக்கப்பட்ட எண் மதிப்பும் திசையும் கொண்டதாய் ஒரேயொரு வெக்டார்தான் வரைய இயலும். எனவே, இவ்வகை வெக்டார்களை **அறுதியிட்ட வெக்டார்** எனலாம்.

8. **தலைகீழ் வெக்டார்** (Reciprocal vector): $\bar{a}$ எனும் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டாரின் திசையில் அமைந்து ஆனால் எண்ணளவு $\frac{1}{|a|}$ கொண்ட ஒரு வெக்டாரை $(\bar{a})^{-1}$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

$$\bar{a} = a\hat{a} \text{ எனில், } (\bar{a})^{-1} = \frac{\hat{a}}{a} = \frac{1}{a}\frac{\bar{a}}{a} = \frac{\bar{a}}{a^2}$$

1.5. திசையிலிகளமும், வெக்டார்களமும் (Scalar and vector fields)

மூவளவை வெளியில் (three dimensional space) R என்னும் ஒரு பகுதியை (region) எடுத்துக் கொள்வோம். இப்பகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஏதாவதொரு இயற்பியல் பண்புடன் தொடர்புடையதெனக் கொள்வோம். இவ்வியற்பியல் பண்பு ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் தகுந்தவாறு மாறுவதுபோலும், வரையறுக்கப்பட்ட மதிப்பினை உடையதாயும் இருக்குமாறு எழுதப்பட்டுள்ளதெனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் R எனும் மூவளவை வெளியின் பகுதி 'புலம்' எனப்படும்.

புலங்களை 'திசையிலி புலம்'. 'வெக்டார் புலம்' என இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம். இயற்பியல் பண்பு எழுதும் சார்பு, திசையிலி சார்பாயின் 'திசையிலி புலம்' என்றும் வெக்டார் சார்பாயின் 'வெக்டார் புலம்' என்றும் அழைக்கப்படும். இவ்வாறு திசையிலி புலத்தில் இயற்பியல் பண்பு, திசையிலி சார்பினால் கொடுக்கப்படும். புலத்தின் பல்வேறு புள்ளிகளின் இத்திசையிலியின் மதிப்பு மாறுபடும். அதாவது P எனும் ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் அதன் மதிப்பு அப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைச் சார்ந்து அமையும்; எனவே இயற்பியற் பண்பைக் காட்டும் இம்மாறி ஒரு புள்ளியின் நிலையைச் சார்ந்து அமைவதால், இதனை **"திசையிலிப் புள்ளி சார்பு"** (scalar point function) என அழைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, சூடாக்கப்பட்ட பொருள் ஒன்றில் சூட்டின் பரவல் நிலையை ஆராயும்போது, வெவ்வேறு புள்ளிகளில் உள்ள வெப்பநிலையைக் காட்டும் சார்பு, "திசையிலிப் புள்ளி சார்பா"கும்.

பொருள் இடம் கொண்டுள்ள பகுதி வெளிதிசையிலிப் புலமாகும். இதே போன்று, பொருள் அடர்த்திப் பரவலை காட்டும் சார்பு (distribution), மின்சார நிலைசக்தி முதலியன (potential), வேறு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதி வெளியினோடு ஒரு இயற்பியற் பண்பை தொடர்புபடுத்திக் காட்டுவது ஒரு வெக்டார் சார்பானால், அப்புலம் வெக்டார் புலம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, இயங்கிக் கொண்டிருக்கும், பாய்மம்' (fluid) ஒன்றின் பல்வேறு புள்ளிகளின் திசை வேகங்களைக் குறிக்கும் சார்புகள் வெக்டார் சார்புகளாகும். எனவே அப்பாய்மம் இடம் கொண்டுள்ள பகுதி **வெக்டார் புலம்** எனப்படும். ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் பாய்மத்தின் திசைவேகம் ஒரு தொடர்ச்சியான வெக்டார் சார்பாகும். (continuous vector function). ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் அப்பாய்மத்தின் திசை வேகம் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையும், அளவும் கொண்டதாயும், புலம் முழுவதிலும் புள்ளிக்குப் புள்ளிதிசையிலும் அளவிலும் அது தொடர்ச்சியாக மாறுபடுவதாயும் அமைகிறது. இவ்வாறு இயற்பியற் பண்பு ஒன்றினை புள்ளியின் நிலைக்குத் தக்கவாறு தொடர்ச்சியாக மாறக் கூடிய வெக்டார் சார்பாக எழுதுவதைத்தான் **“வெக்டார் புள்ளிச் சார்பு”** (vector point function) என்று கூறலாம்.

(அ) திசையிலிப்புள்ளிச் சார்பின் சரிவு; (Gradient of a scalar function)

S (x, y, z) என்பது மூவளவை வெளியில் ஏதோ ஒரு புள்ளிக்குப் பொருந்தும் ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச்சார்பு எனக் கொள்வோம்.

அப்படியானால் $\left(\hat{\imath}\frac{\partial s}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial s}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial s}{\partial z}\right)$ எனும் வெக்டார், S-ன் சரிவு எனப்படும். இதனை 'சரிவு S' (grad S) எனக் கூறலாம். இந்த புதிய வெக்டாரை வரையறை செய்ய $\frac{\partial s}{\partial x},\frac{\partial s}{\partial y},\frac{\partial s}{\partial z}$ என்ற பகுதி வகைக் கெழுக்களைக்காண இயல வேண்டும். S (x, y, z) எனும் சார்பு தொடர்ச்சியுள்ளதாயும் (continuous) வகைக் கெழுக்காண (differentiable) தகுதியுள்ளதாயும் அமைகின்ற பகுதி முழுவதிலும் இம்மாதிரி 'சரிவு S' எனும் வெக்டாரைக் காண இயலும்.

எனவே சரிவு S = $\hat{\imath}\frac{\partial s}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial s}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial s}{\partial z}=\nabla s \ldots\ldots(1)$

இது ஒரு வெக்டார் களத்தை வரையறுக்கிறது.

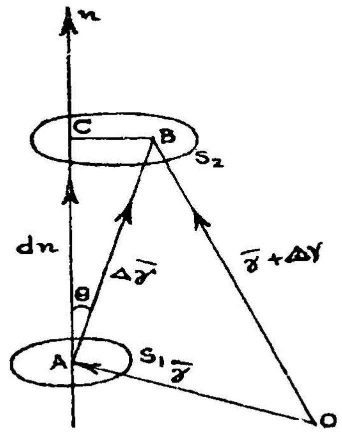
S என்பது ஒரு மாறிலியானால்

$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial z}=0$.எனவே சரிவு S = 0

(ஆ) சரிவு S-ன் வடிவக் கணித விளக்கம்:

ஒரு திசையிலிகளத்தில் S_1, S_2 என்ற அருகேயுள்ள மேற்பரப்புகளை (Surfaces) எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 3). இவைகள் முறையே S_1, S_2, ΔS என்ற திசையிலிப் புள்ளிச் சார்புகளை உடையதாக இருக்கட்டும். எனவே திசையிலிச் சார்பின் மதிப்பு S_1-ல் உள்ள A என்ற எந்த ஒரு புள்ளியிலும் S ஆகவும். S_2-ல் உ ள்ள B என்ற எந்த

ஒரு புள்ளியிலும் S + dS ஆகவும் இருக்கும். O என்பது அச்சுத் தோற்றுவாயானால்,



படம் 3

எனவே

$$\overline{AB} = \Delta\bar{r}$$

$$\overline{OA} = \bar{r}; \; \overline{OB} = r + \Delta\bar{r}$$

A-ல் அதன் வழிச்செல்லும் மேற்பரப்பிற்கு வரையப்படும் நேர் குத்துக்கோடு (normal) வழிச்செல்லும் மேற்பரப்பினை C-ல் வெட்டும். எனவே S_1, S_2-வின் இடையில் உள்ள மிகக் குறுகிய தூரம் AC ஆகும். இதன் நீளம் dn. இது AC -ன் நேர்குத்துத் திசையில் அமைந்துள்ளது. A என்ற புள்ளியில் வெக்டார் AB திசையில் S-ன், மாறு வீதம் $\frac{\partial s}{\partial r}$ ஆகும். $\frac{\partial s}{\partial n}$ என்பது A-ல் வெளி நோக்கிய நேர்க்குத்துக் கோட்டின் வழியே S-ன் மாறுவீதம் ஆகும்.

$< BAC = \theta$ எனில்

AB $\cos\theta$ = AC

அதாவது $\Delta r \cos\theta = \Delta An$

$\therefore$ எல்லை

$$\frac{\Delta n}{\Delta r} = cos\theta$$

$\Delta r \rightarrow \theta$

எனவே $\frac{\partial s}{\partial r}$ = எல்லை $\frac{\Delta s}{\Delta r}$

= எல்லை $\frac{\Delta s}{\Delta n}.\frac{\Delta n}{\Delta r}$

$= \frac{\partial n}{\partial n} \cos\vartheta$

$|\cos\theta| < 1$ ஆகையால் $\frac{\partial s}{\partial r} < \frac{\partial s}{\partial n}$

அதாவது AB-ன் வழியே S-ன் மாறும் வீதம், A-ல் வரையப்படும் நேர்குத்துக்கோட்டின் வழியே மாறும் வீதத்தை விடக்குறைவாகும். AB என்ற திசை நம் விருப்பத்திற்கேற்ப எடுத்துக் கொண்டதாகவும், எனவே, எந்தவொரு புள்ளியிலும் S-ன் மாறும் வீதம் அப்புள்ளியில் வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோட்டின் வழியேதான் மிகக் கூடுதலாய் அமைகிறது.

A-ல் வரையப்படும் செங்கோட்டின் வழியமைந்த ஓரலகு வெக்டார் $\hat{n}$ எனக் கொள்வோம்.

அப்படியானால் $\Delta n = \hat{n}.\ \Delta\bar{r}$ ஆகும்.

$$= \frac{\Delta S}{\Delta n}\Delta n$$

மேலும் $\nabla S = \frac{\Delta S}{\Delta n\,\hat{n}}.\ \Delta\bar{r}$

எனவே $ds \ = \frac{\partial s}{\partial n}\hat{n}\,.\,d\bar{r}$ ……………………………………………..(2)

இதையே சமன்பாடு (1)-ன் மூலம்

$$dS \ = \nabla S\,.\,d\bar{r} \text{ ……………………………………………….(3)}$$

எனவும் எழுதலாம்.

எனவே சமன்பாடுகள் (2), (3)-லிருந்து

$$\nabla S = \frac{\partial s}{\partial n}\hat{n}$$

எனத் தெரிகிறது.

அதாவது ∇S என்பது $\hat{n}$-ன் திசையில் $\frac{\partial s}{\partial n}$ எனும் எண் மதிப்புடன் அமைந்த வெக்டாராகும். $\frac{\partial s}{\partial n}$ என்பது A-ல் S-ன் மிகப் பெரும் மாறுவீதம் (greatest rate of increase) ஆகும். இவ்வாறு ∇S-ன் விளக்கமானது கீழ் வருமாறு கொடுக்கப்படும். திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு S (x,y,z)-ன் சரிவு என்பது S(x,y,z)=C எனும் மேற்பரப்பிற்கு அது அதிகரிக்கும் திசையில் வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோட்டின் திசையில் அமைந்த ஒரு வெக்டாராகும். அதன் அளவு அப்புள்ளியில் அச்சார்பின் மீப்பெருமாறு வீதம் (maximum rate of increase) ஆகும். மேலும் $\frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial s}{\partial n}\cos\theta$ ஆகையால், எத்திசையிலும் சார்பின் திசை வகைக்கெழு, அத்திசையில் சார்பின் சரிவின் வீழ்ச்சிக்கு சமமாகும்.

(இ) முக்கியமான சில வழி முடிவுகள்:

(1) திசையிலிப் புள்ளிச் சார்புகளின் கூட்டலின் சரிவு, தனித் தனிச் சார்புகளின் கூட்டலுக்கு சமம். u,v என்பன திசையிலிப் புள்ளிச் சார்புகள் எனில் $\nabla (u+v) \approx \nabla u + \nabla v$

ஏனெனில்,

$$\nabla (u+v) = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(u+v) + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(u+v) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(u+v),$$

$$\left(\hat{\imath}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\hat{\imath}\frac{\partial v}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial v}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla u + \nabla v.$$

(2) இரு சார்புகளின் பெருக்கலின் சரிவு காணும் முறை:

$$\Delta(uv) = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(uv)$$

$$= \hat{\imath}\left\{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right\} + \hat{\jmath}\left\{u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + \hat{k}\left\{u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$= u\left(\hat{\imath}\frac{\partial v}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial v}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\hat{\imath}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= u\nabla v + v\nabla u.$$

(3) சார்பின் சார்புக்குச் சரிவு காணும் முறை;

v=f(u) எனக் கொள்வோம்.

u என்பது x, y, z-ன் சார்பு

$$\nabla v = \nabla f(u)$$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f(u)$$

$$= f'(u)\left[\hat{\imath}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

$$= f'(u)\,\nabla u$$

இங்கு f' (u) என்பது $\frac{d}{du}[f\,(u)]$ என்பதனைக் குறிக்கிறது, இவ்வாறு சாதாரண வகைக்கெழு காணும் விதிமுறைகளை $\bar{\nabla}$ பின்பற்றுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1:

(1,1,3) என்னும் புள்ளியில் $u=xyz^2$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு அதிகரிப்பு வீதம், எவ்வளவு?

ஒரு புள்ளியில் ஒரு சார்பின் மீப்பெரு அதிகரிப்பு வீதம், அப்புள்ளியில் அச்சார்பின் சரிவினால், திசையிலும் மதிப்பாலும் குறிக்கப்பெறும்.

$$\therefore\ \nabla u = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) xyz^2$$

$$= \hat{\imath}yz^2 + \hat{\jmath}xz^2 + \hat{k}2\,xyz$$

எனவே $(1,1,3)$எனும் புள்ளியில் இதன் மதிப்பு $9\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ ஆகும்.

$\therefore$ மதிப்பு $= |9\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} + 6\hat{k}| = \sqrt{81+81+36} = \sqrt{198}$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$$x^2y + z = 3, x\log z - y^2 = -4$$

என்ற வளை பரப்புகளை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளில் ஒன்றான $(-1,2,1)$-ல் இப்பரப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்ன?

வெட்டும் புள்ளியில் பரப்புகளுக்கு வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் தான், பரப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணமாகும்.

தளத்திற்கு நேர்குத்தான ஓரலகு வெக்டார் $\hat{n} = \frac{\nabla s}{|\nabla s|}$ ஆகும்.

$x^2y + z = 3$ என்ற தளத்திற்கு,

$\nabla S = \hat{\imath}\, 2\,xy + \hat{\jmath}x^2 + \hat{k}$

$\therefore$ ஓரலகு வெக்டார் $\hat{n}, = \frac{\hat{\imath}\, 2\, xy + \hat{\jmath}x^2 + \hat{k}}{\sqrt{4x^2y^2 + x^4 + 1}}$

$(-1,2,1)$-ல் இவ்வெக்டார் $\frac{-4\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}}{\sqrt{18}}$ ஆகும்.

இதே மாதிரி $x \log z - y^2 + 4 = 0$ என்ற பரப்பிற்கு நேர்குத்தான ஓரலகு வெக்டார், $(-1,2,1)$-ல் $\hat{n}_2 = \frac{-4\hat{\jmath} + \hat{k}}{\sqrt{17}}$ ஆகும்.

கருதப்பட்டிருக்கிற வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை தளங்களின் சமன்பாடுகளில் பிரதியிட்டால், மாறுபட்ட குறியீடுடைய மதிப்புகள் தருவதால் வளை பரப்புகளில் ஒன்றின் உள்ளேயும், மற்றதின் வெளியிலுமாக தோற்றுவாய் அல்லது ஆதி அமைகிறது. எனவே வெக்டார் $\hat{n}$ குறியீட்டை மாற்றிக்கொண்டு வெக்டார் n க்கும் வெக்டார் $\hat{n}_2$ -க்கும் அடைபட்டக் கோணமான θ-வைக் காண வேண்டும்.

$$\cos\theta = \hat{n}, \hat{n} = \left(\frac{-4\hat{\imath} + j + k}{\sqrt{18}}\right). \quad \left(\frac{4j + k}{\sqrt{17}}\right)$$

$$= \frac{5}{\sqrt{306}}$$

$$\therefore\ \theta = cos^{-1} \frac{5}{\sqrt{306}} \text{ ஆகும்.}$$

1.6 வெக்டார் சார்பின் பாய்வு: (Divergence of a vector function)

$\bar{F}$ என்பது வெக்டார் புலம் ஒன்றில், வரையறுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு காணத்தக்க ஒரு வெக்டார் புள்ளிச் சார்பு எனக் கொள்வோம். அப்படியானால் புலத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் (x, y, z) $\bar{F}$-ன் மதிப்பு கிடைப்பதுடன், அப்புள்ளியில் அச்சார்பின் வகைக்கெழுவும் காணத்தக்க நிலையில் அச்சார்பு அமையும் இந்நிலையில் $\nabla . \tilde{F}$ என்ப து ஒரு திசையிலியைக் கொடுக்கும். அதுவே $\bar{F}$-ன் பாய்வு எனப்படும். F என்பது $\hat{\imath}F_1 + \hat{\jmath}F_2 + \hat{k}F_3$. என்றிருந்தால்,

$$div\,\bar{F} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right). \ \left(\hat{\imath}F_1 + \hat{\jmath}F_2 + \hat{k}F_3\right).$$

$$div\,\bar{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

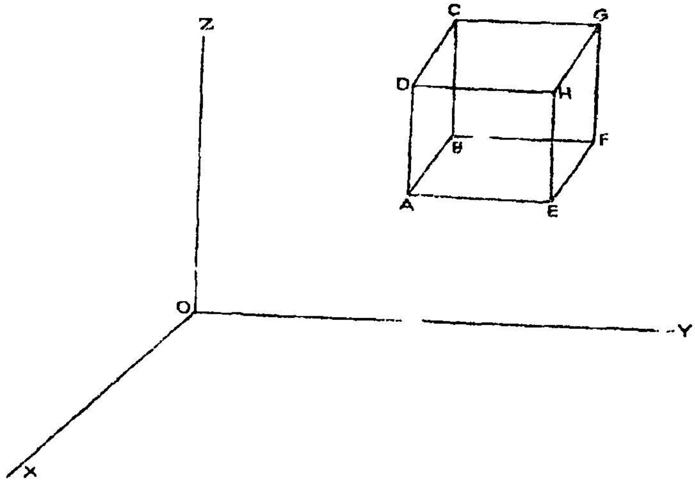
இவ்வாய்ப்பாடு $\bar{F}$ எனும் வெக்டார் சார்பு கொடுக்கப்பட்டால் அதன் பாய்வு காண பயன்படும்.

(அ) ஒரு வெக்டாரின் பாய்வுக்கு இயற்பியல் விளக்கம் (Physical interpretation of a divergence of a vector)

முவளவை வெளியின் ஒரு பகுதியில், இயங்கும் பாய்மம் நிரம்பியுள்ளது எனக் கொள்வோம்.

$A\ (x, y, z)$ எனும் புள்ளியில் பாய்மத்தின் திசை வேகம்

$\bar{V} = \hat{\imath}V_x + \hat{\jmath}V_y + \hat{k}V_z$ எனும் வெக்டார் சார்பினால் குறிக்கப்பெறும் எனக் கொள்வோம். (படம் 4.)



படம் 4

A-ல் ஒரு முனையை உடையதும். dx, dy, dz என்ற நீளங்களை விளிம்புகளாய் கொண்டதுமான ஒரு செவ்வக இணைகரத் திண்மத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இத்திண்மத்தின் ஒரு முகத்தின் வழியாக, ஓரலகு நேரத்தில் பாயும், பாய்மத்தின் தோராய அளவு, அம்முகத்தின் பரப்பினை, அதற்கு நேர்குத்தான திசையில் பாய்மத்தின் திசை வேகத்தினால், பெருக்கினால் கிடைக்கும். படத்தில் காட்டியவாறு $ABCD$ என்ற முகத்தின் வழியே உள் நுழையும் பாய்ம அளவு $\Delta x\, \Delta z\, \Delta y$ ($ABCD$ எனும் தளம் XOZ எனும் தளத்திற்கு இணையாயிருப்பதால் V_x, V_z என்ற திசை வேகக் கூறுகள் $ABCD$-யின் வழி பாயும், பாய்மத்தின் அளவை பாதிப்பதில்லை). $EFGH$ என்ற முகத்தின் வழியே வெளியேறும் அளவு $\Delta x\, \Delta z\, \Delta y + \Delta y = \Delta x\, \Delta z \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} \Delta y\right)$. எனவே OY-க்கு செங்குத்தான இரு முகங்களின் வழி பாய்வதினால் ஏற்படும் குறைவு (decrease)

$$= \Delta x\, \Delta z \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} \Delta y\right) - \Delta x\, \Delta z\, \Delta y$$

$$= \frac{\partial V_y}{\partial y} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

இதே போன்று OZ-க்கு, OX-க்குச் செங்குத்துத் தளங்களின் வழி பாய்வதாலும் $\frac{\partial Vz}{\partial z} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z, \frac{\partial Vx}{\partial x} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ எனும் குறைவுகள் ஏற்படும். எனவே செவ்வக இணைகரத்தின் மத்தியிலுள்ள பாய்ம அளவில் ஓரலகு நேரத்தில் ஏற்படும் மொத்தக் குறைவு $\left(\frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} + \frac{\partial Vz}{\partial z}\right) \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$

∴ ஓரலகு கன அளவில், $(\Delta x\, \Delta y\, \Delta z)$ ஓரல்கு நேரத்தில் மொத்தக் குறைவு

$$= \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z}{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z}$$

$$= \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

இது தான் $\bar{V}$ எனும் வெக்டார் சார்பின் பாய்வு என வரையறுக்கப்பட்டது. எனவே $\bar{V}$ என்பது ஒரு பாய்மத்தின் திசைவேகத்தினைக் குறிக்கும் வெக்டார் எனில் $\nabla . \bar{V}$- அல்லது $\bar{V}$-ன் பாய்வு என்பது குறிப்பிட்ட புள்ளியில் ஓரலகு நேரத்தில், ஓரலகு கன அளவில் அப்பாய்மம் என்ன விகிதத்தில் பாய்கிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. இது போன்று விளக்கம் வேறு வெக்டார் களங்களுக்கும் பொருந்தும். எடுத்துக்காட்டாக $\bar{V}$ என்பது மின் விசைப் பாய்வையோ அல்லது வெப்பம் பாயும் வேகத்தையோ குறித்தால் $\nabla . \bar{V}$- என்பது ஓரலகு நேரத்தில், ஓரலகு கன அளவிற்கு எவ்வளவு மின் விசை

பாய்கிறது அல்லது எந்த விகிதத்தில் வெப்பம் வெளியேற்றப்படுகிறது என்பதைக் காட்டும்.

செயலி ∇ ஒரு மாற்றமிலி. எனவே பாய்வும் கூட ஒரு மாற்றமிலியாகும். பாய்மத்தின் ஒரு புள்ளியில் பாய்வு $(+)$ ஆக இருந்தால், பாய்மம் விரிவடைகிறது என்றோ அல்லது அதன் அடர்த்தி அப்புள்ளியின் நேரத்தைச் சார்ந்து குறைகிறது என்றோ கொள்ள வேண்டும். அப்புள்ளி பாய்மத்தின் "மூலம்" (source) ஆகும். பாய்வு $(-)$ ஆக இருந்தால் பாய்மம் சுருங்குகிறது என்றோ அல்லது அதன் அடர்த்தி அந்த புள்ளியில் அதிகமாகிறது என்றோ கொள்ள வேண்டும். எனவே அப்புள்ளியை "எதிர் மூலம்" அல்லது "உறிஞ்சி" (sink) எனக் கூறலாம். ஒரு பாய்மத்தில் உள்நுழையும் பாய்மமும் (flux) வெளிவரும் பாய்மமும் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருந்தால் பாய்வு $\bar{V}^t = \nabla . \bar{V} = 0$ ஆகும். இவ்வாறு பாய்மத்தின் மூலமோ அல்லது உறிஞ்சியோ இல்லாதிருந்தால், அதனை "இறுகாத் தன்மை" உள்ள (incompressible) பாய்மம் எனக் கூறலாம். $\nabla . \bar{V} = 0$ என்ற சமன்பாட்டினை இறுகாத் தன்மையுள்ள பாய்மங்களின் "தொடர்ச்சிச்சமன்பாடு" (equation of continuity) என்கிறோம். இந்நியதிக்கு உட்பட்ட வெக்டார்களை "**வரிச்சுருள் உருளை வெக்டார்கள்**" (solenoidal vector) எனக் கூறலாம்.

1.7 ஒரு வெக்டாரின் சுழல் (Curl of a vector)

$\bar{F}\ (x, y, z)$ என்பது மூவளவை வெளியின் ஒரு பகுதியில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வரையறுக்கப்பட்டதும், வகைக்கெழுக் காணத் தக்கதுமான, ஒரு வெக்டார் புள்ளிச் சார்பு எனில் $\nabla \times \bar{F}$, என்பது $\bar{F}$-ன் "சுழல்" என அழைக்கப்படும்.

$\bar{F} = \hat{\imath}F_1 + \hat{\jmath}F_2 + \hat{k}F_3$ எனில்,

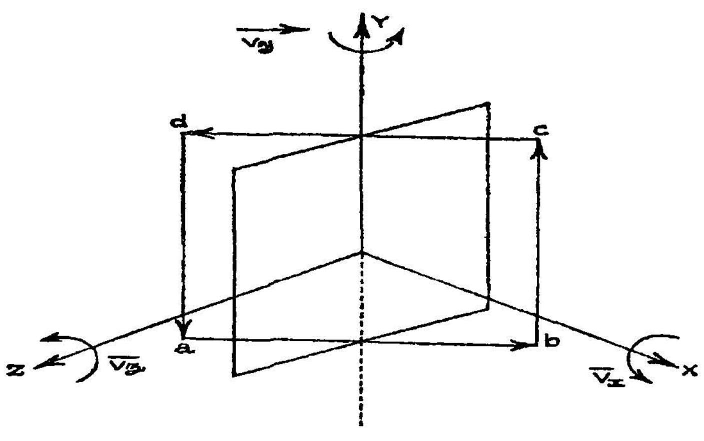
$$\nabla \times \bar{F} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\hat{\imath}F_1 + \hat{\jmath}F_2 + \hat{k}F_3\right)$$

$$= \hat{\imath} \times \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) + \hat{\jmath} \times \hat{k}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{k} \times \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(அ) வெக்டாரின் சுழலுக்கு இயற்பியல் விளக்கம்:



படம் 5

படம் 5-ல் உள்ளபடி Z-அச்சிற்கு, நேர்க்குத்தானதும் அதனைச் சுற்றி குறிப்பிட்ட அம்புக்குறியின் திசையில் வரையப்பட்ட dx, dy என்ற பக்கங்களையுடையதுமான $abcd$ என்ற செவ்வகப்பரப்பை

எடுத்துக்கொள்வோம். dx, dy என்பன மிகமிகச் சிறிய மறையத் தகுந்த மதிப்பினைக் கொண்டவை (vanishingly small). எனவே எந்த ஒரு பக்கத்தின் மையப் புள்ளியிலும் வெக்டார் $\bar{V}$-ன் கூறின் (component) எண் மதிப்பு, அந்தப் பக்கத்தில் அதன் சராசரி மதிப்புக்குச் சமம்.

ab, bc, dc, ad வழியே அதன் சராசரி மதிப்புகள் முறையே,

$$V_x - \frac{1}{2}\frac{\partial Vx}{\partial y}.dy, \quad V_y + \frac{1}{2}\frac{\partial Vy}{\partial x}dx$$

$$V_x + \frac{1}{2}\frac{\partial Vx}{\partial y}dy, \quad V_y - \frac{1}{2}\frac{\partial Vy}{\partial x}dx$$

ஆகும்.

படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ள அம்புக்குறி திசையில் abcd என்ற வடிவ விளிம்பு வரை அல்லது உருவரை (contour) வழியே கோட்டு வழித்தொகை (Line integral),

$$\left[\left(V_x - \frac{1}{2}\frac{\partial V_z}{\partial y}dy\right) - \left(V_x + \frac{1}{2}\frac{\partial V_x}{\partial y}dy\right)\right].\ dx$$

$$+\left[\left(V_y - \frac{1}{2}\frac{\partial V_y}{\partial x}.\ dy\right) - \left(V_y + \frac{1}{2}\frac{\partial V_y}{\partial x}dy\right)dx\right].\ dy$$

$$-\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).dy\,.dx.$$

ஆனால் abcd-ன் பரப்பளவு dx .dy ஆகு ம். எனவே abcd-க்கு நேர்குத்தான திசையில் அதாவது Z-திசையில் ஓரளவு பரப்பளவுக்குக் கோட்டுவழித் தொகையானது.

$\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$ ஆகும்.

எனவே சுழல் $z\bar{V} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \hat{k}$

இதே மாதிரி சுழல் $y\bar{V} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) \hat{j}$

சுழல் $x\bar{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \hat{\imath}$

என எழுதலாம்.

சுழல் $\bar{V}$ =சுழல் $x\bar{V}$ + சுழல் $y\bar{V}$ + சுழல் $z\bar{V}$

$$\hat{\imath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Vx & Vy & Vz \end{vmatrix} = \nabla \times \bar{F}$$

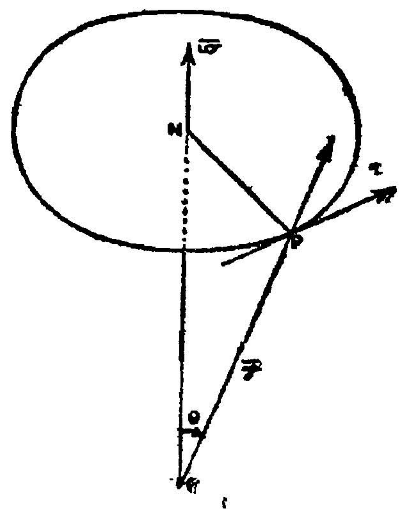
∇ மாற்ற மிலியாக இருப்பதால், சுழலும் ஒரு மாற்ற மிலியாகும்.

நீர்யியக்கு விசையியலில் (Hydrodynamics)பாய்மத்தின் "சுழற்சி" (rotation)-யைப் பற்றி அறிய இயக்கி "சுழலை" பயன்படுத்துவோம். ஆகவே சுழல் $\bar{V}$-ஐ சில சமயத்தில் "ரோட் V" $(Rot\ \bar{V})$ எனவும் குறிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு கட்டிருக்கமான பொருள், இயக்கத்தில் இருக்கும் பொழுது எந்த ஒரு புள்ளியிலும் அதன் சுழல் $\bar{V}$-ஐ [நேர்கோட்டு திசை வேகம் (linear velocity) ஆனது, அதன் கோணத்திசை வேகத்தின் (angular velocity) இரு மடங்கு என நிரூபி.

கட்டிருக்கப் பொருளானது ஒரு அச்சைச் சுற்றி செகண்டுக்கு ϖ ஆரையன்கள் (radians) என்ற ஒரே சீரான கோணதிசை வேகத்துடன் (ϖ) சுழல்வதாகக் கொள்வோம். இதன் எண் மதிப்பு w ஆகவும், இதன் திசை சுழல் அச்சின் திசையாகவும் கொள்வோம். இவ்வச்சின் மீது 0-எனும் ஒரு புள்ளியும், கட்டிருக்கப் பொருளில் P-என்றொரு புள்ளியும் எடுத்துக் கொள்வோம். PN என்பதைக் கொள்வோம், O-வை தோற்றுவாயாக அல்லது ஆதியாகக் (origin) கொண்டு



படம் 6

$\overline{O}\bar{P} = \bar{r}$ என்க. பொருள் சுழல்கையில் P-ஆனது N-ஐ மையமாகவும், NP-ஐ ஆரமாகவும் உடைய வட்டத்தில் நகரும். அதாவது OP க்கு ON-க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில் OP sin θ = r sin θ என்ற ஆரத்துடன் கூடிய வட்டத்தில் OPN என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாக நகரும். எனவே P-யின் நேர்க்கோட்டு திசைவேகம் $NP.\omega = OP \sin\theta \,.\, \omega = \omega r \sin\theta$ இவ்வாறு P-யின் நேர்க்கோட்டு திசை வேகம் $\omega\, r \sin\theta$ என்ற எண் மதிப்புடன் OPN-

க்கு செங்குத்தாக $\bar{\omega}, \bar{r}$-க்கு வலக்கை அமைப்புடனும் விளங்குவதால், $\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}$.

$$\bar{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$$

$\bar{\omega} = \bar{\imath}\omega_1 + \bar{\jmath}\omega_2 + \bar{k}\omega_3$ ஆதலால்,

$$\hat{\imath}\omega_1 + \hat{\jmath}\omega_2 + \hat{k}\omega_3$$

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(\omega_2 z - \omega_3 y) + \hat{\jmath}\,(\omega_3 x - \omega_2 z) + \hat{k}(\omega_1 y - \omega_2 x)$$

ஆதலால் $\nabla \times \bar{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_2 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix}$

$$= \hat{\imath}(\omega_1 - 0 - 0 + \omega_1) + \hat{\jmath}(\omega_2 - 0 - 0 + \omega_2 + \hat{k}(\omega_3 - 0 - 0 + \omega_3$$

$$= \hat{\imath}2\omega_1 + \hat{\jmath}2\omega_2 + \hat{k}2\omega_3 = 2\bar{\omega}$$

அதாவது சுழல் $\bar{V} = 2\bar{\omega}$

ஆகவே கோண திசை வேகம்

$$\bar{\omega} = \tfrac{1}{2} \text{ சுழல் } \bar{V}$$

இவ்விளக்கம் $\nabla \times \bar{V}$-ஐச் சுழல் $\bar{V}$ என்றழைப்பதின் பொருத்தத்தினையும் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$\bar{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$ எனில்

பாய்வு $\bar{r} = 3$, சுழல் $\bar{r} = 0$ என நிருபி.

பாய்வு $\bar{r} = \nabla\bar{r}$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z)$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = 3$$

சுழல் $\bar{r} = \bar{\nabla} \times \bar{r}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) = 0$$

மேற்கண்ட இரு முடிவுகளும் வாய்ப்பாடாக மனதிற்கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

$\frac{\hat{\imath}x+y\hat{\jmath}}{x+y}$ என்ற கோவையின் சுழல் காண்க.

$\bar{V} = \frac{x}{x+y}\hat{\imath} + \frac{y}{x+y}\hat{\jmath} + 0\,.\,\hat{k}$ என இருக்கட்டும்

சுழல் $V = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{k}.$

இங்கு $V_z = 0, V_x = \frac{x}{x+y},\ V_y = \frac{y}{x+y}.$

$\therefore$ சுழல் $\frac{\hat{\imath}x+y\hat{\jmath}}{x+y} = O\ .\ \hat{\imath} + O\ .\ \hat{\jmath} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x+y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x+y}\right)\right\}\hat{k}$

$$= \left[-\frac{y}{(x+y)^2} + \frac{x}{(x+y)^2}\right] \hat{k} = \frac{x-y}{(x+y)^2}k$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

$x\cos z\,\hat{\imath} + y\log x\,\hat{\jmath} - z^2\hat{k}$-யின் சுழல் காண்.

சுழல் $[x\cos z\,\hat{\imath} + y\log x\,\hat{\jmath} - z^2\hat{k}]$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y\log x)\right]\hat{\imath} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(x\cos z) - \frac{\partial}{\partial x}(-z^2)\right]\hat{\jmath}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(y\log x) - \frac{\partial}{\partial y}(x\cos z)\right]\hat{z}$$

(ஏனெனில் $V_x = x\cos z\,, V_y = y\log x\ , V_z = z^2$)

$$= -x\sin 2\,\hat{\jmath} + \frac{y}{x}\hat{k}.$$

1.8 முக்கியமான விரிவு வாய்ப்பாடுகள் (Formulae of expansion)

(a) பாய்வு சரிவு $S = \nabla\ .\ \nabla S$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\hat{\imath}\frac{\partial S}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial S}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial S}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)S$$

எனவே பாய்வு சரிவு$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$

இதனை லேப்லாசின் இயக்கி (Laplace's operator) எனக் கூறலாம்.

(b) சுழல் சரிவு $S = \nabla\ \times \nabla S$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\hat{\imath}\frac{\partial S}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial S}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial S}{\partial z}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\hat{\imath}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial y}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}\right)$$

$$= 0.$$

(c) சரிபாய்வு $V = \nabla(\nabla . V)$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z}\right) + \left(\hat{K}\frac{\partial^2 V_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)$$

$$= \nabla^2 V$$

இங்கு $\bar{V}$ என்பது ஒரு பாய்மத்தின் திசை வேகமானால், பாய்வு $\bar{V}$ என்பது ஒரு புள்ளியில், ஓரலகு நேரத்தில் அதன் அடர்த்தியின் திசையிலி மாறு வீதத்தையும்; சரிவு பாய்வு $\bar{V}$ என்பது ஓரலகு தூரத்தில் அடர்த்தியின் மிகப்பெரும் மாறு வீத வெக்டாரையும் குறிக்கின்றன.

(d) சுழல் (சுழல் $\overline{V}$)= $\nabla \times \nabla \times \overline{V}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z \partial x}\right]$$

$$+ \hat{\jmath}\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y}\right]$$

$$+ \hat{k}\left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z}\right]$$

$$= \hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$+ \hat{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$+ \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$- \left[\hat{\imath}\left(\frac{\partial^2 {V_x}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 {V_y}^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 {V_z}^2}{\partial z^2}\right)\right.$$

$$\left. + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 {V_z}^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\right]$$

$= \nabla (\nabla . \bar{V}) - \nabla^2 \bar{V}$

=சரிவு பாய்வு $\bar{V} - \nabla^2 \bar{V}$

(e) $(\bar{u}. \nabla)\bar{V} = \left(ux\frac{\partial}{\partial x} + uy\frac{\partial}{\partial y} + uz\frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{V}$

$$= ux\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + uy\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + uz\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}$$

$$\bar{V} = \bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k};$$

$$(\bar{u}. \nabla)\bar{r} = ux\frac{\partial x\hat{\imath}}{\partial x} + uy\frac{\partial y\hat{\jmath}}{\partial y} + uz\frac{\partial z\hat{k}}{\partial z}$$

$$= ux\hat{\imath} + uy\hat{\jmath} + uz\hat{k}$$

$$= \bar{u}.$$

எனவே $(\bar{u}. \nabla)\bar{V} = \bar{u}.$

(f) பாய்வு $(\bar{A} \times \bar{B}) = \nabla . (A \times B)$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).$$

$$[\hat{\imath}\,(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{\jmath}\,(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

அல்லது பாய்வு $(\bar{A} \times . \bar{B})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x B_y - A_y B_x)$$

$$= B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$-A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)-A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

$$-A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$=\left(B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k}\right).\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$

$$-\left(Ax\hat{\imath}+Ay\hat{\jmath}+Az\hat{k}\right).\left[\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$

$= \bar{B}($சுழல் $\bar{A}) - \bar{A}.$ (சுழல் B).

$\therefore$ பாய்வு $(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}.$சுழல் $\bar{A} - \bar{A}.$சுழல் $\bar{B}.$

(g) சுழல் $(\bar{A}\times\bar{B}) = \nabla\times(\bar{A}\times\bar{B})$.

$$=\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\bar{A}\times\bar{B})_x & (\bar{A}\times\bar{B})_y & (\bar{A}\times\bar{B})_z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_y B_z - B_y A_z & A_z B_x - B_z A_x & A_x B_y - B_x A_y \end{vmatrix}$$

எனவே,

சுழல்$_x$ $(\bar{A} \times \bar{B})$

$$= \hat{\imath} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(A_x B_y - B_x A_y\right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z B_x - B_z A_x\right)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left(A_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial z} + B_z \frac{\partial \bar{A}_x}{\partial z} + A_x \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)$$

$$= \bar{A}_x \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\hat{\imath} - B_x \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{\imath} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{\imath} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{\imath} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y}\hat{\imath} - A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{\imath}$$

சுழல் $x\,(\bar{A} \times \bar{B})$

$$= A_x\hat{\imath}\left[\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right] - Bx\hat{\imath}\left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]$$

$$+ \left[B_x \frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{\imath} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{\imath} + B_z \frac{\partial \bar{A}_x}{\partial z}\hat{\imath}\right] - \left[A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y}\hat{\imath} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{\imath}\right]$$

$= A_x\hat{\imath}$ பாய்வு $\bar{B} - B_x\hat{\imath}$ பாய்வு $\bar{A} + \left[B_x\,\hat{\imath}\frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y\hat{\imath}\frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z\hat{\imath}\frac{\partial \bar{A}_x}{\partial z}\right]$

$$- \left[A_x\hat{\imath}\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\hat{\imath}\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\hat{\imath}\frac{\partial B_x}{\partial z}\right]$$

இது போலவே

சுழல்$_y$ $(\bar{A} \times \bar{B})$

$= A_y$ j பாய்வு B − B_y j பாய்வு $A + \left[B_x\hat{j}\frac{\partial A_y}{\partial x} + B_y\hat{j}\frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z\hat{j}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right]$

$$- \left[A_x\hat{j}\frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y\hat{j}\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\hat{j}\frac{\partial B_y}{\partial z}\right]$$

சுழல்$_z$ $(\bar{A} \times \bar{B}) = A_z\,\hat{k}$ பாய்வு $\bar{B} -$ $B_z\hat{k}$ பாய்வு$\bar{A}$

$$+ \left[B_x\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{k} + B_y\frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{k} + B_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{k}\right] - \left[A_x\hat{k}\frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y\hat{k}\frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z\hat{k}\frac{\partial B_z}{\partial z}\right].$$

∴ சுழல் $(\bar{A} \times \bar{B}) = (A_x\,\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})$ பாய்வு B

- $(B_x\,\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k})$ பாய்வு A

+ ($\bar{B}$ சரிவு) $\bar{B}$

சுழல் $(\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{A}$ பாய்வு $\bar{B} - \bar{B}$ பாய்வு $\bar{A}$ + ($\bar{B}$ சரிவு $\bar{A}$ − ($\bar{A}$ சரிவு$\bar{B}$).

(h) பாய்வு$(s\,\bar{A}) = \nabla.(s\bar{A})$

(s ஸ்கேலார்).

$= \nabla.(sA_x\,\hat{\imath} + sA_y\hat{\jmath} + sA_z\hat{k})$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).(sA_x\hat{\imath} + sA_y\hat{\jmath} + sA_z\hat{k})$

$= \frac{\partial}{\partial x}(sA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(sA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(sA_z)$

$= s\left[\frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}\right] + A_x\frac{\partial s}{\partial x} + A_y\frac{\partial s}{\partial y} + A_z\frac{\partial s}{\partial z}$

$$= s \text{ பாய்வு} \bar{A} + \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right).\left(\frac{\partial s}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial s}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial s}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$s \text{ பாய்வு} \bar{A} + \bar{A}. \text{ சரிவு s.}$$

$$\therefore \text{ பாய்வு } (s\bar{A}) = s \text{ பாய்வு } \bar{A} + \bar{A}, \text{ சரிவு s.}$$

(i) சுழல் $s\bar{A} = \nabla \times (s\bar{A})$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left[sA_x\hat{\imath} + sA_y\hat{\jmath} + sA_z\hat{k}\right]$$

$\therefore$ சுழல்$_x$ $(s\bar{A})$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(sA_z)\hat{\imath} - \frac{\partial}{\partial z}(sA_z)\hat{\imath}$$

$$= s\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + A_z\hat{\imath}\frac{\partial s}{\partial y} - A_y\frac{\partial s}{\partial z}\hat{\imath}$$

$$= s\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}\right] + \left(A_z\frac{\partial s}{\partial y} - A_y\frac{\partial s}{\partial z}\right)\hat{\imath}$$

இது போன்றே

சுழல்$_y$ $(s\bar{A})$

$$= s\left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(A_x\frac{\partial s}{\partial z} - A_y\frac{\partial s}{\partial x}\right)\hat{\imath}\right]$$

சுழல்$_z$ $(s\bar{A})$

$$= s\left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} - \left(A_y\frac{\partial s}{\partial x} - A_x\frac{\partial s}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$

எனவே,

சுழல் $(s\bar{A})$

$$= s\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$

$$= \left(\frac{\partial s}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial s}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial s}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left(A_x\hat{\imath} = A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)$$

= s சுழல் A+ (சரிவு s)× $\bar{A}$

(j) சரிவு $(\bar{A}, \bar{B}) = \Delta\left[A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right]$.

∴ சரிவு$_x$ $(\bar{A}.\bar{B})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right]$$

$$= A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + B_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial x} + B_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial x} + B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$= \left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right] + \left[B_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right]$$

$$+A_y\frac{\partial B_y}{\partial x} + B_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial x} + B_z\frac{\partial A_z}{\partial x} - A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z\frac{\partial B_x}{\partial z} - A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}$$

$$- B_z\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$= \bar{A} \text{ சரிவு } B_x + \bar{B} \text{ சரிவு } A_x + A_y\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$- B_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y}\right) - A_z\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)$$

$$- B_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

எனவே சரிவு$_x$ $(\bar{A}.\bar{B})$ $=(\bar{A}$சரிவு$)\bar{B}_x + (\bar{B}$சரிவு$)A_x + (\bar{A} \times$ சுழல்$\bar{B})_x$

$+(\bar{B} \times$ சுழல்$\bar{A})_x$

சரிவு$(\bar{A}.\bar{B}) = (\bar{A}$சரிவு$)B + (\bar{B}$சரிவு$)A + (\bar{A} \times$ சுழல்$\bar{B}) + (\bar{B} \times$ சுழல்$\bar{A})$

எடுத்துக்காட்டு 1

A என்பது ஒரு மாறிலி அலகு வெக்டாரானால்

$\bar{A}.[\nabla(\bar{V}.\bar{A}) - \nabla \times (\bar{V} \times \bar{A})] = \nabla.\bar{V}$ என காண்பி.

இ.ப. $= A.[\nabla(\bar{V}.\bar{A}) - \nabla \times (\bar{V} \times \bar{A})]$

$\bar{A}.[(\bar{A}$சரிவு$)\bar{V} + \bar{A}\Delta.\bar{V} - (A$சரிவு$)\bar{V} + \bar{A} \times$ சுழல்$V]$

$= \Delta.\bar{V} + \bar{A}.(\bar{A} +$ சுழல்$\bar{B}) = \Delta.\bar{V} + \bar{A}.[\bar{A} \times (\nabla \times \bar{V})] = \nabla.V.$

எடுத்துக்காட்டு 2

U, W என்பன திசையிலிகளானால்,

சுழல் $(U$சரிவு$W) = (\nabla U) \times (\Delta W)$ என நிரூபி.

சுழல் $(U$சரிவு$W) =$ சுழல் $(\mathrm{u}\bar{A})$

$= u$ சுழல் $\bar{A} - \bar{A} \times$ சரிவு u

$= U$ சுழல் சரிவு $W -$ (சரிவு $W) \times$ (சரிவு$u)$

$= O -$ (சரிவு $u) \times$ (சரிவு$W)$

$=$ (சரிவு $u) \times$ (சரிவு $W)$

$= (\nabla u) \times (\nabla W)$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 3

$$\nabla.(s\nabla \times \bar{B}) = [(\nabla \times \bar{B}.(\nabla s)]$$ என நிருபி.

இங்கு $\nabla.(s\nabla \times \bar{B}) =$ பாய்வு (s சுழல் $\bar{B}$)

$= s$ பாய்வு சுழல் $\bar{B} -$ (சுழல் $\bar{B} \times$ சரிவு s)

$= 0 +$ (சுழல் $\bar{B}$). (சரிவு s) பாய்வு சுழல் $B = 0) = (\nabla \times \bar{B}.(\nabla s)$

நிருபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 4

$$\nabla \times (s\nabla \times \bar{B}) = S\nabla \times (\nabla \times \bar{B}) -= (\nabla \times B) \times (\nabla s)$$ என நிருபி.

$\nabla \times (s\nabla \times \bar{\ }) =$ சுழல் (s சுழல் $\bar{B}$)

$= s$ சுழல் சுழல் $\bar{B} -$ சுழல்$\bar{B} \times$ சரிவு s

$= s$ சரிவு $\bar{B} - s\nabla^2 - \bar{B} - (\nabla \times \bar{B}) \times (\nabla s)$

$= s$ சுழல் சுழல் $\bar{B} - (\nabla \times \bar{B}) \times (\nabla s)$

$$= s\nabla \times (\nabla \times \bar{B}) - (\nabla \times \bar{B}) \times (\nabla s).$$

நிருபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 5

$$d\bar{V} = (\nabla.d\bar{r})\bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}dt$$ என நிருபி.

ஒரு வெக்டார் $\bar{V}(x,y,z,t)$-ன் சார்பானால், அப்பொழுது

$$\partial\bar{V} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}dt$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)\bar{V} + \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(\hat{\imath}\,dx + \hat{\jmath}\,dy + \hat{k}\,dz\right) + \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

$$= (\nabla . d\bar{r})\bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} dt$$

1.8. வரிச்சுருள் உருளைப் புலமும், சுழற்சியில்லாத புலமும். (Solenoidal and Irrotational fields).

ஒரு வெக்டார் புலத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரு வெக்டாரின் பாய்வு சுழியமானால் அக்களம் **"வரிச்சுருள் உருளைக் களம்"** எனப்படும். ஏற்கனவே பாய்வு (சுழல் $F) = 0,$ எனக் கண்டோம். எனவே V என்பது வேறொரு வெக்டார் சார்பு F-ன் சுழல் மதிப்பாய் இருக்கலாம்.

ஒரு வெக்டார் புலத்தில் ஒரு வெக்டாரின் சுழல் எல்லா புள்ளிகளிலும் சுழியானால் அப்புலம் சுழற்சியில்லாப்புலம் எனப்படும். சுழல் $V = O$ எனில் $V,$ சுழற்சியில்லாப் புலம் ஒன்றினை நிர்ணயிக்கும்.

முன்பே சுழல் (சரிவு $S) = 0,$ என ஒரு திசையிலி சார்பு S-க்கு நிறுவினோம். அதைக் கொண்டு $\bar{V}$ ஒரு திசையிலா அளவுறுப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவாக இருக்கலாம் என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம். இதிலிருந்து திசையிலி புலம் S-லிருந்து வெக்டார் புலம் V-யினை உருவாக்க முடியும் என அறிகிறோம். V என்பது **"காப்பு நிலை வெக்டார் புலம்"** (Conservative vector field) எனப்படும்.

3. தொகை காணல் (Integration)

வகைக் கெழு காண்பதின் தலைகீழ் முறையே தொகை காணுதல் ஆகும். அதாவது r எனும் ஒரு வெக்டார் சார்பு திசையிலி

மாறி t —யின் வெக்டார் சார்பை அதன் t —ஐப்பொறுத்த வகைக்கொழு $\bar{r}$ ஆக இருக்குமாறு கண்டுபிடிப்பதைத்தான் $\bar{r}$-ன் t ஒட்டிய தொகை காணுதல் என்கிறோம் $\bar{F}$ எனும் சார்பு, $\bar{r}$-ன் ஒரு தொகை எனவும், முதற் சார்பு (Primitive) எனவும் அழைக்கப்பெறும். இதனை$F = \int r\, dt$ எனும் குறியீட்டினால் குறிக்கிறோம். $\int$ என்பது தொகை காணும் குறியீடு. t என்பது தொகைக்குரிய மாறிலி. $\bar{r}$ எனும் சார்பு "தொகைச்சார்பு" (Integral). இத் தொடர்பின் பொருள்,

$\frac{d\bar{F}}{dt} = \bar{r}$ என்பதாகும்.

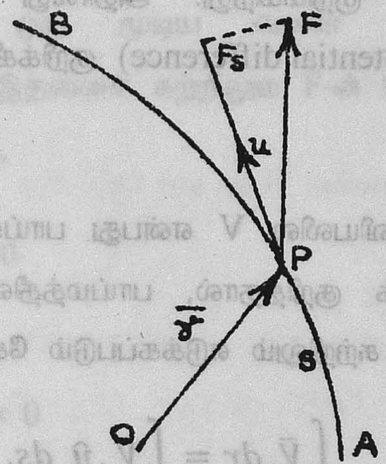
கோட்டு வழித்தொகை, பரப்பு வழித்தொகை, கன வழித்தொகை என்பன வெக்டார் பகுப்பாய்வில் முக்கியமானவையாகும்.

1.9 கோட்டு வழித்தொகை (Line integral) தொடு கோட்டு வழித்தொகை

ஒரு வளைவரையையும், அவ்வளைவரையில் ஒரு நிலைப்புள்ளியிலிருந்து அளக்கப்படும், வில்லின் நீளம் S-ன் சார்பாக அமைந்த ஒரு வெக்டார் சார்பு F-யும் எடுத்துக் கொள்வோம். (படம் 7) A,B எனும் இரு புள்ளிகள் இவ்வளைக் கோட்டின் மேல் s = a, s = b எனும் மதிப்புகளுக்குத் தகுந்த புள்ளிகள் என்க. வளைவரையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் ஓரலகு தொடுகோடு u என்க. அப்படியானால் $\bar{F}.\hat{u}$ என்பது அப்புள்ளியில் தொடுகோட்டின் வழி F-ன் கூறு ஆகும்.

a,b எனும் இடைவெளியில் இக்கணியத்தின் s ஒட்டிய வரையறுத்த தொகை F-ன், வளைவரை வழியான கோட்டு வழித்தொகை எனப்படும். (Line integral)

இதில் $\int_a^b \bar{F}\hat{u}\, ds =$ எல்லை $\sum_a^b \bar{F}.\hat{u}\, \partial s$



படம் 7

இதையே,

$\int_A^b \bar{F}.d\hat{r} =$ எல்லை $\sum_a^b \bar{F}\partial\bar{r}$ என்றும் எழுதலாம்.

இங்கு ∂r எனும் நுண்ணிய வெக்டார் $\partial s\, u$ எனும் வெக்டாருக்குச் சமம். அது தொடு கோட்டுக்கு இணையானது. எடுத்துக்காட்டாக F-என்பது ஒரு துகளின் மேல் செயல்படும் விசையினைக் குறித்தால், அத்துகள், ஒரு வளைவரையின் மீது நகர்கையில் ∂r எனும் இடப்பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த விசையினால் செய்யப்படும் வேலை அளவு $F.\partial r$ ஆகும். எனவே வளைவரையிலுள்ள A,B எனும் இரு புள்ளி களுக்கிடையில் காணப்படும் வரையறுக்கப்பட்ட தொகை,

அத்துகள் A-யிலிருந்து F-க்கு L-லினால் செய்யப்படும் மொத்த வேலை அளவினைக் குறிக்கும். F என்பது P எனும் புள்ளியிலுள்ள மின்சார (அல்லது காந்த) புலச் செறிவை (intensity) குறித்தால் கோட்டு வழித்தொகை ஓரலகு மின் விசைச் செறிவினால் (அல்லது துருவத்தினால்) A-யிலிருந்து B-க்கு நகர்கையில் செய்யப்படும் வேலை அளவைக் குறிக்கிறது. அதாவது அவ்விரு மின்னழுத்த வேறுபாட்டினைக் (Potential difference) குறிக்கிறது.

பாய்ம இயக்கவியலில் V என்பது பாய்மத்தின் ஒரு புள்ளியின் திசை வேகத்தினைக் குறித்தால், பாய்மத்தில் வரையப்படும் மூடிய வளை வரையினைச் சுற்றிலும் எடுக்கப்படும் கோட்டு வழித் தொகை

$$\int \bar{V}.dr = \int \bar{V}.\hat{u}\ ds.$$

என்பது, வளைவரையைச் சுற்றிலும் உள்ள சுழற்சி எனப்படும்.

$$\int \bar{F}.dr = \int Fx\,dx + \int Fy\,dy + \int F_z\,dz$$

இதிலிருந்து $\int_A^B \bar{F}.d\bar{r} = -\int_B^A \bar{F}.d\bar{r}$ எனக் காணலாம். ஏனெனில்

A-யிலிருந்து B நோக்கி நகர செய்யப்படும் வேலை அளவைக் குறிக்கிறது. கையில் மிகையாகக் (+) கருதப்படும் dr, B-யிலிருந்து A நோக்கி நகர்கையில்-d.r ஆகும்.

F எனும் சார்பு ஏதோவொரு திசையிலி புள்ளிச் சார்பு V-யின் சரிவு எனக் கொள்வோம். அப்படியானால்,

$$\int_A^B \bar{F}.d\bar{r} = \int_A^B \nabla V.d\bar{r} = \int_A^B dv$$ ஆகும்.

இத்தொகை $V_B = V_A$ க்-குச் சமம் ஆகும். V எனும் சார்பு ஒரு மதிப்புடைய சார்பாக அமைந்து ஒரு மூடிய வளைவரையினைச் சுற்றி (closed contour) தொகைக் கணக்கிடப்பட்டால் ஆரம்பப் புள்ளியும் முடிவுப் புள்ளியும் ஒன்றி விடுவதால் $V_B - V_A = 0$ என்றாகிவிடும்.

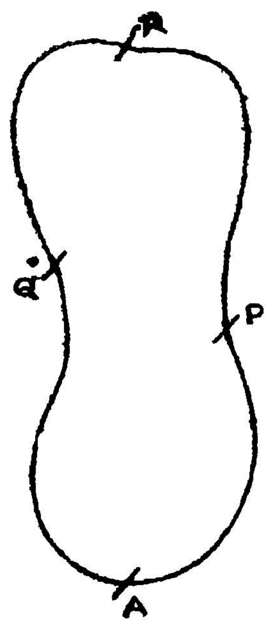
அதாவது $\oint \nabla V.dr = 0$.

APRQ என்ற ஒரு மூடிய வளை வரையை எடுத்துக் கொள்வோம் (படம்-8). இதனைச் சுற்றிலும் F-ன் தொடு கோட்டு வழித் தொகை சுழியமாதலால்,

$$\int_{APR} \bar{F}.d\bar{r} + \int_{RQA} \bar{F}.d\bar{r} = 0$$

$$\int_{APR} \bar{F}.d\bar{r} - \int_{AQR} \bar{F}.d\bar{r} = 0$$

$$\therefore \int_{APR} \bar{F}.d\bar{r} = \int_{AQR} \bar{F}.d\bar{r}.$$



படம் 8

இதுபோன்றே A-ஐயும் R-ஐயும் இணைக்கும் எந்த ஒரு வளை வரைக்கும் இது பொருந்தும். A ஒரு நிலையான புள்ளி, R ஒரு மாறும் புள்ளி எனவும் கொள்க. A-யிலிருந்து R வரை காணப்படும் தொடுகோட்டு வழித்தொகை, மதிப்பு எடுத்துக் கொள்ளப்படும் பாதையைச் சார்ந்தில்லாதிருந்தால் ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச்சார்பாகும். இதனை V எனலாம்.

$\therefore \int_A^R \bar{R}.d\bar{r} = V$ எனவே R-ல் ஏற்படும் சிறு இடப்பெயர்ச்சி $d\bar{r}$

– க்குத் தக்க,V-ல்

ஏற்படும் கூடுதல் $dV = F.dr$

ஆனால் $dV = \nabla V.dr$ எனக் கண்டோம்.

$\therefore$ dr-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்,

$$F.dr = \nabla V.dr$$

$\therefore\ F = \nabla V$ ஆகும்.

அதாவது ஏதோ ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு V-ன் சரிவுக்குச்சமமாகும்.

பொதுவாக $\int_A^R \bar{F}.d\bar{r}$ எனும் தொகை A-யிலிருந்து B-க்கு எப்பாதை வழி தொகை காணப்படுகிறது என்பதைச் சார்ந்து அமைகிறது. வேறு வேறு பாதைகளுக்கு வேறு வேறு தொகை கிடைக்கும். ஆனால் F ஒரு திசையிலிப்புள்ளிச் சார்பின் சரிவானால், எல்லாப் பாதைகளுக்கும் ஒரே தொகை மதிப்புத்தான் கிடைக்கும். இவ்வாறு F-ன் கோட்டுவழித்

தொகை, தொகை காண எடுத்துக்கொள்ளும் பாதையைச் சார்ந்திடாவிடில், அச்சார்பு ஒரு “காப்பு நிலப்புலத்தினை” (Conservative field) உருவாக்குகிறது என்று சொல்கிறோம். அப்போது F ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவாகும்.

ஒரு காப்பு நிலைக் களத்தில் F என்பது ஒரு விசையானால்,

$$\int_A^B \bar{F}.d\bar{r}$$

என்பது அது செய்யும் வேலையைக் குறிக்கிறது. P_0 என்பது ஒரு நிலைப் புள்ளியாகவும், P(x,y,z) என்பது ஒரு மாறு புள்ளியாகவும் இருந்தால்,

$$\emptyset(x,y,z) = \int_P^{P_0} \bar{F}.d\bar{r}$$

என்பது P-யிலுள்ள மின்னூட்ட அளவினைக் குறிக்கிறது. இது ஓரலகு பொருள் P-யிலிருந்து P_0 –வுக்கு நகரும்பொழுது செய்யப்படும் வேலைக்குச் சமம்.

P_0 –வில் மின்னூட்ட அளவு சுழியமாகும்.

$$\underset{P_0 \to \infty}{Lt} \int_P^{P_0} \bar{F}.d\bar{r}$$

என்ற தொகையீடு ஒரு வரையறுத்த எல்லை மதிப்பினைப் பெறுகிறது. இதையே

$$\emptyset = \int_{P}^{\infty} \bar{F}.d\bar{r}$$

என எழுதலாம்.

இதன் வகைக்கெழு காண

$$d\emptyset = -\bar{F}.d\bar{r}$$

எனக் கிடைக்கிறது. மாறுபுள்ளி P கீழ் எல்லை மதிப்பாக இருப்பதால் $d\emptyset$ — குறியீடு பெறுகிறது.

$$d\emptyset =. d\bar{r}.\nabla$$

இந்த சமன்பாடுகள் dr-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்துமாதலால்

$\cdot F = -\nabla\emptyset$ என எழுதலாம்.

இதிலிருந்து ஒரு காப்பு நிலைக்களத்தில் விசையானது (-) மின்னூட்ட சார்பின் சரிவினுக்குச் சமம் எனத் தெரிகிறது.

1.10. பரப்பு செங்கோட்டு வழித்தொகை அல்லது பரப்பு வழித்தொகை (Normal Surface Integral)

ஒரு வளை தளத்தினையும் (Curved Surface) அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் முடிவுள்ள (finite) வரையறுத்த (definite) மதிப்பினையுடைய ஒரு வெக்டார் சார்பு F-ஐயும் எடுத்துக் கொள்வோம். தளத்தில் P எனும் புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோட்டிற்கு இணையான ஓரலகு வெக்டார் $\hat{n}$ என்க. இதன் திசை வளைதளம் மூடியதாயிருப்பின் வெளி நோக்கியும் மூடாதாயிருப்பின் தளத்திற்கு ஒரு புறமாகவே எப்போதும் அமைந்ததாக இருக்கும். அப்படியானால்

$\bar{F}-\hat{n}$ என்பது நேர்குத்துக் கோட்டின் வழியாக $\bar{F}$-ன் கூறாகும். வளைதளப்பரப்பின் மிக நுண்ணிய மூலகப் பரப்புகளாகப் பிரிப்பதாயும் P –யினைச் சுற்றியமையும் நுண்ணியபரப்பு ∂A எனவும் கொள்வோம்.

$S=\sum \bar{F}.n\partial A$ எனும் கூட்டல் தளத்தில் எல்லா நுண்ணிய பரப்புகளுக்கும் எடுக்கப்பட்டால் நுண் பரப்புகளின் எண்ணிக்கை கந்தழியையும் (infinity) ∂A சுழியத்தையும் நாடுகையில் S-ன் மதிப்பு ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட எல்லையினை நெருங்கும். இவ்வெல்லை மதிப்பினைத் தான் கொடுக்கப்பட்ட வளைதளத்தின்மீது F-ன் பரப்பு வழித்தொகை அல்லது பரப்பு நேர்குத்துக்கோடு வழித்தொகை என்கிறோம்.

இதனை

$$\int \bar{F}.\hat{n}\, dA = \text{எல்லை} \sum \bar{F}.\hat{n}\, \partial A$$

என எழுதுகிறோம். உண்மையில் இது $\bar{F}-\hat{n}$ எனில் திசையிலிச் சார்பின் பரப்பு வழித்தொகையாகும். முன்பே நாம் பரப்புகளை வெக்டாரினால் குறிக்கும் முறை பற்றிக் குறிப்பிட்டுள்ளபடி, P –யில் உள்ள ∂A என்ற பரப்பினை P-யில் வளைதளத்துக்கு வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோட்டின் திசையில் அமைந்த $\partial\hat{A}n$ என்ற வெக்டார் குறிக்கும். $\partial\bar{A}$ என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு எனவே மேற் சொன்ன தொகையை $\int \bar{F}.d\bar{A} = \text{எல்லை} \sum \bar{F}.\partial\bar{A}$ என்றும் எழுதலாம். இங்கு தொகையைக்காண பயன்படுத்தும் மாறி பரப்பளவாக எடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே ஒற்றைத் தொகையீடு இடம் பெற்றுள்ளது. சில நூல்களில் இரட்டைத் தொகையீட்டைப் பயன்படுத்துவர். அதாவது

$$\iint_S \bar{F}.d\bar{A}$$

எனக் குறிப்பிடுவர். அடியில் எழுதப்பட்டுள்ள S என்பது அத் தளம் முழுவதும் தொகை காணப்படல் வேண்டும் என்பதைக் குறிக்கும்.

பரப்பு வழித்தொகைக் காணுதலின் இயற்பியல் விளக்கம்.

ஒரு பாய்மத்தில் ஏதோ ஒரு புள்ளியில் திசை வேகம் $\bar{F}$ எனக் கொள்வோம். அப்புள்ளியைச் சுற்றி ∂A என்ற நுண்ணிய பரப்பளவை எடுத்துக் கொள்வோம் அப்புள்ளியில் வளைதளத்திற்கு நேர்குத்துக் கோட்டின் திசை இணையான ஓரலகு வெக்டார் $\bar{n}$ எனில் $\bar{F}\hat{n}\partial A$ என்பது அந்த நுண்ணிய பரப்பளவுக்குச் நேர்குத்து திசையில் ஓரலகு நேரத்தில் வெளியேறும் பாய்ம அளவினைக் குறிக்கிறது. தொடுகோட்டு வழியான கூறு அந் நுண்ணிய பரப்பின் வழியே வெளியேறும் பாய்ம அளவை பாதிப்பதில்லை. எனவே அந்நுண்ணிய பரப்பின் வழி வெளியேறும் பாய்மம் முழுவதும் அதற்கு நேர்குத்தான கோட்டின் திசையில் வெளியேறுவது தான். எனவே $\bar{F}\hat{n}\partial A$ எனும் மதிப்பினை வளைதளப்பரப்பு முழுவதற்கும் கூட்டித் தொகை கண்டால் அது, அப்பரப்பு முழுவதின் வழியே ஓரலகு நேரத்தில் வெளியேறும் பாய்ம மொத்த அளவினைக் குறிக்கிறது. பொதுவாக $\int \bar{F}.\partial\bar{A}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளைதளப் பரப்பு முழுவதும் வழியே வெளிப்பாயும் F-ன் பாய்வினை குறிக்கிறது. F என்பது மின்விசை, காந்தவிசை, புவியீர்ப்பு விசை, வெப்பப் பாய்வு முதலிய இயற்பியல் வெக்டார்களில் ஒன்றாக இருக்கலாம்.

பரப்பு வழித்தொகையில் ஒரு தேற்றம்:

XY தளத்தில் வளைதளப்பரப்பு S-ன் எறிவு படிவம் R எனில்

$$\iint \bar{A}.d\bar{s} = \iint \bar{A}.\hat{n}\frac{dx\,dy}{|\bar{n}.\bar{k}|}$$

நிருபணம்

S என்ற வளைதளப் பரப்பில் P என்ற புள்ளியில் ΔSP என்ற நுண்ணிய பரப்பளவை எடுத்துக் கொள்வோம், n என்பது இந்த பரப்புக்கு வெளிநோக்கிய ஓரலகு நேர்குத்துக்கோடாக இருக்கட்டும். இந்த பரப்பு S, xy தளத்திற்கு θ கோணத்தில் சாய்ந்திருப்பதாகக் கொள்வோம்.

அப்படியானால்

$\iint_S A.d\bar{S}$ என்பது, Nகந்தழ் யையும்.

ΔSP சுழியத்தையும் அணுகும்போது

$\sum_{p\neq 1}^{N} \bar{A}p.\hat{n}\Delta Sp$ன் மையத்தில் $\bar{A}$-யின்

மதிப்பாகும். xy தளத்தின் நுண்ணிய பரப்பளவு ΔSP-ன் வீழல் $\Delta xp\,\Delta yp$ ஆகும். எனவே,

$\Delta xp\,\Delta yp = \Delta SP\,Cos\,\theta = \Delta\,SP\hat{n}.\hat{k}$

இங்கு $\hat{k}$ என்பது $\Delta xp\,\Delta yp$ க்கு வரையப்பட்ட ஓரலகு நேர்குத்துக் கோடாகும்.

எனவே $\Delta SP = \frac{\Delta\,xp\,\Delta\,yp}{|\hat{n}\ \hat{k}|}$

$$\iint_S A.d\bar{s} = \underset{\substack{N \to \infty \\ \Delta sp \to 0}}{Lt} \sum_{P=1}^{N} Ap.\hat{n}\Delta SP$$

$$\underset{\substack{N \longrightarrow \infty \\ \Delta xp, \Delta yp \longrightarrow 0}}{Lt} \sum \bar{A}p.\hat{n}\frac{\Delta xp\Delta yp}{|\hat{n}.\hat{k}|}$$

$$\iint_R \bar{A}.\hat{n}\ \frac{dx\ dy}{\hat{n}.\hat{k}}$$

1.11 கன அளவு வழித்தொகை (The Volume Integration)

மூவளவை வெளியில், V என்ற கனபரிமாணத்தைக் கொண்ட மூடிய பரப்பளவை எடுத்துக் கொண்டால் $\iiint F\ d\ V$ என்பது ஒரு வெக்டார் சார்பு $\bar{F}$-ன் கன அளவு வழித்தொகை என வரையறுக்கப்படும்.

இதையே

$$\iiint_{xyz} \bar{F}dx\ dy\ dz = \iiint_{xyz} \left(\bar{\imath}\,F.x + \bar{\jmath}\,F.y + \ \bar{k}\,F.z\right) dx\ dy\ dz$$

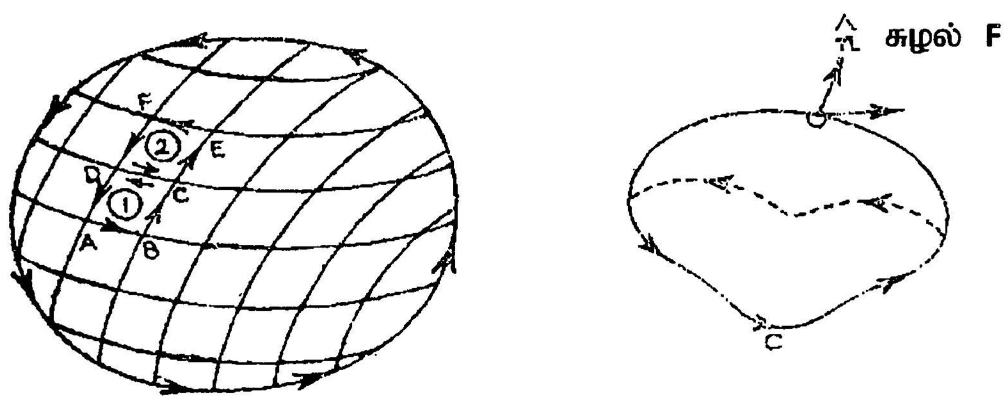
என்று எழுதலாம்.

1.12 ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் (Stoke's Theorem):

S என்ற திறந்த பரப்பின்மீது ஒரு சீரான (Uniform), முடிவுள்ள (finite), தொடர்ச்சியான வெக்டார் சார்பு $\bar{F}$-ன் சுழலின் செங்கோட்டு

வழிக்கூறின் பரப்பு வழித்தொகை, S-ன் வரம்பான மூடிய வரை C-யின் தொடுகோட்டு வழியான $\bar{F}$ தொகைக்கு சமமாகும்.

அதாவது ஒரு வளைதள பரப்பின் மேல் S என்ற திறந்த பரப்பின் வரம்பாக அமைந்த, தன்னைத்தானே வெட்டிக் கொள்ளாத ஒரு எளிய வளைவரை C-ஐ எடுத்துக்கொள்வோம் (படம் 9)



படம் 9

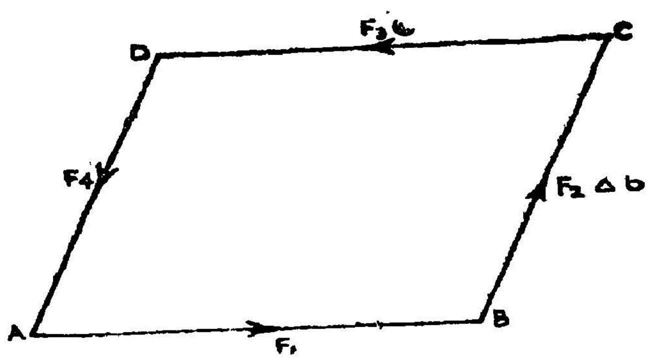
இந்த பரப்பு S இரண்டு புறங்களை உடையது என்றும், இதனைப் படத்தில் காட்டியது போல வலை பின்னியதுபோல் கோடுகள் வரைந்து C யில் உள்ள புள்ளிகளை இணைத்து சிறு சிறு இணைகரக் கட்டங்கள் எண்ணற்ற அளவுக்கு உருவாக்கலாம் எனக் கொள்வோம்.

வளைதள பரப்புக்கு எத்திசையில் வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோடு மிகை திசையில் உள்ளது என கொள்ளப்படுகிறதோ அந்த நேர்குத்துக்கோடு வளைவரையினைச் (C ஐ) சுற்றும்போது இடக்கைப் பக்கம் அமைய வேண்டும். இவ்வாறிருந்தால் C யினை மிகைத்

திசையில் சுற்றுவதாய் எடுத்துக் கொள்ளலாம். $\bar{n}r$ என்பது P (x,y,z) என்ற புள்ளியில் மிகைத் திசையில் வரையப்பட்ட ஓரலகு நேர்குத்துக் கோடாகும். $\bar{F}(x,y,z)$ என்ற வெக்டார் சார்பு அதன் வகைக் கெழுக்களும் S,C ஆகியவற்றில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானவை எனக் கொண்டால்,

$$\int_c \bar{F}.d\,\bar{r} = \int_s \nabla \times \bar{F}.d\,\bar{r}$$

படம் 10-ல் ஒரு சிறு கட்டம் பெரிதாக்கிக் காட்டப்பட்டுள்ளது புள்ளிக்குப்புள்ளி $\bar{F}$-ன் மதிப்பு மாறுவதால் $\bar{F}$-ன் சாரசரி மதிப்புகள் AB, BC, CD, DA-யில் முறையை $F_1\,F_2\,F_3\,F_4$ என இருக்கட்டும், AB, BC, என்ற பக்கங்கள் முறையே,



படம் 10

$\Delta\,\bar{a}, \Delta\,\bar{b}$ என்க.

$$\therefore \int_{ABCD} \bar{F}_0\, d\bar{r} = \bar{F}_1\, \Delta\bar{a} + \bar{F}_2 \Delta\bar{b} + \bar{F}_3\,(-\Delta\bar{a}) + \bar{F}_4\,(-\Delta\bar{b})$$

$$= \Delta\,\bar{a}\,(\bar{F}_1 - \bar{F}_3) + \Delta\,\bar{b}(\bar{F}_2 - \bar{F}_4)$$

$$= \Delta\,\bar{b}\,(\bar{F}_2 - \bar{F}_4) - \Delta\,\bar{a}(\bar{F}_3 - \bar{F}_1)$$

$d\bar{r}$ எனும் சிறு இடப்பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த $\bar{F}$ ஏற்படும் மாற்றம் $\Delta\bar{F}$ எனில்

$$\nabla \bar{F} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \bar{F}}{\partial z}\Delta z$$

$$= \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{F}$$

$$= (\Delta \bar{r}.\nabla)\bar{F}$$

(ஏனெனில் $\nabla \bar{r} = \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k})$ எனவே $\bar{F}$ ல் ஏற்படும் சிறு மாற்றம் $\nabla \bar{F} = (\Delta \bar{r}.\nabla)\bar{F}$

$\therefore\ \bar{F}_3 - \bar{F}_1 = AD$ வழியே $\Delta\bar{b}$ எனும் சிறு இடப்பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த, $\bar{F}$ ல் ஏற்படும் மாற்றம் $= (\Delta\bar{b}_0\ \nabla)\bar{F}_0$

இதேபோல் $\overline{F_2} - \bar{F}_4 = AB$ வழியே $\Delta\bar{a}$ எனும் சிறு இடப் பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த $\bar{F}$ ல் ஏற்படும் மாற்றம்,

$$= (\Delta\bar{a}_0\ \nabla)\bar{F}_0$$

$$\therefore \oint_{ABCD} \bar{F}_0\, d\bar{r} = \Delta\bar{b}_0(\Delta\bar{a}_0\ \nabla)\bar{F} - \Delta\bar{a}_0(\Delta b_0\ \nabla)\bar{F}$$

$$= [\Delta\bar{b}\Delta\bar{a}\nabla) - \Delta\bar{a}(\Delta\bar{b}\nabla)].F$$

$$= \{\Delta\bar{a} \times \Delta\bar{b}) \times \nabla\}\bar{F}$$

$$= (\Delta\bar{a} \times \Delta\bar{b}).\nabla \times \bar{F}$$

[புள்ளிப் பெருக்கலையும் வெக்டார் பெருக்கலையும் இட மாற்றிக் கொள்ளலாம் என்ற விதிப்படி] ஆனால் $\Delta\bar{a} \times \Delta\bar{b}$ என்பது இணைகரம் ABCD யின் பரப்பு வெக்டாராகும். இதனை $\nabla\bar{A}$ என குறிக்கலாம்.

$$\therefore \int_{ABCD} \overline{F_0} d\bar{r} = A.\nabla \times \bar{F} = \nabla \bar{F}.\nabla \bar{A}$$

இது போன்றே எல்லா சிறு கட்டங்களுக்கும் கோட்டு வழித் தொகையினைக் கண்டுபிடித்து கூட்ட வேண்டும். ஆனால் கோட்டு வழித்தொகைகளை அருகருகே உள்ள இணைகரங்களின் பக்கங்களின் வழியே காணும்போது ஒரு தடவை ஒரு திசையிலும், அண்டைக் கட்டத்தின் பக்கமாகக் கொண்டு தொகை காணுகையில் எதிர்த்திசையிலுமாக காணப்படுவதால், இதன் தொகை சுழியமாகிறது. ஆனால் வளைதளத்தின் வரம்பாக அமைந்த வளைவரையின் ஒட்டிய சிறு கட்டங்களில் தொகை காணும்போது, வளைவரையின் பகுதியான சிறு சிறு துண்டுகளில் காணப்படும் தொகைகள் மட்டிலும் ஒரே தடவை ஒரே திசையில் காணப்பட்டுக் கூட்டப்படுகின்றன. எனவே மொத்த வளைதளப் பரப்பிலும் அமைந்த எல்லாக் கட்டங்களின் பக்கங்களின் வழியாகக் காணப்படும் கோட்டு வழித்தொகைகளின் கூட்டல் அந்த வரம்பான வளைவரையில் காணப்படும் கோட்டு வழித்தொகைக்குச் சமம்.

எனவே,

$$\int_C \bar{F} . d\,\bar{r} = \int_S \nabla \times F . d\,\bar{A}$$

இவ்வாறு ஸ்டோக்கின் தேற்றம் நிருபிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு : ஒரு வளைதளத்தின் வரம்பான வளைவரை ஒரு சம தளத்திலிருந்தால் $\int_S \nabla \times \bar{F}.d\,\bar{A} = \int_C \bar{F}.d\,\bar{r}$

அந்த சமதளத்தில் அவ்வளை வரை C-யினால் அடைக்கப் பெறும் சமதளப் பரப்பு வழித் தொகையும்

$\int_C \bar{F}.d\,\bar{r}$ என்றே ஆகும். எனவே

$\int_S \Delta \times \bar{F}.d\bar{A}$ என்ற தொகை ஒரு வளைதளப் பரப்பின் மீது காணப்படுமாயின் அவ்வளைதளப் பரப்பின் வரம்பு வளைவரையினால் ஒரு சமதளத்தில் அடைக்கப்பெறும் பரப்பின்மீது பரப்பு வழித்தொகை கண்டால் போதும்.

1.13 காஸின் பாய்வுத்தேற்றம் (Gauss' Divergence theorem)

காஸின் பாய்வுத் தேற்றத்தின் மூலம் ஒரு கன வழித்தொகையைப் பரப்பு வழித்தொகையாக மாற்றலாம்.

V- எனும் கன பரிமாணத்தை மூடிய வளைதளப் பரப்பு S-ன் மீது $\bar{F}$ எனும் வெக்டார் சார்பின் செங்கோட்டு வழிக் கூறின் பரப்பு வழித்தொகை, அம்மூடிய பரப்பினுள் உள்ள கன அளவு முழுமையிலும் எடுக்கப்பட்ட, அச்சார்பின் பாய்வு மதிப்பின் கன வழித்தொகைக்குச் சமம்.

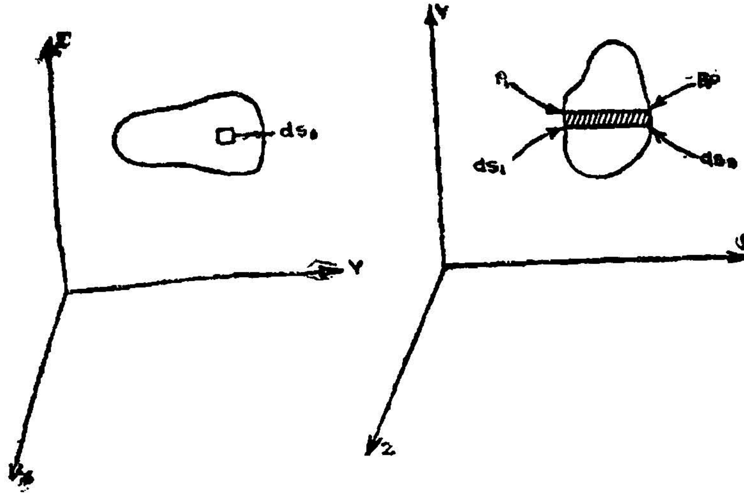
அதாவது $\iiint_V (\nabla.\bar{A})dv = \iint_s \bar{A}.d\bar{S}$

இதனை நிரூபிக்க இந்த சமன்பாட்டின் இடது பக்கத்தைப் பின்வருமாறு விரிவாக்கலாம். அதாவது

$$\iiint (\nabla.\bar{A})\,dv = \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_V \frac{\partial A_x}{\partial x} dx\,dy\,dz + \iiint_V \frac{\partial A_y}{\partial y} dx\,dy\,dz + \iiint_V \frac{\partial A_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

இந்த சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்திலுள்ள முதல் தொகையீட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 11

படம் 11-ல் P_1 (x_1, y_1, z) லிருந்து P_2 (x_2, y_2, z) வரை நீளும் dy dz என்ற பரப்பளவினை உடைய வரித்துண்டு (Strip) வழியே x பற்றிய தொகையீட்டைக் காணும்போது பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$\iiint_v \frac{\partial A_x}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint [A_x(x_2, y, z) - A_x(x_1, y, z) dy\, dz$$

இங்கு (x_1, y, z), (x_2, y, z) என்பன P_1, P_2 ன் ஆயங்கள் ஆகும். P_1-ல் $dy\, dz = -dsx$. P_2-வில் $dy\, dz = +dsx$.

எனவே

$$\iiint_V \frac{\partial A_x}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint_s A_x\, ds_x$$

இங்கு வலது பக்கத்திலுள்ள பரப்பு வழித்தொகை V-ஐ மூடிய அந்த பரப்பு முழுவதிலும் கண்டு பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. இதேமாதிரி

$$\iiint_V \frac{\partial A_y}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint_s A_y\, ds_y$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_z}{\partial Z}\, dx\, dy\, dz = \iint_s A_z\, ds_z$$

என எழுதலாம். எனவே இம்மூன்றினையும் கூட்ட

$$\iint_V (\nabla . \bar{A})\, dV = \iint_s [A_x ds_x + A_y ds_y + A_z ds_z] = \iint_s \bar{A}.d\,\bar{S}.$$

இவ்வாறு காஸின் தேற்றத்தை நிருபிக்கலாம்.

பாய்வுத் தேற்றத்தின் இயற்பியல் விளக்கம்.

$\bar{A}$ எனும் திசை வேகத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் பாய்மப் பகுதி ஒன்றினுள் மூடிய வளைதளப் பரப்பு S-ஒன்றினை எடுத்துக் கொண்டால், இப்பரப்பின் வழிச்செல்லும் பாய்மத்தின் அளவை இரு வழிகளில் கணக்கிடலாம்.

(1) பரப்பிற்கு நேர்குத்துக் கோட்டின் வழியில் வெளிப்பாயும் மொத்த அளவினைக் கணக்கிடலாம். இது

$\iint_s \bar{A}.d\,\bar{S}$ ஆகும்.

வளைதள பரப்பினுள் முழு கன அளவிலுமாக ஓரலகு கன அளவிற்கு எவ்வளவு பாய்மம் பாய்கிறது என்பதை கணக்கிட்டும் அறியலாம். இது $\nabla.\bar{A}$ எனும் $\bar{A}$-யின் பாய்வு மதிப்பாகும்.

dv எனும் நுண் கன அளவின் வழியே ஒரு செகண்டில் பாயும் பாய்ம அளவு $\nabla.\bar{A}dv$. இதனை அக்கன அளவு முழுவதும் கண்டு கூட்டினால்

$\iiint_V \nabla . \bar{A}\, dv$ கிடைக்கும். இவ்விரண்டு அளவுகளும் சமமாகையால்,

$$\iint_S \bar{A} . d\bar{s} = \iiint_V \nabla . \bar{A}\, dv$$

எனக் கிடைக்கிறது.

1.14 கிரீனின் தேற்றம் (Green's theorem)

$$\bar{A} = u \nabla w$$

இங்கு வெக்டார் புலம் $\bar{A}$ என்பது u என்ற திசையிலி சார்பு w என்ற மற்றொரு திசையிலிச் சார்பின் சரிவு இவற்றின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதப்பட்டுள்ளது. $\bar{A}$யின் பாய்வினை

$$\nabla . \bar{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[u \frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[u \frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[u \frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

$$= u\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= u\, \nabla^2 w + \nabla u . \nabla w \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

என்று எழுதலாம்.

காஸின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கிரீனின் தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம். ஆகவே காஸ் தேற்றத்தின் இடப்பக்கத்தில்

$\nabla . \bar{A}$ க்கு பிரதியிட்டு

$$\iiint_V (u\nabla^2 w + \nabla u . \nabla w) dv$$

$$= \iint_S (u . \nabla w) . ds \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

என்று எழுதலாம். இந்த மாற்றம் கிரின் தேற்றத்தின் முதல் வடிவம் எனக்கூறுவோம்.

சமன்பாடு (2)-ல் u, w-ஐ இடம் மாற்றி எழுதினால்,

$$\iiint_V (w\nabla^2 u + \nabla w . \nabla u) dv$$

$$= \iint_S (w . \nabla \mathrm{u}) . ds \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

(3)-ஐ (2)- லிருந்து கழிக்க

$$\iiint_V (u\nabla^2 w - w\nabla^2 u) dv$$

$$\iint_S (u\nabla w - w\nabla u) . ds$$

எனக் கிடைக்கிறது. இதனை கிரீன் தேற்றத்தின் இரண்டாவது வடிவம் எனக் கூறுவோம்.

இந்தத் தேற்றம் மின் இயக்க இயலிலும், பாய்ம இயக்க இயலிலும் பெரிதும் பயன்படுகிறது.

ஒரு சமதளத்திலுள்ள பரப்பிற்கு பயன்படுத்தப்படும் கிரீனின் தேற்றம்:

C என்ற வளைவரையினையுடைய xy தளத்தில் S என்பது ஒரு பகுதியாயும் MN என்பவையும், அவற்றின் வகைக் கெழுக்களும், x,y-ல் தொடர்ச்சியானதாய் இருந்தால்

$$\int_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy$$

என்று எழுதலாம். இங்கு C-ஐ மிகைத் திசையில் சுற்ற வேண்டும்.

நிருபணம்: ஸ்டோக் தேற்றத்தின்படி,

$$\int_C \bar{A}\,.\,\bar{d}r = \iint_S (\nabla \times \bar{A}), \hat{n} d\bar{s}$$

ஆகும்

C என்ற வளைவரை XY தளத்தில் வரையப்பட்டால்

$$\hat{n} = \hat{k};\ \bar{A} = \hat{\imath}\, A_x + \hat{\jmath}\, A_y \quad \text{ஆகும்}$$

எனவே

$$\int_C \bar{A}. d\hat{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{A}). \hat{k} d\bar{s}$$

$A_x = M; A_y = N$ எனக் கொண்டால்,

$$\nabla \times \bar{A} = \frac{\partial N}{\partial z}\hat{\imath} + \frac{\partial M}{\partial z}\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$$

ஆகும்.

எனவே

$$(\nabla \times \bar{A}). \hat{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$\bar{A}.d\bar{r} = Mdx + N\,dy$ ஆகும்.

எனவே ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தை பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்

$$\int_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

இதுவே சமதள பரப்பில் கிரீனின் தேற்றமாகும்.

1.15 நிலை மின்னியலில் காஸின் தேற்றம்:

தேற்றம்: ஒரு மூடிய பரப்பின் வழிச் செல்லும் மொத்த நேர்குத்து மின் தூண்டல் (total normal electric induction), அந்த பரப்பளவிற்குள் அடங்கிய மின்னூட்டத்தின் 4π தடவைக்குச் சமம்.

DR. T.P.M. LIBRARY ★ MADURAI KAMARAJ UNIVERSITY ★

படம் 12

நிருபணம்: படம் 12-ல் S என்பது ஒரு மூடிய பரப்பளவாகவும், $\bar{r}$ என்பது வெக்டார் $\overline{OP}$ ஆகவும் இருக்கட்டும் S-ல் ds என்ற நுண்ணிய பரப்பளவை எடுத்துக் கொள். இங்கு $\hat{n}$ என்பது ds –ன் மிகைத் திசையில் வரையப்பட்ட ஓரலகு நேர்குத்து வெக்டாராகும். dS-ல் இதன் வழியே செல்லும் நேர்குத்து மின்தூண்டலை $\bar{E}.\overline{ds}$ என எழுதலாம். இங்கு $\bar{E}$ என்பது P-ல் மின் செறிவாகும். அதாவது $E = \frac{q}{r^2}\hat{k}$, q

என்பது Q-வில் உள்ள மின்னூட்டம், $\hat{k}$ என்பது $\hat{r}$-ன் திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டார். அதாவது $\hat{k} - \frac{r}{|v|}$.

எனவே ds-ல் நேர் குத்து மின் தூண்டல்

$$= \frac{q}{r^5}\bar{r}.\overline{ds} = \frac{q}{r^5}\bar{r}.\hat{n}ds.$$

இதனை பயன்படுத்தி மூடிய பரப்பளவு வழி செல்லும் மொத்த நேர்குத்து மின் தூண்டலைக் கணக்கிடலாம்.

$$\therefore\ S = \iint_s \frac{q}{r^3}\bar{r}.\hat{n}\,ds = q\iint_s \frac{\bar{r}.\hat{n}}{v^3}ds$$

காஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$\iint\limits_{S} \frac{\bar{r}.\hat{n}}{r^3}\,ds = \iiint\limits_{V} div\left(\frac{r}{r^3}\right)dv$$

ஆகும்.

ஆனால் $\nabla(\bar{r}) = \left(\nabla\overline{r^3}\right).\bar{r} + \bar{r}.+\bar{r}^{-3}\,\nabla.\bar{r} = -3v^{-5}\bar{r},\bar{r} + 3v^{-3} =$ 0.

V என்ற கனபரிமாணத்திற்குள் $r \neq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும். மேலும் தோற்றுவாய் அல்லது ஆதி 0, V-க்கு வெளியே இருக்க வேண்டும்.

எனவே இந்த கன பரிமாணத்திற்கும் மின்னூட்டம் O-ஆக இருந்தால். இதனை மூடிய பரப்பின் வழிச் செல்லும் மொத்த நேர்குத்து மின்தூண்டல் சுழியமாகும்.

ஆக U. S-க்குள் இருந்தால் O-வை சுற்றி P என்ற ஆரத் திணையுடைய F என்ற வட்டத்தை வரை. S,இவற்றின் இடையே உள்ள பகுதியை T எனக் கூறுவோம். பாய்வு தேற்றத்தின்படி

$$\iint_{S+T} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{ds} ds = \iint_{S} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^2} ds + \iint_{S} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^2} ds = \int \int_{T} \int \Delta \left(\frac{\bar{r}}{r^2}\right) dv = 0$$

இங்கு T-க்குள் $r \neq 0$.

$$\therefore \iint_{S} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3} ds = -\iint_{T} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3} ds$$

T-க்குள் $r = P, \hat{n} = -\frac{\bar{r}}{p}$

எனவே $\frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3} \left(\frac{-\bar{r}}{P^5}\right).\bar{r} = \frac{-\bar{r}.\bar{r}}{P^4} = \frac{-P^2}{P^4} = \frac{1}{-P^2}$

$$\therefore \iint_{S} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3} ds = -\iint_{T} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3} ds = -\iint_{T} \frac{ds}{P^2} = \frac{1}{P^2} - \iint_{T} ds$$

$$= \frac{4\pi\, P^2}{P^2} = 4\pi$$

எனவே q என்ற மின்னூட்டத்தையுடைய கனபரிமாணத்தை மூடிய S எனும் பரப்பின் வழியே செல்லும் மொத்த நேர்குத்து மின் தூண்டல்

$$= q \iint_{S} \frac{r.n}{r^3} ds = 4\pi\, q \text{ ஆகும்.}$$

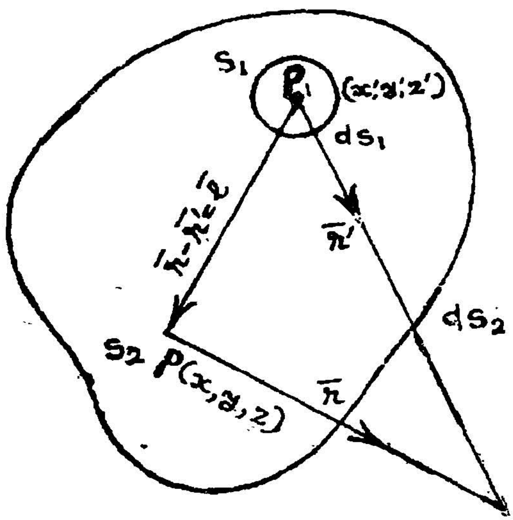
1.16 கிரீன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பாய்சான் (Poisson) சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்:

பாய்சான் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $\nabla^2 Q = 0$ என்பதாகும். இங்கு Q என்பது திசையிலி சார்பு, ∇^2 என்பது லேப்லாஸின் செயலி. இந்த சமன்பாடு ஒரு படித்தானது அல்ல. பாய்சான் சமன் பாட்டை

$$\nabla^2 \emptyset = f(x, y, z)$$

என்று எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு f என்பது x, y, z என்பவைகளின் திசையிலிச் சார்பு.

திசையிலிச் சார்பு $f(x, y, z)$ கொடுக்கப்பட்டதாகக் கொண்டு $P'(x, y, z)$ என்ற காட்சிப் பதிவின் நிலைப்புள்ளிக்கு (fixed point of observation) $\emptyset(x', y', z)$ -ஐத் தீர்ப்போம். $P(x, y, z)$ என்பதை மாறும் புள்ளியாகக் கொண்டு அதன் வழியில் தொகையீடுகளைக் காணுவோம் (படம் 13) நிலைப்புள்ளிP^1 —ஐப் பற்றிய S_0 என்ற ஆரமுள்ள



படம் 13

ஒரு கோள உட்குழிவினைக் (spherical cavity) கொண்ட V என்ற ஒரு கன பரிமாணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். S_1, S_2 என்பன அதன் உள், வெளிப் பரப்பளவுகளாக இருக்கட்டும்.

$$u = \frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|} = \frac{1}{l} \qquad \ldots\ldots (1) \text{ என்க.}$$

இங்கு $\overline{OP} = \bar{r}, \overline{\bar{O}P'} = r'. \overline{\bar{P}P'} = \bar{l}$

என்பன, O என்னும் தோற்றுவாயைப் பொறுத்த வெக்டார்களாக இருக்கட்டும். இதிலிருந்து

$$u - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = 0 \qquad \dots\dots\dots (2)$$

என அறிகிறோம் எனவே.

$$\nabla^2 u = \nabla^2 \frac{1}{l} = \nabla^2 \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = 0$$

இதிலிருந்து லேப்லாஸ் சமன்பாடு u –க்குப் பொருந்தும் எனத் தெரிகிறது. u, w இவற்றின், முதல், இரண்டாவது வகைக் கெழுக்கள் ஆகியவை தீர்வானதாகவும், தொடர்ச்சியானதாகவும் இருந்தால்,

$$\iiint_T (u\nabla^2 \mathrm{w} - \mathrm{w}\nabla^2 \mathrm{u})\, dv = \iint_S (u\nabla w - w\nabla u).d\bar{S}$$

என கிரீனின் தேற்றத்தின்படி எழுதலாம். இதையே சமன்பாடுகள் (1) (2)-ஐப் பிரிதியீட்டு

$$\iiint_V \frac{\nabla^2 w}{l} dv = \iint_S \left[\frac{\nabla w}{l} - w\nabla\left(\frac{1}{l}\right)\right] d\bar{s}$$

என்று எழுதலாம், இங்கு $w = \emptyset$ என்றும் $\nabla^2 w = f$ என்றும் கொண்டு

$$\iiint_V \frac{f(x,y,z)}{l}\, dv = \iint_S \left[\frac{\nabla\emptyset}{l} - \emptyset\nabla\frac{1}{l}\right].d\bar{s}$$

என்று காணலாம். ….. (3)

சமன்பாடு (3)-ன் வலப்பக்கத்தில் பரப்புத் தொகையீட்டினைக் காணும்போது, பரப்பளவுகள் S_1, S_2 இவைகளின் மேல் காண வேண்டும்.

வலப்பக்கம்

$$= \iint_{s1} \left[\frac{\nabla\emptyset}{l} - \emptyset\nabla\left(\frac{1}{l}\right)\right].d\bar{s} + \iint_{s2} \left[\frac{\nabla\emptyset}{l} - \emptyset\nabla\left(\frac{1}{l}\right)\right].d\bar{s}$$

$$\iint_{S1} \frac{\nabla\emptyset}{l}.d\bar{s}$$

இதில் S_0 சுழியத்தை நெருங்கும்போது

$$\nabla\emptyset.d\bar{S} \rightarrow -\frac{\partial\emptyset}{\partial r}|P, \frac{4\pi s_0^2}{S_o}$$

S_o சுழியத்தை நெருங்கும்போது இதன் வலப்பக்கம் $\rightarrow 0$

$$\iint_{s1} \emptyset\nabla\left(\frac{1}{l}\right).dS \rightarrow -\emptyset\left|P^1\left(-\frac{1}{s_{0^2}}\right)\right.(-4\pi x S_0^2)$$

$$= -4\pi\emptyset|P^1 = -4\pi\emptyset(x', y', z')$$

இப்பொழுது V என்ற கன பரிமாணம் கந்தழியை நெருங்கும் போது, $\frac{1}{r}$ –ஐப் போல் $\emptyset$-யும் சுழியத்தை நெருங்குகிறது என்ற எல்லை நிபந்தனையை எடுத்துக் கொள்வோம்,

கந்தழியில் $\frac{\nabla\emptyset}{l}$-ம் $\emptyset\nabla\left(\frac{1}{l}\right)$ம்

$\frac{1}{r^2}$ என்ற மதிப்பினைப் பெறுகிறது. எனவே பரப்புத் தொகையீட்டிற்குப் பிறகு இந்த இரண்டும் $\frac{1}{n}$ என்ற மதிப்பினை உடையவைகளாக

இருப்பதால் கந்தழியில் இவையிரண்டும் சுழிய மதிப்பைப் பெறுகின்றன. எனவே இதன்படி

$$\iiint_V \frac{1}{l} f(x,y,z)dv = -4\pi\emptyset(x',y',z',)$$

அல்லது

$$\emptyset(x',y',z') = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f(x,y,z)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}dx\,dy\,dz$$

என்றாகிறது. இது பாய்சான் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

1.17 பாய்ம இயக்கத்தில் வெக்டாரின் பயன் (Application to hydrodynamics):

மூவளவை வெளியின் ஒரு பகுதியில் (x,y,z,t) என்னும் செறிவுடைய பாய்மம் நிரம்பியுள்ளதாகக் கொள்வோம். இப்பகுதியில் S என்ற மூடிய பரப்பினை உடைய V என்னும் கன பரிமாணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். நேரம் t-ல் இக் கன பரிமாணத்துக்குள் உள்ள பாய்மத்தின் திண்மை Q(t) எனக்கொள்வோம், அப்படியானால்

$$Q(t) = \iiint_V P\,dV \qquad \text{..........................}(1)$$

$\bar{v}$ என்பது பாய்மத்தில் ஒரு துகளின் திசை வேகமானால், V-ல் உள்ள பாய்மத்தின் திண்மை,

$$\frac{dQ}{Dt} = -\iint_S (P\bar{V})\,d\bar{s} \qquad \text{................}(2)$$

என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது.

சுமன்பாடு (1)-ன் நேரம்பற்றிய வகைக்கெழு கண்டு (2)-உடன் ஒப்பிட்டால்

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial t}\, dV - \left[\iint_s (P\bar{v}) \,.\, d\bar{s}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

என்று கிடைக்கிறது.

ஆனால் காஸின் தேற்றத்தின்படி

$$\iint (P\bar{v}). d\bar{S} = \iiint_v \nabla. (P\bar{v}) dV \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

இதனை (3)-ல் பிரிதியிட

$$\iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial t} - \nabla. (P\bar{V})\right] dV = O \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

என்றாகிறது.

இங்கு தொகைச் சார்பு தொடர்ச்சியுள்ளதாக இருப்பதாலும் V என்ற கன பரிமாணம் ஏதாவது ஒன்றாக இருப்பதாலும் சமன்பாடு (5)-ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla. (P\bar{V}) = O \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

இதுபாய்ம இயலின் அடிப்படை சமன்பாடு ஆகும். இதையே பாய்ம இயலின் தொடர்ச்சி சமன்பாடு (equation of continuity) என்று கூறுவோம்.

பாய்மம் அமுக்கப்பட இயலாததாயிருந்தால் அதன் செறிவு ஒரு மாறிலி ஆகிவிடும். அப்பொழுது.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 = P\, (\nabla. \bar{v}) \qquad \ldots\ldots (7)$$

பாய்ம ஓட்டம் சுழற்சியில்லாததாயின்

$$\nabla \times \bar{v} = 0 \qquad \ldots\ldots (8)$$

ஆனால் வெக்டார் நுண்கணிதத்தின்படி

$$\bar{v} = \nabla 0 \qquad \ldots\ldots (9)$$

என்றால் தான், $\nabla \times \bar{v} = 0$ ஆகும். இங்கு $\emptyset$ என்பது ஒரு திசையிலி சார்பு. சமன்பாடு (7)-லிருந்து ஒரு இறுகாத் தன்மையுள்ள பாய்மத்திற்கு $\nabla . \bar{v} = 0$ என காண்கிறோம். எனவே $\emptyset$ என்பது திசை வேக அழுத்தம் (velocity potential) ஆகும். இது $|\nabla.(\nabla\emptyset) = \nabla^2\emptyset = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குக் கட்டுப்படும்.

பாய்மத்தின் ஒரு நிலையான வரம்பில் திசை வேகத்துக்கு நேர்குத்துக்கூறு கிடையாது.எனவே சமன்பாடு (9)ன் படி நேர்குத்துக் கோட்டின் வழியே $\emptyset$-ன் மாறுவீதமான

$\frac{\partial\emptyset}{\partial n} = 0$ ஆகிறது.

H (x,y,z,t) என்ற சார்பு பாய்மத்தில் ஒரு துகளின் அழுத்தம், செறிவு மற்ற எந்த ஒரு பண்பையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

$\frac{\partial H}{\partial t}$ என்பது குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியில் H -ன் t பற்றிய மாறு வீதமாகும். H –ன் மொத்த வகைக்கெழு,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\bar{v} = \hat{\imath}\frac{dx}{dt} + \hat{\jmath}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}$$

$\nabla H = \hat{\imath}\frac{\partial H}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial H}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial H}{\partial t}$ என்பதால்

$$\bar{v}.H\Delta H = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ஆகும். இதிலிருந்து,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \bar{v}.(\nabla H) \qquad \ldots\ldots\ldots 10)$$

எழுதலாம்.

1.18 ஆய்லரின் இயக்க சமன்பாடு (Euler's equations of motion).

உராய்வு இல்லாத பாய்மத்தின் இயக்க சமன்பாட்டை அறிய, பாய்மத்தின் dx, dy, dz என்ற கன பரிமாணம் உள்ள P dxdydz என்ற திண்மை உடைய நுண்ணிய பகுதியில் (element) செயல்படும் விசைகளை எடுத்துக் கொள்வோம். P என்பது பாய்மத்தின் அழுத்தமானால்,

$$P\frac{dy}{dz} - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dy\,dz = -\frac{\partial P}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

என்பது நுண்ணிய பகுதியில், x திசையில் செயல்படும் விசையாகும். $\bar{F}$ என்பது ஓரலகு திண்மையுள்ள பாய்மத்தின் மீது செயல்படும் புற விசையானால் $F_x\,Pdx\,dy\,dz$ என்பது அந்த நுண்ணிய பகுதியின் மேல் திசையில் செயல்படும் புற விசையாகும். x திசையில் இந்நுண்ணிய பகுதியின் முடுக்கம் $\frac{dv_x}{dt}$ ஆகும்.

எனவே நியூட்டனின் 2-வது விதிப்படி

$\frac{dv_x}{dt}.Pdx\,dy\,dz = F_x\,P\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$ என்று எழுதலாம்.

இது மாதிரியே y, z திசைகளில் எழுதி ஆய்லரின்

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}\,\frac{I}{P}\nabla P \qquad \ldots\ldots\ (11)$$

என்னும் இயக்க சமன்பாட்டை அடையலாம்.

ஆனால் சமன்பாடு (10)-ன் படி

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}.\nabla)\bar{v} \qquad \ldots\ldots (12)$$

ஆனால் $(\bar{v}.\nabla)\bar{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 + (\nabla \times \bar{v}) \times \bar{v}$ ..... (13)

என அறிவோம்.

(12), (13)-ஐப் பயன்படுத்தி ஆய்லரின் இயக்க சமன்பாட்டைப் பின்வரும் வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 + (\nabla \times \bar{v}) \times \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{P}\nabla P \qquad \ldots\ldots (14)$$

F காப்பு நிலை விசையாக இருந்தால் அதற்கு V என்ற அழுத்தம் உள்ளது.

$\therefore \quad F = -\nabla V$ ஆகும்.

பாய்மத்தின் இயக்கம் சுழற்சியில்லாததாக இருந்தால்,

$$\nabla \times \bar{v} = 0 \quad ; \quad |\bar{v}| = \nabla\emptyset \text{ ஆகும்.}$$

எனவே சமன்பாடு (14)-ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\nabla\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial t}\right)\frac{1}{2}\nabla \mathrm{v}^2 + +\nabla V + \frac{1}{P}\nabla P = 0$$

அல்லது $\nabla\omega = 0$ .... (15)

இங்கு $\omega = \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial t}\right) + \frac{v^2}{2} + V + \frac{\nabla P}{P}$

ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில், dr என்பது பாய்மத்தில் ஏதாவதொரு வழியைக் குறித்தால்,

$$d\bar{r} = \hat{\imath}\,dx + \hat{\jmath}\,dy + \hat{k}\,dz \text{ ஆகும்.}$$

$$\nabla\omega.d\bar{r} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right).(\hat{\imath}\,dx + \hat{\jmath}\,dy + \hat{k}\,dz)$$

$$= \frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega}{\partial z}dz$$

$$= d\omega = O \qquad \ldots\ldots (16)$$

இந்த ஸ்கேலார் பெருக்கல் எழுத சமன்பாடு (15)-ஐ பயன்படுத்தியுள்ளோம்.

ஆனால் (16)-ன் படி $\omega = \beta(t)$ என்றாகிறது. அதாவது w, t-ன் சார்பு என்று எழுதுகிறோம்.

அதாவது $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + \frac{\nabla P}{P}$

$= \beta(t)$ ஆகும். .... (17)

இதற்கு பெர்னுலியின் சமன்பாடு என்று பெயர்.

குறிப்பாக, P ஒரு மாறிலியாகவும் பாய்மத்தின் இயக்கம் சீரானதாகவும் இருந்தால் $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ஆகிறது.

எனவே பெர்னுலியின் சமன்பாடு

$\frac{v^2}{2} + V + \frac{\nabla P}{P} = \beta$ என்ற வடிவத்தைப் பெறுகிறது. இப்பொழுது β ஒரு மாறிலியாகும். இந்த சமன்பாட்டின் இயற்பியல் விளக்கம் பின்வருமாறு:

பாய்மத்தின் எல்லாப் புள்ளியிலும், அதன் ஓரலகு திண்மத்தின் இயக்க ஆற்றல், நிலை ஆற்றல், அழுத்த ஆற்றல் இவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலியாகும்.

1.19 வளைவரைக் கூறுகள் (curviliner coordinates):

கார்டிஷியன் கூற்றுத் தொகுதியில் மூவளவை வெளியில் P என்னும் எந்த புள்ளியும் (x, y, z) என்ற கூறுகளால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு (h, k, l) என்னும் புள்ளியானது $(x = h, y = k, z = l)$ என்ற மூன்று தளங்களும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியென வரையறுக்கப்படுகிறது இந்த தளங்கள் இரட்டைகளாக எடுக்கும் போது ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக $(orthogonal)$ இருக்கின்றன.

பொதுவாக, மூவளவை வெளியில் உள்ள ஒரு புள்ளியை $u_1 =$ மாறிலி, $u_2 =$ மாறிலி, $u_3 =$ மாறிலி என்ற மூன்று பரப்புகள்

வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியென வரையறுக்கலாம். இந்த பரப்புகள் சமதளமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை. இப்பொழுது நமக்கு வளைவரைக் கூற்றுத்தொகுதி கிடைக்கிறது. இதில் ஒவ்வொரு புள்ளியும் (u_1, u_2, u_3)என்ற கூறுகளால் குறிக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது P என்னு ஒரு புள்ளி (x, y, z) என்ற கார்டிஷியன் கூறுகளால் குறிக்கப்படுகிறதென்றும்

$$u_1 = u_1(x, y, z)$$

$$u_2 = u_2(x, y, z)$$

$$u_3 = u_3(x, y, z) \qquad \ldots\ldots\ldots \ (1)$$

என்ற மூன்று கணியங்களைத் தனி சிறப்புப்பட கண்டு பிடிக்க முடியுமென்றும் வைத்துக் கொள்வோம்.

இதற்கு சார்புகள் u_1, u_2, u_3 தொடர்ச்சி வகைக்கெழு காணக் கூடியதாக இருத்தல் வேண்டும். மேலும் u_1, u_2, u_3 வரையறுக்கப்படுகிற பகுதி முழுவதும்,

$$\nabla u_1 \ \nabla \mathrm{u}_2 \times u_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial u} \\ \frac{\partial u_2}{\partial u} & \frac{\partial u_2}{\partial u} & \frac{\partial u_2}{\partial u} \\ \frac{\partial u_3}{\partial u} & \frac{\partial u_3}{\partial u} & \frac{\partial u_3}{\partial u} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \ldots\ldots\ (2)$$

ஆக இருக்க வேண்டும்.

அப்பொழுது $(u_1, u_2, u_3)\ P$- யின் வளைவரைக் கூறுகள் ஆகும். சமன்பாடு (1) வளைவரைக் கூறுகளிலிருந்து செவ்வகக் கூறுகளின் உருவ மாற்றத்தைக் கொடுக்கிறது.

அணிக்கோவை (சமன்பாடு 2) உருவ மாற்றத்தின் ஜெகோபியம் என அமைக்கப்படும். இது எளிமையாக

$$J\left(\frac{n_1, n_2, n_3}{x, y, z}\right)$$

என குறிக்கப்படும்.

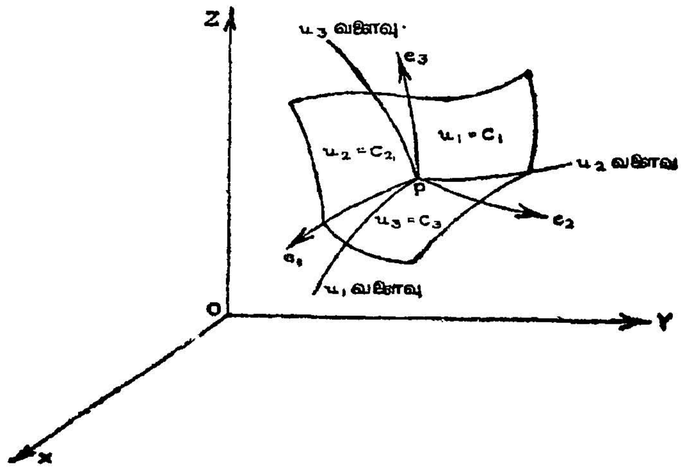
J- யின் மதிப்பு சுழியமாகாமலிருக்கும் தன்மை (x, y, z)-க்கும். (u_1, u_2, u_3)-க்கும் ஒன்றுக்கொன்றின் ஒத்த இயல்பை உறுதி செய்கிறது.

1.20 ஆயத்தொலை மேற் பரப்புகள், ஆயத் தொலை வளைகோடுகள்

$$(co - ordinate\ surfaces, co - ordinate\ curves)$$

$u_1 =$ மாறிலி, $u_2 =$ மாறிலி $u_3 =$ மாறிலி என்பதால் மூவளவை வெளியில் உள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கும். எனவே, மூவளவை வெளியில் கொடுக்கப்பட்ட P என்னும் புள்ளி வழியாக $u_1 = c_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3$ என்று மூன்று மேற்பரப்புகள் செல்லுகின்றன என்பது தெளிவாகிறது. இந்த மேற்பரப்புகளுக்கு ஆயத்தொலை மேற்பரப்புகள் எனப் பெயர். தனித்தனியாக இவைகளை u_1 மேற்பரப்பு, u_2 மேற்பரப்பு, u_3 மேற்பரப்பு எனக் கூறலாம்.

இரண்டு ஆயத் தொலை மேற்பரப்புகள் ஒரு வளைகோட்டில் வெட்டிக் கொள்வதால், புள்ளி P-யின் வழியே மூன்று வளைகோடுகள் செல்கின்றது. இவைகளுக்கு ஆயத்தொலை வளைகோடுகள் என்று பெயர். u_1 மட்டும் மாறுகின்ற வளைகோட்டுக்கு u_1 வளைகோடு என்று பெயர். இதுபோன்றே u_2 வளைகோடும் u_3 வளைகோடும் வரையறுக்கப்படுகின்றன.



படம் -14

குறிப்பு: ஆயத்தொலை மேற்பரப்புகள் இரட்டையாக நேர்குத்தாக இருப்பதால், வளைவரைக் கூற்றுத் தொகுதி நேர்குத்தாக இருக்கிறது எனக் கூறப்படும்.

அலகு தொடுகோடும் நேர்குத்து வெக்டாரும்:-

$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k},$ என்பன அச்சுகளின் வழியே உள்ள அலகு வெக்டார்களானால், $P\,(x, y, z)$ என்னும் புள்ளியின் நிலை வெக்டார் $\bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ ஆகும். இதை வளைவரைக் கூறுகள் (u_1, u_2, u_3)க்கு மாற்றி எழுதினால் $\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_2, u_3)$ ஆகும்.

u_1 வளை கோட்டின் வழியே u_4 மட்டுமே மாறுவதால் $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ என்பது P என்னும் புள்ளியில் வளைகோட்டின் தொடுகோட்டு வெக்டாராகும்.

$\left|\frac{\partial v}{\partial u_1}\right| = h$ எனக்கொண்டால்

$\hat{e}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} / \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}\right| = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}$ என்பது P என்னும் புள்ளியில், u_1 வளைகோட்டுக்கு ஓரலகு தொடுகோட்டு வெக்டாராகும். இது மாதிரியே

$$\hat{e} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}, / \hat{e} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3}$$

என எழுதலாம்.

இங்கு $h_2 = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2}\right|, h_3 = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3}\right|$

என்பன முறையே, P என்னும் புள்ளியில் u_2, u_3 வளை கோடுகளுக்கு வரையப்பட்ட அலகு தொடுகோட்டு வெக்டார்களாகும்.

எனவே,

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} = h_1\, \hat{e}_1, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} = h_2\, \hat{e}_2, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} = h_3\, \hat{e}_3$$

எனக் கிடைக்கிறது h_1, h_2, h_3 எனும் எண்கள் அளவு முறைக்குரிய $(metrical)$ கெழுக்கள் அல்லது அளவு காரணிகள் $(scale\ factors)$ எனப்படும்.

புள்ளி P-யில், $u_1 = c_1$ என்ற மேற்பரப்புக்கு, ∇u_1 நேர்குத்து வழியே உள்ளது. எனவே $\bar{E}_1 = \left|\frac{\nabla u_1}{\nabla u_1}\right|$-கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் $u_1 = c_1$என்ற மேற்பரப்புக்கு அலகு நேர்குத்து வெக்டாராகும். இது போன்றே மற்ற இரு அலகு நேர்குத்து வெக்டார்களையும் எழுதலாம்.

அலகு தொடுகோட்டு வெக்டார் $\hat{e}, u_2 = c_2, u_3 = c_3$ என்ற மேற்பரப்புகளுக்கு புள்ளி P-ல் வரையப்பட்ட இரண்டு தொடுகோட்டு

தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் கோட்டின் வழியே அமைகிறது. வளைவரைத் தொகுதி நேர்குத்தாக இருந்தால் தான், இது, P என்னும் புள்ளியில் $u_1 = c_1$ என்ற மேற்பரப்புக்கு அலகு நேர்குத்தாக ஆகும்.

1.21 செங்குத்துக்கான நிபந்தனைகள் $(orthogonality\ condition)$:

$\bar{r} = \bar{r}\,(u_1, u_2, u_3)$ ஆக இருக்கட்டும். இப்பொழுது

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3}$ ஆகியவை முறையே, P- என்னும் புள்ளியில் u_1, u_2, u_3 வளைகோடுகளின் வழி செல்லும் தொடுகோட்டு வெக்டார்களாகும். கூற்றுத் தொகுதி நேர்குத்தாக இருப்பதால் P வழி செல்லும் மூன்று மேற்பரப்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன. எனவே ஆயத் தொலை வளைகோடுகளுக்கு தொடுகோட்டு வெக்டார்கள் இரட்டை இரட்டையாக செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. இந்த நிபந்தனைக்குட்பட வேண்டுமானால்

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} = 0, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} = 0, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} = 0$$

ஆக இருக்க வேண்டும்.

எனவே இவை நேர்குத்தாக இருப்பதற்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளாகும்.

வில்லின் நீளம், மூலக பருமன் $(Elemental\ Volume)$:

$\bar{r} = \bar{r}\,(u_1, u_2, u_3)$ என்பதால்

$$\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} .\ du_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} .\ du_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} .\ du_3$$

$$= h_1 du_1 \hat{e}_1 + h_2 du_2 \hat{e}_2 + h_3 du_3 \hat{e}_3$$

எனவே வில்லின் இரண்டு அடுத்தடுத்த புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள நீளம் ds,

$$ds^2 \equiv dr.d\bar{r} \text{ ஆகும்.}$$

$$\hat{e}_1.\hat{e}_2 = 0, \hat{e}_2.\hat{e}_3 = 0, \hat{e}_3.\hat{e}_1 = 0$$

என்ற நேர்குத்து நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி

$$ds^2 = (h_1 du_1 \hat{e}_1 + h_2 du_2 \hat{e}_2 + h_3 du_3 \hat{e}_3).$$

$$(h_1 du_1 \hat{e}_1 + h_2 du_2 \hat{e}_2 + h_3 du_3 \hat{e}_3)$$

$$= h_{1^2} d\bar{u}_1 \ + h_2{}^2 d\bar{u}_2{}^2 + \ h_3{}^2 du_2{}^2$$

என எழுதலாம்.

u_1-வளைகோட்டில், u_2, u_3 மாறிகளால் ஆயத்தொலை வளைகோடுகளின் வழியேயுள்ள வில்லின் நீளங்கள் முறையே,

$$ds_1 = h_1 du_1$$

$$ds_2 = h_2 du_2$$

$$ds_3 = h_3 du_3 \text{ ஆகும்.}$$

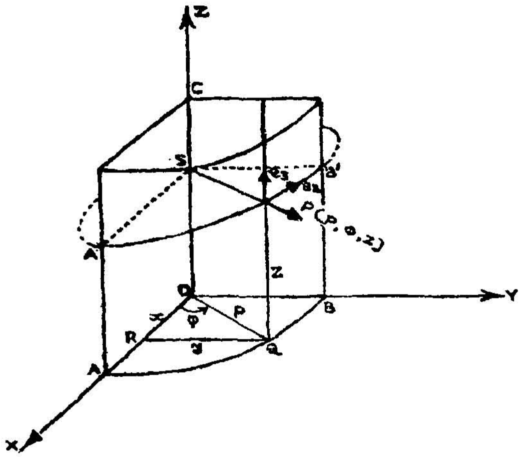
மூலக பருமன் $dv = ds_1 ds_2 ds_3$

$$= h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 \ du_3 \text{ ஆகும்.}$$

1.22 உருளைக் கூறுகள் (P$\emptyset_1$ z) *cylindrical coordinates*:

P என்பது (x, y, z) என்ற புள்ளியாகவும், P-யிலிருந்து XOY தளத்துக்கு வரையப்பட்ட நேர்குத்தின்படி Q ஆகவும் இருக்கட்டும். OQ-$P, < XOQ$-$\emptyset$. இப்பொழுது (P, P) என்பன Q-வின் கோணதூரக் கூறுகள் ஆகும்.

$QP = z$ ஆதலால் D-யின் கூறுகள் $(P, \emptyset, z)$ ஆகும். இக்கூறுகளுக்கு P-யின் உருளைக்கூறுகள் என்று பெயர்.



படம் 16

செங்கோண முக்கோணம் OQR- லிருந்து

$$OR = x = OQ\cos\emptyset = P\cos\emptyset$$

$$RQ = y = OQ\sin\emptyset = \mathrm{P}\sin\emptyset$$

எனவே உருளைக் கூறுகளும், செவ்வகக் கூறுகள் (x,y,z) -ம் பின்வருமாறு சமன்பாடுகளால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

$$x = P\cos\emptyset, y = P\ \sin\emptyset, z = z$$

இங்கு $P > 0,\ 0 \leq \emptyset < 2\pi, -\infty < z < \infty$ ஆக எடுத்துக் கொள்வது வழக்கம்.

$P = c_1, \emptyset = c_2, z = c_3,$ ஆகிய ஆயத்தொலை மேற்பரப்புகள் முறையே

OZ-ஐ பொதுவாகச் சார்வுள்ள உருளைகள், Z-அச்சு வழியே செல்லும் தளங்கள், Z-அச்சுக்கு செங்குத்தாகவுள்ள தளங்கள் ஆகியவையாகும். இவை இரட்டை இரட்டையாக Z-வளை கோடுகளிலும், P- வளைகோடுகளிலும் ○ வளைகோடுகளிலும் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. அவை முறையே QP போன்றே

நேர்கோடுகள் SP போன்ற நேர்கோடுகள் மேலும் $A'B'$ போன்ற வட்டங்கள் ஆகும்.

அலகு தொடுகோட்டு வெக்டார்கள் $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$ ஆகியவற்றைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = P\cos\emptyset\hat{\imath} + P\sin\emptyset\hat{\jmath} + z\hat{k}.$$

$$\therefore\ \hat{l}_1, = \frac{\partial\bar{r}}{\partial P} / \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial P}\right| = \frac{\cos\quad \emptyset\hat{\imath}+\sin\emptyset\hat{k}}{[\cos^2\emptyset\nabla\sin^2\emptyset]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\emptyset\hat{\jmath}.$$

$$\hat{l}_2, = \frac{\partial\bar{r}}{\partial\emptyset} / \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\emptyset}\right| = \frac{-P\sin\emptyset\hat{\imath} + P\cos\emptyset\hat{\jmath}}{[P\sin^2\emptyset+\cos^2\emptyset]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\sin\emptyset\hat{\imath} + \cos\emptyset\hat{\jmath}.$$

$$\hat{l}_3, = \frac{\partial\bar{r}}{\partial z} / \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\emptyset}\right| = \hat{k}$$

இத் தொகுதிக்கு

$u_1 = P, u_2 = \emptyset, u_3 = z,$ எனவே

$$h_1 = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial P}\right| = 1, h_2 = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\emptyset}\right| = P, h_3 = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\right| = 1$$

ஆகும்.

எனவே, உருளைக்கூறுகளில் நீளம் ஆனது,

$$ds_1 = {h_1}^2\,{du_1}^2 + {h_2}^2{du_2}^2 + {h_3}^2{du_3}^2$$

$$= dl^2 + l^2\,d\emptyset^2 + dz^2$$

எனவும் மூலகப்பருமனே

$$dv = h_1\ h_2\ h_3\ du_1\,du_2\ du_3 = Pdld\emptyset dz$$

எனவும் கிடைக்கின்றன.

மேலும்,

$$\hat{l}_1, \hat{l}_2 = (\cos \emptyset \hat{\imath} + \sin \emptyset \hat{\jmath}).(-\sin \emptyset \hat{\imath} + \cos \emptyset \hat{\jmath})$$

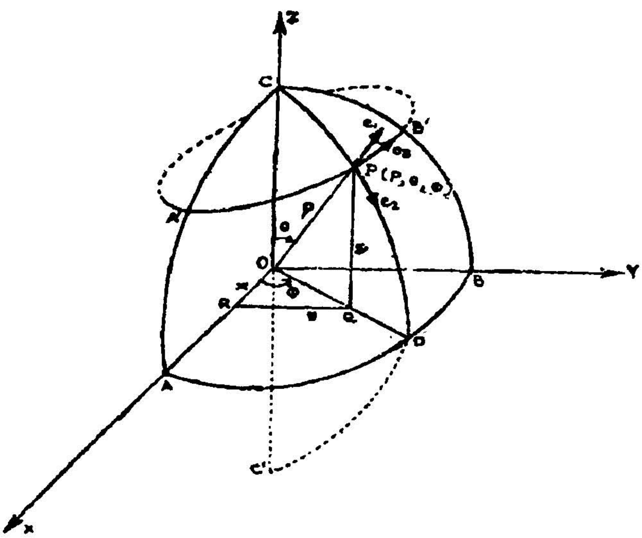
$$= \sin \emptyset \cos \emptyset \ + \sin \emptyset \cos \emptyset = 0.$$

$$\hat{l}_2, \hat{l}_3 \quad (-\sin \emptyset \hat{\imath} + \cos \emptyset \hat{\jmath}) . \hat{k} = 0$$

$$\hat{l}_3, \hat{l}_1 \hat{k}. \ (\cos \emptyset \hat{\imath} + \sin \emptyset \hat{\jmath}) = 0.$$

எனவே உருளைக் கூற்றுத் தொகுதியும் நேர்குத்தானதாகும்.

1.23 கோளக் கூறுகள் $(P, \theta, \emptyset)(Spherical\ co-ordinates)$



படம் 15

P – என்னும் புள்ளியின் கோளக் கூறுகள்

$P = QP$ என்பது தோற்றுவாய் O- லிருந்து P -க்கு உள்ள தூரம்.

θ என்பது OP -க்கும் z அச்சுக்கும் இடையே உள்ள கோணம்.

$\emptyset$ என்பது $X\,O\,Z, COD$ என்ற தளங்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் ஆகியவையாகும். படம் (15)

XOY என்ற தளத்துக்கு நேர்குத்தாக, OD- ஐ Q- வில் சந்திக்கும்படி PQ என்ற கோடு வரை X அச்சுக்கு நேர்குத்தாக QR வரை.

$$\angle PQR = 90^0 - \theta \qquad \therefore\ PQ = Z = P\cos\theta,$$

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{P}\sin\theta$$

$$OR = x = OQ\ \cos\emptyset = P\sin\theta\cos\emptyset$$

$$RQ = y = OQ\ \sin\emptyset = P\sin\theta\sin\emptyset$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = P^2\sin^2\theta\ \cos^2\emptyset + P^2\sin^2\theta\sin^2\emptyset + P^2\ \cos^2\theta = P^2$$

எனவே புள்ளி $P\,(P,\theta,\emptyset)$ O-ஐ மையமாகவும், P-வை ஆரமாகவும் கொண்ட கோள மேற்பரப்பின் மீது இருக்கிறது.

ஆயத்தொலை மேற்பரப்புகள் $P = c_1, \theta = c_2, \emptyset = c_3$ என்பன முறையே, O ஐ மையமாகக் கொண்ட கோளங்கள் O- ஐ உச்சியாகவும், OZ-ஐ அச்சாகவும் கொண்ட கூம்புகள், Z அச்சின் வழி செல்லும் தளங்கள் ஆகியவை ஆகும். இவை இரட்டை இரட்டையாக O வளை கோடுகளிலும், P வளைகோடுகளிலும், O வளைகோடுகளிலும் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. இவை முறையே $A'B'$ போன்ற வட்டங்கள், OP போன்றே கோடுகள், $CPDC$ போன்ற அரை வட்டங்கள் ஆகும்.

அலகு தொடுகோட்டு வெக்டார்கள் $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ என்பன பின் வருமாறு கிடைக்கின்றன.

$$\bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$P\sin\emptyset\cos\emptyset\,\hat{\imath} + P\sin\theta\sin\emptyset\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$$

எனவே $\hat{e}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial P}\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial P}\right| \sin\emptyset\cos\emptyset\,\hat{\imath} + P\sin\theta\sin\emptyset\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$

$$= [\sin^2\theta\cos^2\emptyset + \sin^2\partial\sin^2\varphi + \cos^2\theta]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sin\emptyset\cos\emptyset\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\emptyset\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$$

$$\hat{\imath}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} / \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta}\right| = \frac{P\cos\theta\ \cos\emptyset\,\hat{\imath} + P\cos\theta\ \sin\emptyset\,\hat{\jmath} + P\sin\theta\hat{k}}{P\,[\cos^2\theta\ \cos^2\emptyset + \sin^2\theta\ \sin^2\emptyset + \sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \cos\theta\ \cos\emptyset\,\hat{\imath} + P\cos\theta\ \sin\emptyset\,\hat{\jmath} - \sin\theta\hat{k}$$

$$\hat{\imath}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \emptyset} / \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \emptyset}\right| = \frac{-P\sin\theta\sin\emptyset\,\hat{\imath} + P\sin\theta\cos\emptyset\,\hat{\jmath}}{P[\sin^2\theta\ \sin^2\emptyset + \sin^2\theta\ \cos^2\emptyset]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\sin\emptyset\,\hat{\imath} + \cos\emptyset\,\hat{\jmath}$$

$$h_1 = \left|\frac{\partial \bar{r}}{du_1}\right|, h_2 = \left|\frac{\partial \bar{r}}{du_2}\right|, h_3 = \left|\frac{\partial \bar{r}}{du_3}\right|$$

என வரையறுக்கலாம்

∴ கோளக் கூறுகளில் வில்லின் நீளம் ds,

$$ds^2 = {h_1}^2{du_2}^2 + {h_2}^2{du_2}^2 + {h_3}^2{du_3}^2$$

$$= dl^2 + l^2 d\theta^2 + l^2\sin^2\theta\, d\emptyset^2$$

மூலகப் பருமன் $dv = h_1\, h_2\, h_3\, du_1\, du_2\, du_3$

$$= P^2\sin^2\theta\, dP\theta\, d\emptyset.$$

மேலும்.

$$\hat{\mathrm{e}}.\hat{\mathrm{I}}_2 = (\sin\theta\cos\emptyset\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\emptyset\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k})$$

$$(\cos\theta\cos\emptyset\,\hat{\imath} + \cos\theta\sin\emptyset\,\hat{\jmath} + \sin\theta\,\hat{k})$$

$$\sin\theta\ \cos\theta\cos^2\emptyset + \sin\theta\ \cos\theta\sin^2\emptyset - \sin\theta\ \cos\theta = 0,$$

$$\hat{\mathrm{I}}_2.\hat{\mathrm{I}}_1 = (\cos\theta\cos\emptyset\,\hat{\imath} + \cos\theta\sin\emptyset\,\hat{\jmath} + \sin\theta\,\hat{k})$$

$$(\sin\emptyset\,\hat{\imath} + \cos\emptyset\hat{\jmath}) = 0$$

$$\hat{\mathrm{I}}_3.\hat{\mathrm{I}}_1 = (-\sin\emptyset\,\hat{\imath} + \cos\emptyset\,\hat{\jmath}).$$

$$(\sin\theta\cos\emptyset\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\emptyset\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}) = 0$$

எனவே கோளக் கூறுகள் நேர்குத்தானவை.

1.24 வளைவரைக் கூறுகளில் வெக்டாரின் சரிவு, பாய்வு சுழல் ஆகியவற்றுக்கான கோவைகள்.

(1) அ. F என்னும் திசையிலி நிலைச்சார்பு நேர்குத்து வளை வகைக்கூறுகள் $(u_1 u_2 u_3)$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறதென்று கொள்வோம். $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3,$ என்பன ஆயத்தொலை வளை கோடுகளுக்கு அலகு தொடு கோட்டு வெக்டார்களாகும்.

$\nabla\bar{F}_1$ – ஒரு வெக்டாராதலால், இதை

$$\nabla F = f_1\hat{l}_1 + f_2\hat{l}_2 + f_3\hat{l}_3$$

என அடிப்படை வெக்டார்கள் $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ஆகியவை மூலம் குறிப்பிடலாம். இங்கு f_1, f_2, f_3 என்பன திசையிலிகள்.

$$dF = \nabla F . d\bar{r}$$

$$= (f_1\hat{e_1} + f_2\hat{e_2} + f_3\hat{e_3}).\left(\frac{\partial\bar{r}_1}{\partial u_1}\partial u_1 + \frac{\partial\bar{r}_2}{\partial u_2}\partial u_2 + \frac{\partial\bar{r}_3}{\partial u_3}\partial u_3\right)$$

$$= (f_1\hat{e_1} + f_2\hat{e_2} + f_3\hat{e_3}).(h_1\,du_1\hat{e}_1 + h_2\,du_2\hat{e}_2 + h_3\,du_3\hat{e}_3)$$

$$- f_1\,h_1\,du_1 + f_2\,h_2\,du_2 + f_3\,h_3\,du_3.$$

ஆனால்,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial F}{\partial u_3}du_3$$

எனவே,

$$f_1 h_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1}, \qquad f_2 h_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2}, \qquad f_3 h_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3}$$

அல்லது,

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial F}{\partial u_1}, \qquad f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial F}{\partial u_2}, \qquad f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial F}{\partial u_3},$$

என எழுதலாம்.

இதிலிருந்து,

$$\nabla F = \frac{1}{h_1}\frac{\partial F}{\partial u_1}\hat{e_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial F}{\partial u_2}\hat{e_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial F}{\partial u_3}\hat{e_3}$$
$$= \frac{\hat{e_1}}{h_1}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\hat{e_2}}{h_2}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{\hat{e_3}}{h_3}\frac{\partial F}{\partial u_3}$$

எனவே வளைவரைக் கூறுகளில் செயலி ∇ ஆனது.

$$\nabla = \frac{\hat{e_1}}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\hat{e_2}}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\hat{e_3}}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$$

என கொடுக்கப்படுகிறது.

ஆ. $F = u_1, u_2, u_3$ என அடுத்தடுத்துக் கொண்டால்

$$\nabla u_1 = \frac{\hat{e_1}}{h_1}, \qquad \nabla u_2 = \frac{\hat{e_2}}{h_2}, \qquad \nabla u_3 = \frac{\hat{e_3}}{h_3}$$

என கிடைக்கிறது.

இதிலிருந்து $= |\nabla ur| = \frac{1}{h_2}$, $r = 1,2,3.$

ஏனெனில் $|\bar{e}r| = 1.$

,. $\hat{l_1}, \hat{l_2}, \hat{l_3}$ என்பன அலகு நேர்குத்து வெக்டார்களின் வலக்கைத் தொகுதியை உருவாக்குவதால்

$$\hat{l_1} = \hat{l_2} \times \hat{l_3}, \qquad \hat{l_2} = \hat{l_2} \times \hat{l_1}, \qquad \hat{l_3} = \hat{l_1} \times \hat{l_2}$$

ஆனால்,

$$\widehat{l_1} = h_1 \nabla u_1; \ \widehat{l_2} = h_2 \nabla u_2, \ \widehat{l_3} = h_3 \nabla u_3,$$

எனவே, இவற்றைப் பிரதியிட

$$\widehat{l_1} = h_2 h_3 \nabla u_3$$

$$\widehat{l_1} = h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1, \qquad \widehat{l_3} = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2$$

அல்லது,

$$h_1 \nabla u_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3 \text{ ஆகும்.}$$

இது போன்றே $h_2 \nabla u_2$, $h_3 \nabla u_3$ ஆகியவைகளுக்கும் எழுதலாம்.

(2) $\bar{F}$ என்பது வளைவரைக் கூறுகளில் (u_1, u_2, u_3) ஒரு வெக்டார் சார்பாக இருக்கட்டும். $\widehat{l_1}, \widehat{l_2}, \widehat{l_3}$ என்பன அலகு தொடுகோட்டு வெக்டார்களாகும்.

$$\bar{F} = F_1 \widehat{l_1} + F_2 \widehat{l_2} + F_3 \widehat{l_3}$$

பாய்வு $\bar{F} = \nabla . \bar{F}$

$$= \nabla . \left[F_1 \widehat{l_1} + F_2 \widehat{l_2} + F_3 \widehat{l_3} \right]$$

$$= \left[\nabla . F_1 \widehat{l_1} + \nabla . \left(F_2 \widehat{l_2} \right) + \nabla . \left(F_3 \widehat{l_3} \right) \right]$$

$$\nabla . \left(F_1 \hat{l} \right) = \nabla . (F_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3$$

$$\therefore \quad \widehat{l_1} = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3$$

அதாவது

$$\nabla . \left(F_1 \widehat{l_1} \right) = F_1 h_2 h_3 \nabla . (\nabla u_2 \times \nabla u_3) + \nabla u_2 \times \nabla u_3 . \Delta (F_1 h_2 h_3)$$

$$\therefore \quad \nabla . (f \bar{a}) = f \nabla . \bar{a} + \bar{a} . \nabla f$$

ஆனால்,

$$\nabla^2 (\nabla . u_2 \times \nabla u_3)$$

$$= \nabla u_3 . \nabla \times \nabla u_2 - \nabla u_2 . \nabla \times \nabla u_3 = 0$$

சுழல் சரிவு $f = 0.$

எனவே,

$$= \frac{\widehat{e_2}}{h_2} \times \frac{\widehat{e_3}}{h_3} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_2 h_3)\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}(F_1 h_1 h_3)\hat{e}_2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}(F_1 h_2 h_3)\hat{e}_3\right]$$

$$= \frac{1}{h_1, h_2, h_3} \frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_2 h_3)\, \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 . \hat{e}_1$$

$$= \frac{1}{h_1, h_2, h_3} \frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_2 h_3)$$

இது போன்றே,

$$\nabla . (F_3\ \hat{e}_2) = \frac{1}{h_1, h_2, h_3} \frac{\partial}{\partial x_2}(F_2\ h_3\ h_1)$$

$$\nabla . (F_2\ \hat{e}_3) = \frac{1}{h_1, h_2, h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}(F_3\ h_2\ h_3)$$

எனவே,

$$\nabla . \bar{F} = \frac{1}{h_1, h_2, h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(F_3\ h_2\ h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(F_2\ h_3\ h_1) + \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial u_3}(F_3\ h_1\ h_2)\right]$$

$(3) F = F_1 \bar{e_1} + F_2 \bar{e_2} + F_3 \bar{e_3}.$ எனவே

சுழல் $\bar{F} = \nabla \times \bar{F} = \nabla \times (F_1\ \widehat{e_1} + F_2\ \widehat{e_2} + F_3\ \widehat{e_3})$

$$= \nabla \times (F_1\ \widehat{e_1}) + \nabla \times (F_2\ \widehat{e_2}) + \nabla \times (F_3\ \widehat{e_3})$$

இப்போது,

$$\nabla \times (F_1\ \hat{e}\ ) = \nabla r \times (F_1 h_1 \nabla u_1)[-\hat{e}_1] = h_1 \nabla u_1,$$

$$\therefore \nabla \times (f\bar{a}) = f \nabla \times \bar{a} + \nabla f \times \bar{a}$$

$$= \nabla(F_1 h_2) \times \nabla u_2$$

($\therefore$ சுழல் சரிவு $u_1 = 0$)

அதாவது,

$$\nabla(F_1 = \hat{e}_1)\left[\frac{1}{h_1}\ \frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_1))\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\ \frac{\partial}{\partial u}(F_1 h_1)\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\ \frac{\partial}{\partial u_3}(y_1 h_1)\hat{e}_3 \times \frac{\hat{e}_1}{h_1}\right]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}.(F_1 h_1)\hat{e}_2 - \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}.(F_1 h_1)\hat{e}_2$$

இது போன்றே,

$$\nabla \times (F_2\hat{e}_2) = \frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}.(F_2 h_2)\hat{e}_3 - \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}.(F_2 h_2)\hat{e}_1$$

$$\nabla \times (F_3\hat{e}_3) = \frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}.(F_2 h_2)\hat{e}_3 - \frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}.(F_3 h_3)\hat{e}_2$$

$$\nabla \times \bar{F} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}F_2 h_2\right]\hat{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(F_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}F_3 h_3\right]\hat{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}F_1 h_1\right]\hat{e}_3$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ F_1 h_1 & F_2 h_2 & F_3 h_3 \end{vmatrix}$$

1.25 கோளக் கூறுகளில் சரிவு, பாய்வு, சுழல் ஆகியவற்றுக்கான கோவைகள்.

கோளக் கூறுகள் $(l, \theta, \emptyset)$ ஆகியவை

$$u_1 = P,\ u_2 = \theta,\ u_3 = \varphi$$

$$h_1 = 1, h_2 = P, h_3 = P\sin\theta$$ ஆகும்.

மேலும்

$$\hat{e}_1 = \sin\theta\cos\emptyset\hat{\imath} + \sin\theta\sin\emptyset\hat{\jmath} + \cos\theta\hat{k}$$

$$\hat{e}_2 = \cos\theta\cos\emptyset\hat{\imath} + \cos\theta\sin\emptyset\hat{\jmath} - \sin\theta\hat{k}$$

$$\hat{e}_2 = -\sin\emptyset\hat{\imath} + \cos\emptyset\,\hat{\jmath}.$$

எனவே,

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial P}\hat{e}_1 + \frac{1}{P}\frac{\partial F}{\partial \theta}\hat{e}_2 + \frac{1}{P\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \emptyset}\hat{e}_3,$$

$$\nabla\bar{F} = \frac{1}{P^2}\sin\theta\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial P}(P^2F_1) + P\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, F_2) + P\frac{\partial F_3}{\partial\emptyset}\right]$$

$$\nabla\times\bar{F} = \frac{1}{P\sin\theta}\left[\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, F_3) - \frac{\partial F}{\partial\emptyset}\}\hat{e}_1 + \{\frac{\partial F_1}{\partial\emptyset} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial P}(PF_3)\}\hat{e}_2 + \right.$$
$$\left.\sin\theta\{\frac{\partial}{\partial P}(PF_2) - \frac{\partial F_1}{\partial\theta}\hat{e}_3\right].$$

❖ ❖ ❖

ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள்

(Linear Independence of Vectors)

1.26 ஒருபடி வெக்டார் வெளி: (Linear Vector Space)

$L = \{U, V, W \ldots\ldots\}$ என்ற கணத்திலுள்ள மூலகங்களை $\propto$ என்ற கலப்பின எண்ணால் பெருக்கினாலோ, ஒன்றுக்கொன்று கூட்டலை ஏற்படுத்தினாலோ அதே கணத்திலுள்ள எண்கள் கிடைக்குமெனில், அக்கணத்தை நாம் **ஒருபடி வெக்டார் வெளி**: (Linear Vector Space) எனக் கூறலாம். எனவே அவ்வெக்டார் வெளியிலுள்ள மூலகங்களும் வெக்டார்களே. உதாரணமாக, ' L' என்ற கணத்தில், U மற்றும் V மூலகங்கள் எனில், $\propto u$ மற்றும் $(U + V)$ போன்றவைகளும், L என்ற கணத்தின் மூலகங்களே.

இதன் பெருக்கல் மற்றும் கூட்டல் செய்கைகள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு கட்டுப்பட வேண்டும். அவையாவன:

1) $U + V = V + U \rightarrow$ கூட்டலின் பரிமாற்றுவிதி
2) $(U + V) + W = U + (V + W) \rightarrow$ கூட்டலின் சேர்ப்பு விதி
3) $(\propto +\beta)U \ = \propto U + \beta U \rightarrow$ பெருக்கலின் பங்கீட்டு விதி
4) $\propto (U + V) = \propto U + \propto V \rightarrow$ பெருக்கலின் பங்கீட்டு விதி
5) $\propto \beta(U) = \propto (\beta U) \rightarrow$ பெருக்கலின் சேர்ப்பு விதி
6) $|U| = U$

இவ்வெளியில் ஒரு சுழி அல்லது பூச்சிய வெக்டார் இருக்குமேயானால், அதில் u-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $U + 0 = U$,

எனவே ஒரு ஒருபடி வெக்டார் வெளி (L) கூட்டல் செய்கைகளின் போது, ஒரு எபிலியன் தொகுதியை (Abelian group)

உருவாக்குகின்றது. மற்றும் அதன் மூலகங்களை, கலப்பின எண்களால் பெருக்கவும் முடியும். இந்த ஒருபடி வெக்டார் வெளியானது, **ஒருபடி வெளி** அல்லது **வெக்டார் வெளி** என்றும் அழைக்கப்படுகின்றது.

வெக்டார்களின் ஒருபடிச் சாரா நிலை:

வெக்டார் 'U' என்பது, $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n$ என்ற ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்களின் தொகுப்பாகும். இதனையே நாம்,

$$U = \propto_1 \; u_1 + \propto_2 u_2 + \propto_3 u_3 + \cdots \propto_n u_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \propto_i \; u_i$$

எனக் குறிப்பிடலாம்.

இதில் $\propto_i \; (i = 1,2,3, \ldots \ldots n)$ என்பவை சிக்கல் எண்களாகும்.

வெக்டார்கள் $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n$ - இவைகள் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்கள் என அழைக்கப்படுவது எப்போதென்றால்,

$$= \propto_1 u_1 + \propto_2 u_2 + \cdots \propto_n u_n = 0.$$

அதாவது $$\sum_{i=1}^{n} \propto_i \; u_i = 0,$$

இதில் $\propto_i \neq 0, (i = 1,2,3 \ldots . n)$

இதற்கு மாறாக,

$$\sum_{i=1}^{n} \propto_i \; u_i = 0$$

இதில் $\propto_i 0, (i = 1,2,3 \ldots . n)$ என்றிருந்தால், $u_1, u_2, u_3, \ldots . . u_n$ வெக்டார்கள் அனைத்தும், ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1:

1. $X_1 = [3,1,-4], X_2 = [2,2,-3]$

   $X_3 = [0,-4,1]$ மற்றும் $X_4 = [-4,-4,6]$

   X_1, X_2, X_3 மற்றும் X_4- ன் மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண்.

   (a) $2X_1 - 5X_2$ (b) $2X_1 - 3X_2 - X_3$

   (c) $2X_1 + X_4$ (d) $2X_1 - X_2 - X_3 + X_4$

(a) $2X_1 - 5X_2$

$$2X_1 - 5X_2 = 2[3,1,-4] - 5[2,2,-3]$$

$$= [6,2,-8] - [10,10,-15]$$

$$2X_1 - 5X_2 = [-4,-8,7],$$

(b) $2X_2 + X_4 = 2[2,2,-3] + [-4,-4,6]$

$$= [4,4,-6] + [-4,-4,6]$$

$$2X_2 + X_4 = [0,0,0]$$

(c) $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 2[3,1,-4] - 3[2,2,-3] - [0,-4,1]$

$$= [6,2,-8] - [6,6,-9] - [0,-4,1]$$

$$2X_1 - 3X_2 - X_3 = [0,0,0]$$

(d) $2X_1 - X_2 - X_3 + X_4$

$$= 2[3,1,-4] - [2,2,-3] - [0,-4,1] + [-4,-4,6]$$

$$= [6,2,-8] - [2,2,-3] - [0,-4,1] + [-4,-4,6]$$

$$= [0,0,0]$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$$X_1 = [3,1,-4] \,;\, X_2\, [2,2,-3]$$

இவ்விரு வெக்டார்களும், ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் என நிரூபி.

X_1 மற்றும் X_2 வெக்டார்கள், ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் எனில், நாம் $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$ மற்றும் $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ என்பதை நிரூபிக்க வேண்டும்.

அதாவது,

$$\alpha_1[3,1,-4] + \alpha_2[2,2,-3] = [0,0,0]$$

$$3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \qquad -(1)$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \qquad -(2)$$

$$-4\alpha_1 - 3\,\alpha_2 = 0 \qquad -(3)$$

$$(1) - (2) \qquad \Rightarrow 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

$$(-) \qquad (-)$$

$$2\alpha_1 \qquad = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \qquad = 0 \quad -(4)$$

$\alpha_1 = 0$ என்பதனை சமன்பாடு (1)-ல் நாம் பயன்படுத்தினால், நமக்குக் கிடைப்பது,

$$3\,(0) + 2\alpha_2 = 0$$

$$0 \;+ 2\alpha_2 = 0$$

$$2\alpha_2 = 0$$

அதாவது $\alpha_2 = 0 \qquad - (5)$

அதாவது, சமன்பாடுகள் (4) மற்றும் (5) லிருந்து, நமக்குக் கிடைப்பது

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

α_1 மற்றும் $\alpha_2 = 0$ எனக் கிடைப்பதால், கொடுத்துள்ள வெக்டார்கள் X_1 மற்றும் X_2 களை நாம் ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் எனக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

$$X_1 = [2, 2, -3]\,;\; X_2\;[-4, -4, 6]$$

இவ்விரு வெக்டார்களும் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்கள் என நிருபி.

X_1 மற்றும் X_2 வெக்டார்கள், ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்கள் எனில், நாம்,

$$\alpha_1 X_1 + \;\alpha_2 X_2 = 0$$

மற்றும்

$\alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$ என்பதை நிருபிக்க வேண்டும்.

அதாவது,

$$\alpha_1[2, 2, -3] + \alpha_2[-4, -4, 6] = [0, 0, 0]$$

$$2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \qquad - (1)$$

$$2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \quad - (2)$$

$$-3\alpha_1 + 6\,\alpha_2 = 0 \quad -(3)$$

இதில், நாம் $\alpha_1 = 2$ மற்றும் $\alpha_2 = 1$ என்ற மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்தால், மேற்குறிப்பிட்டுள்ள சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு கிடைக்கும்.

அதாவது, $\alpha_1 = 2\ \&\ \alpha_2 = 1$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$$

எனவே, கொடுத்துள்ள X_1 மற்றும் X_2 வெக்டார்கள், ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

$$[1, 1, 0, 0], \qquad [0, 1, -1, 0], \qquad [0, 0, 0,3]$$

என்ற வெக்டார்கள் ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் என நிரூபி:-

$$X_1 = [1, 1, 0, 0]$$

$$X_2 = [0, 1, -1, 0]$$

$$X_3 = [0, 0, 0, 3]$$

X_1, X_2 மற்றும் X_3 வெக்டார்கள், ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் எனில், $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$

மற்றும்

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1[1, 1, 0, 0] + \alpha_2[0, 1, -1, 0] + \alpha_3[0, 0, 0, 3] = [0, 0, 0, 0]$$

$$\alpha_1 + 0 + 0 = 0 \qquad -(1)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 0 = 0 \qquad -(2)$$

$$0+\alpha_2+0=0 \qquad -(3)$$

$$0+0+3\alpha_3=0 \qquad -(4)$$

$$(1) \Rightarrow \ \alpha_1 = 0$$

$$(3) \Rightarrow -\alpha_2 = 0 \Rightarrow \ \alpha_2 = 0.$$

$$(4) \Rightarrow \ 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

அதாவது,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

எனவே கொடுத்துள்ள வெக்டார்கள் X_1, X_2 மற்றும் X_3 வெக்டார்கள், ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

R^3 வெளியில், கீழ்க்காணும் வெக்டார்கள், ஒருபடிச் சார்ந்தவைகளானால். k-ன் மதிப்பைக் காண்.

$$[1,3,2], \qquad [2,k,4], \qquad [1,1,1]$$

நிரூபணம்:-

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெக்டார்கள் ஒருபடிச் சார்ந்தவையானால் நாம்

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்பதை நிரூபிக்க வேண்டும். இந்த நிருபணத்திலிருந்து k-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

அதாவது,

$$1[k-4]-2[3-2]+1[12-2k]=0.$$

$$k-4-6+4+12-2k=0.$$

$$-k+6=0. \Rightarrow k=6$$

எடுத்துக்காட்டு 6:

R^3 வெளியில், $[1,1,0,]$, $[2,0,1]$, $[0,1,2]$ என்ற வெக்டார்கள் ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் என நிரூபி:-

$$\Rightarrow \quad X_1=[1,1,0]$$

$$X_2=[2,0,1]$$

$$X_3=[0,1,2]$$

X_1, X_2 மற்றும் X_3- இம்மூன்றும் ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்கள் எனில்,

$$\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\alpha_3 X_3=0$$

மற்றும்,

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

$$\alpha_1[1,1,0]+\alpha_2[2,0,1]+\alpha_3[0,1,2]=[0,0,0]$$

அதாவது,

$$\alpha_1+2\alpha_2+0=0 \qquad -(1)$$

$$\alpha_1+0+\alpha_3=0 \qquad -(2)$$

$$0+\alpha_2+2\alpha_3=0 \qquad -(3)$$

சமன்பாடு (2) லிருந்து

$$\alpha_1 = -\alpha_3 \qquad -(4)$$

α_1-ன் மதிப்பை, சமன்பாடு (4)-லிருந்து, சமன்பாடு (1)-ல் நாம் பயன்படுத்தினால், நமக்கு, $(-\alpha_3 + 2\alpha_2 = 0)$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

$$\Rightarrow \qquad 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \qquad -(5)$$

சமன்பாடு $(3) \Rightarrow \qquad \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$

$$(5) \times 2 \Rightarrow \qquad 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$$

$$5\alpha_2 \qquad = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha_2 = 0 \qquad -(6)$$

$\alpha_2 = 0$ என்ற மதிப்பினை, சமன்பாடு (1)-ல் நாம் பிரதியிடும் போது

$$\alpha_1 + 2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \qquad -(7)$$

$\alpha_1 = 0$ என்ற மதிப்பினை, சமன்பாடு (2)-ல் பிரதியிடும் போது

$$0 + 0 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_3 = 0 \qquad -(8)$$

எனவே, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. அதாவது கொடுத்துள்ள வெக்டார்கள் அனைத்துமே ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7:

$[0, 1, 0]$, $[1, 2, 0]$ மற்றும் $[2, 3, 0]$ இவ்வெக்டார்கள் அனைத்தும் R^3வெளியில் என்ற வெக்டார்கள் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்கள் என நிருபி:-

இங்கு,

$$X_1 = [0, 1, 0]$$

$$X_2 = [1, 2, 0]$$

$$X_3 = [2, 3, 0]$$

X_1, X_2 மற்றும் X_3- இம்மூன்றும் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்கள் எனில்,

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$$

மற்றும்,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 0$$

எனவே, $\alpha_1[0, 1, 0] + \alpha_2[1, 2, 0] + \alpha_3[2, 3, 0] = [0, 0, 0]$

$$0 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \qquad -(1)$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \qquad -(2)$$

$$0 + 0 + 0 = 0 \qquad -(3)$$

சமன்பாடு $(1) \Rightarrow \quad \alpha_2 = -2\alpha_3 \qquad -(4)$

சமன்பாடு (4)-ஐ சமன்பாடு (2)-ல் பயன்படுத்தும்போது, நமக்குக் கிடைப்பது.

$$\alpha_1 + 2(-2\alpha_3) + 3\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - 4\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 \quad -(5)$$

இங்கு α_1-ன் மதிப்பை . சுழியமல்லாத எண்ணாக, நாம் கருத வேண்டும். எனவே,

$\alpha_1 = 2$ எனக் கருதினால்,

சமன்பாடு (5)-லிருந்து,

$\alpha_3 = 2$ என நாம் கூறலாம்.

$\alpha_3 = 2$ என்ற மதிப்பினை, சமன்பாடு (4)-ல் நாம் பயன்படுத்தினால்,

$$\alpha_2 = -2 \times 2$$

$\alpha_2 = -4$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, இங்கு $\alpha_1 = 2;\ \alpha_2 = -4;\ \alpha_3 = 2,$

அதாவது, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 0$ என வருவதால், கொடுத்துள்ள X_1, X_2 மற்றும் X_3 வெக்டார்கள் அனைத்துமே ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8:

இரு வெக்டார்கள் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்கள் எனில், அதில் ஒரு வெக்டாரானது, மற்றொரு வெக்டாரின் திசையிலிப் பெருக்கமாக இருக்கும் என்பதை நிரூபி.

வெக்டார் வெளியில் இரண்டு ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்களை A மற்றும் B எனக் கருதுவோம்.

α_1மற்றும் α_2 -இவைகள் சுழியமல்லாத திசையிலிகள் எனில்,

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B = 0.$$

எனவே, இங்கு$\alpha_1 \neq 0$ எனில்,

$$\alpha_1 A = -\alpha_2 B$$

$$A = -\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) B.$$

அதாவது வெக்டார் A, என்பது வெக்டார் 'B'-யின் திசையிலிப் பெருக்கத்திற்கு சமம்.

இதுபோல்,

$\alpha_2 \neq 0$ எனில், நமக்குக் கிடைப்பது

$$\alpha_2 B = -\alpha_1 A$$

$$B = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) A$$

அதாவது,

வெக்டார் 'B' என்பது வெக்டார் 'A' ன் திசையிலிப் பெருக்கத்திற்குச் சமம்.

எனவே, இரண்டு ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்களில், ஒரு வெக்டாரானது, மற்றொரு வெக்டாரின் திசையிலிப் பெருக்கத்திற்குச் சமம் என்பது நிரூபணமாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9:

கீழ்க்கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெக்டார்கள் அனைத்தும் ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்கள் என நிரூபி.

$$[1, 2, 0,], \quad [0,3,1], \quad [-1, 0, 1,]$$

$$X_1 = [1,2,0]$$

$$X_2 = [0, 3, 1]$$

$$X_3 = [-1, 0, 1]$$

X_1, X_2 மற்றும் X_3 வெக்டார்கள், ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் எனில்,

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$$

மற்றும்

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\therefore \quad \alpha_1[1, 2, 0] + \alpha_2[0, 3, 1] + \alpha_3[-1, 0, 1] = [0, 0, 0]$$

எனவே, $$\alpha_1 + 0 - \alpha_3 = 0 \ -(1)$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \ -(2)$$

$$0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \ -(3)$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளையும் அணிக்கோவைகளாக எழுதினால்,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

இங்கு $|A| \neq 0$ எனில்,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

மாறாக,

$|A| = 0$ எனில்,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 0$$

எனவே,

$$|A| = 1(3 - 0) - 0(2 - 0) - 1(2 - 0)$$

$$= 3 - 0 - 2$$

$$|A| = 1$$

எனவே, இங்கு $|A| \neq 0$. அதனால்,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

அதாவது, ஒரே தீர்வு, $\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0; \alpha_3 = 0$. எனவே கொடுத்துள்ள வெக்டார்கள் அனைத்தும் ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்கள்தான்.

எடுத்துக்காட்டு 10:

$[1,3,2]$, $[1,-7,-8]$ மற்றும்$[2,1,-1]$-இம்மூன்று வெக்டார்களும் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்களா என ஆய்வு செய்க.

நிரூபணம்: இங்கு

$$X_1 = [1,3,2,]$$

$$X_2 = [1,-7,-8]$$

$$X_3 = [2,1,-1].$$

X_1, X_2 & X_3 வெக்டார்கள் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்கள் எனில்,

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$$

மற்றும்

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 0$$

எனவே, $\alpha_1[1,3,2] + \alpha_2[1,-7,-8] + \alpha_3[2,1,-1]$

$$= [0,0,0]$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \quad - (1)$$

$$3\alpha_1 - 7\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad - (2)$$

$$2\alpha_1 - 8\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \quad - (3)$$

மேலுள்ள மூன்று சமன்பாடுகளின் குணகங்களை அணிகள் வடிவில் எழுதி அதன் தீர்வைக் காண்போம். அதாவது,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1[7+8] - 1[-3-2] + 2[-24+14]$$

$$= 1(15) - 1(-5) + 2(-10)$$

$$= 15 + 5 - 20.$$

$$|A| = 0.$$

$|A| = 0.$ எனில்,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 0\,.$$

எனவே கொடுத்துள்ள வெக்டார்கள் அனைத்தும் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்கள் ஆகும்.

சமன்பாடு $(1) \times 3 \Rightarrow \quad 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0$

சமன்பாடு $(2) \Rightarrow \quad 3\alpha_1 - 7\alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$\quad (-) \quad (+) \quad (-)$

$$10\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \qquad -(4)$$

சமன்பாடு(4)-ஐ, 5-ல் வகுத்தால், கிடைப்பது,

$$2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_3 = -2\alpha_2 \qquad -(5)$$

சமன்பாடு(5)-ஐ, சமன்பாடு (1)-ல் பயன்படுத்தினால்,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\,(-2\alpha_2) = 0.$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_2 = 0.$$

$$\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha_1 = 3\alpha_2 \qquad -(6)$$

இதில், α_2-ன் மதிப்பை 1 எனக் கருதுவோமானால், சமன்பாடு (5)-லிருந்து,

$$\alpha_3 = -2.$$

சமன்பாடு (6)-லிருந்து,

$$\alpha_1 = 3.$$

எடுத்துக்காட்டு 11:

ஒரு வெக்டார் வெளியில், A, B மற்றும் C எனும் வெக்டார்கள் ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்கள் எனில்,

$2A - B, A + B$ மற்றும் $A - C$-இவைகளும் ஒருபடிச் சாராதவையே என நிருபி.

நிருபணம்:

A, B மற்றும் C இம்மூன்று வெக்டார்களும் ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்கள் எனில்,

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = 0$$

மற்றும்

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

எனவே,

$(2A - B), (A + B), (A - C)$ இம்மூன்றையும் ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்கள் என நிருபிக்க, நாம்,

$\alpha(A) + \beta(B) + \gamma(C) = 0$ எனக் கருதுவோம்.

$$\alpha[2(A - B) + \beta(A + B) + \gamma(A - C)] = 0$$

$$2\alpha A - \alpha\beta + A\beta + \beta B + \gamma A - \gamma C = 0.$$

$$A[2\alpha + \beta + \gamma] + B[-\alpha + \beta] + C[-\gamma] = 0.$$

இதில், A, B & C -இவைகள் ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் என்பதால்,

$$2\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad -(1)$$

$$-\alpha + \beta = 0 \qquad -(2)$$

$$-\gamma = 0 \qquad -(3)$$

சமன்பாடு$(3) \Rightarrow$

$$\gamma = 0$$

$\gamma = 0$ என்ற மதிப்பினை சமன்பாடு(1)-ல் நாம் பயன்படுத்தினால்,

$$2\alpha + \beta + 0 = 0$$

$$2\alpha + \beta = 0$$

சமன்பாடு$(2) \Rightarrow -\alpha + \beta = 0$

$$(+) \quad (-)$$

$$3\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 0.$$

$\alpha = 0$ என்பதை சமன்பாடு(2)-ல் நாம் பயன்படுத்தினால்,

$$-0 + \beta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \beta = 0.$$

அதாவது, $\alpha = \beta = \gamma = 0.$

எனவே, $(2A - B), (A + B)$, மற்றும் $(A - C)$ வெக்டார்கள் ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்கள் என நிரூபணமாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 12:

$\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k},\ 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - \vec{k}$ மற்றும் $3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ இம்மூன்று வெக்டார்களும் ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்கள் என நிரூபணம் செய்க.

$$X_1 = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow [\ 1, -3, 2,]$$

$$X_2 = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - \vec{k} \Rightarrow [2, -4, -1]$$

$$X_3 = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \Rightarrow [3, 2, -1].$$

X_1, X_2 மற்றும் X_3 வெக்டார்கள், ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்கள் எனில்,

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$$

மற்றும்,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

எனவே, $\alpha_1[1, -3, 2] + \alpha_2[2, -4, -1] + \alpha_3[3, 2, -1] = [0, 0, 0]$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \qquad -(1)$$

$$-3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \qquad -(2)$$

$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \qquad -(3)$$

சமன்பாடு $(1)\times 2 \Rightarrow \quad 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0$

$$(2) \Rightarrow -3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

$$-\alpha_1 + 8\alpha_3 = 0 \qquad -(4)$$

சமன்பாடு $(1) \Rightarrow \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$

சமன்பாடு$(3)\times 2 \Rightarrow \quad 4\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$

$$5\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \qquad -(5)$$

சமன்பாடு $(4)\times 5 \Rightarrow -5\alpha_1 + 40\alpha_3 = 0$

$$(5) \Rightarrow 5\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$41\alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_3 = 0.$$

எனவே சமன்பாடு $(5) \Rightarrow$

$$5\alpha_1 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 = 0.$$

$\alpha_1 = \alpha_3 = 0$-இம் மதிப்புகளை, சமன்பாடு (1)-ல் நாம் பயன்படுத்தும்போது,

$$0 + 2\alpha_2 + 3(0) = 0.$$

$$2\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_2 = 0.$$

எனவே,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\,.$$

எனவே, கொடுத்துள்ள மூன்று வெக்டார்களும் ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்களாகும்.

1.27 வெக்டார் வெளி (அல்லது) ஒருபடி வெக்டார் வெளி

முப்பரிமாண வெளியில், ஒரு வெக்டாரானது மூன்று மூலகங்களால் வரையறுக்கப்படுகின்றது. X, Y மற்றும் Z என்ற மூன்று பரிமாற்று செங்குத்து அச்சுகளில், இம்மூன்று மூலகங்களையும் a_1, a_2 மற்றும் a_3 எனக் கருதுவோமேயானால், அவ்வெக்டாரானது,

$$a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$$

இதையே, நாம் $[a_1\ a_2\ a_3]$ என எழுதலாம். இம்மூன்று எண்களும் 3-வெக்டார், எனவும் அழைக்கலாம்.

இதைப்போலவே, 'n' எண்கள் இருந்தால், அதை நாம் 'n' வெக்டார் எனக் கருதுவோம். அனைத்து 'n' மூலகங்களையும் நாம் நிரை அணியாகவோ (Row matrix) அல்லது நிரல் அணியாகவோ (Column matrix) எழுதலாம். அதாவது.

$$A = [a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n]$$

அல்லது

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = [a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n].$$

இங்கு $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$-இவைகள் அனைத்தும் முறையே A-ன் முதல், இரண்டாவது.... n-வது மூலகங்கள் எனக் குறிக்கலாம்.

ஒவ்வொரு மூலகமும் சுழியமாக இருந்தால், அவ்வெக்டாரை, நாம் 'சுழிய வெக்டார்' எனக் கருதுவோம்.

எனவே, 'F' எனும் புலத்தில், 'n' வெக்டார்களில் ஏதாவது ஒரு கணமானது, வெக்டார் கூட்டல் மற்றும் திசையிலிப் பெருக்கலின் கீழ் மூடிய அல்லது அடைத்த கணமாயிருந்தால், அதை நாம் **வெக்டார் வெளி** (vector Space) என அழைக்கலாம். இவ்வெக்டார் வெளியை நாம் $V_n(F)$ அல்லது V_n எனக் குறிப்பிடலாம். இங்கு $V_n(F)$-க்கு தொடர்புடைய'F' எனும் புலத்தின் மூலகங்கள் அனைத்தும் திசையிலிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

ஏனவே 'F' எனும் புலத்தில்,

$X_1, X_2 \ldots . X_n$-எனும் 'n' வெக்டார்கள் இருந்தால், அவற்றின் ஒருபடிச் சேர்வுகளான,

$k_1X_1 + k_2X_2 \ldots \ldots . k_nX_n$-என்ற இந்த சமன்பாடும் F-எனும் புலத்தில், ஒரு வெக்டார் வெளி என்றே கருதலாம்.

வெக்டார் வெளியின் பொதுவான பண்புகள்:-

$V(F)$ எனும் வெக்டார் வெளியையும், V-ன் சுழிய வெக்டார் '0' எனவும் கருதினோமென்றால்,

1) $k(0) = 0$; ஒவ்வொரு k-ன் மதிப்பும் F-ல் அடங்கும்.
2) $0(X) = 0$; ஒவ்வொரு X-ன் மதிப்பும் V-ல் அடங்கும்.
3) $k(-X) = -kX$; ஒவ்வொரு k-ன் மதிப்பும் F-லும் ஒவ்வொரு X-ன் மதிப்பும் V-லும் அடங்கும்.
4) $-k(X) = -kX$; ஒவ்வொருX-ன் மதிப்பும் V-ல் அடங்கும்.

5) $k(X_1 - X_2) = -kX_1 - kX_2$; ஒவ்வொரு k-ன் மதிப்பும் R-லும் மற்றும் ஒவ்வொரு X_1 & X_2-களின் மதிப்பு V-லும் அடங்கும்.

6) $kX = 0 \Rightarrow k = 0$ அல்லது $X = 0$.

7) k_1, k_2-களின் மதிப்பு F-லும் மற்றும், X- என்பது V-ன் ஒரு சுழியமல்லாத வெக்டாராகவும் இருந்தால், நாம்

$k_1X = k_2X$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\Rightarrow \quad k_1 = k_2.$$

8) X_1, X_2-களின் மதிப்பு V-லும் மற்றும், k- என்பது F-ன் ஒரு சுழியமல்லாத மூலகமாகவும் இருந்தால், நாம்

$kX_1 = kX_2$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\Rightarrow \quad X_1 = X_2.$$

1.28 உள் வெளிகள் (Sub Spaces)

$V_n(F)$-எனும் வெக்டார் வெளியில், V-எனும் வெக்டார்களின் உட்கணமானது, (Sub Set) வெக்டார் கூட்டல் மற்றும் திசையிலிப் பெருக்கலின் போது, ஒரு மூடிய அல்லது அடைத்த (Closed) கணமாக இருந்தால், அவ்வெக்டார் V-ஐ $V_n(F)$-ன் உள்வெளி என நாம் அழைக்கலாம்.

'V_3' வெளியில், $x = [x_1, x_2, x_3]$ எனும் வெக்டாரை நாம் கருதுவோம். எனவே 'V' எனும் வெக்டார் கணமானது V_3-வெளியின், ஒரு வெக்டார் உள்வெளியாகும். இதில் k- என்பது ஒரு மாறி திசையிலியாகும்.

மேலும்,

$$k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x.$$

இதில் $(k_1 + k_2)x$-ம் 'V' எனும் வெக்டார் கணத்தின் ஒரு உறுப்பாகும். எனவே வெக்டார்கள் kx-ன் V-எனும் கணமானது, ஒரு வெக்டார் உள்வெளியாகும்.

V_3-வெளியில், x_1, x_2, x_3 என்பன ஏதாவது ஒரு மூன்று வெக்டார்களாகும். எனவே இவ்வெக்டார்களின் V எனும் கணமானது, $k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

இதில் k_1, k_2 மற்றும் k_3 என்பன V_3-வெளியிலுள்ள வெக்டார் உள்வெளியின் திசையிலிகளாகும்.

1.29 வெக்டார் வெளியின் ஒருபடிக் கால அளவு:-

(Linear Span of Vector Space)

$x_1, x_2 \dots . x_n$-எனும் 'n' வெக்டார்களால், ஒரு வெக்டார் வெளி அளவிடப்பட்டோ அல்லது பிறப்பிக்கப்பட்டோ இருக்கிறது எனக் கூற வேண்டுமென்றால்,

1) x_i எனும் வெக்டார் V-ல் அடங்கியும்.
2) V-யின் ஒவ்வொரு வெக்டார்களும் ஒரு ஒருபடிச் சேர்வு வெக்டார்களாகவும் இருக்க வேண்டும்.

   V-எனும் உள்வெளியில், $k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ மற்றும் $k_4x_1 + k_5x_2 + k_6x_3$ எனும் இரு எண்களைக் கருதுவோம்.

எனவே,

$$(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3) + (k_4x_1 + k_5x_2 + k_6x_3)$$
$$= (k_1 + k_4)x_1 + (k_2 + k_5)x_2 + (k_3 + k_6)x_3$$

இதுவும் V- எனும் வெக்டார் உள்வெளியின் ஒரு மூலகமே.

மேலும்

$$k(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)$$

$$= KK_1x_1 + KK_2x_2 + Kk_3x_3$$

இதுவும் V-எனும் வெக்டார் உள்வெளியின் ஒரு மூலகமே. எனவே, கொடுத்துள்ள வெக்டார் கணத்தின், ஒருபடிச் சேர்வு கணங்களால் உருவாகும் ஒரு வெக்டார் வெளியானது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெக்டார் கணங்களால் அளவிடப்படுகின்றன (அல்லது) உருவாக்கப்படுகின்றன எனக் கூறலாம்.

1.30 பரிமாணங்கள் $(Dimensions)$

'n' மூலகங்கள் கொண்ட ஒரு வெக்டார் வெளியானது, ஒரு முடிவுள்ள (அல்லது) வரையறுத்த அடித்தளத்தைக் $(finit\ basis)$ கொண்டிருந்தால், அதை நாம் n- பரிமாண வெக்டார் வெளி எனக் கருதலாம். ஒரு முடிவில்லா அடித்தளத்தை அவ்வெக்டார் வெளி கொண்டிருந்தால், அதை நாம் வரையறுக்கப்படாத (அல்லது) முடிவில்லா பரிமாணங்கள் கொண்ட வெக்டார் வெளி எனக் கருதலாம்.

எனவே, ஒரு பொதுவான வெளியில், எந்தவொரு வெக்டாரையும், $\vec{i}, \vec{j}$ மற்றும் $\vec{k}$ எனும் பரிமாற்று செங்குத்து அலகு வெக்டார்களின் ஒருபடிச் சேர்வாக வெளிப்படுத்தலாம். இதுவே ஒரு வெக்டார் அடித்தளத்தை அமைக்கின்றது. எனவே V_3-என்பதை ஒரு மூவளவை வெளி (அல்லது) முப்பரிமாண வெளி எனக் கூறலாம்.

1.31 அடித்தளம் (Basis)

$V_n^r(F)$-எனும் வெக்டார் வெளியில் ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்களான 'r' எனும் கணத்தை நாம் கீழ்க்கண்ட காரணங்களினால், ஒரு வெக்டார் வெளியின் **அடித்தளம்** (Basis) என அழைக்கலாம். அதாவது,

$\varphi_1, \varphi_2 \dots . \varphi_n$- என்ற வெக்டார்களின் கணமானது கீழ்காணும் பண்புகளைப் பொறுத்து, வெக்டார் அடித்தளம் எனக் கருதப்படுகிறது. அவை,

I. $\varphi_1, \varphi_2 \dots . \varphi_n$-இவ்வெக்டார்கள் அனைத்தும் ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்களாக இருக்க வேண்டும்.

II. φ-எனும் ஒவ்வொரு வெக்டாரும், வெக்டார் வெளியில் $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots . \varphi_n$-என்ற வெக்டார்களின் ஒருபடிச் சேர்வாக வெளிப்படுத்த வேண்டும். இதனால்தான் $\varphi_1, \varphi_2 \dots . \varphi_n$ என்ற வெக்டார்களின் கணமானது, வெக்டார் வெளியின் அடித்தளம் என அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்:-

[1] $X_1 = [1,1,1],\ X_2 = [1,2,3],\ X_3 = [1,3,2],\ X_4 = [3,2,1]$

இம்மூன்று வெக்டார்களும் $S = V_3(R)$ எனும் பொது வெளியில் அமைந்துள்ளன. வெக்டார் வெளியை அளவிடுக.

$S = [a, b, c]$ எனும் வெக்டாரானது $k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4$ என விளக்கப்படுகிறது.

$$= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 + 3k_4 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 2k_4 \\ k_1 + 3k_2 + 2k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

எனவே, சமன்பாட்டின் தொகுப்புகளானது,

$$k_1 + k_2 + k_3 + 3k_4 = a$$

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 2k_4 = b$$

$$k_1 + 3k_2 + 2k_3 + k_4 = c$$

மேற்குறிப்பிடப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகள் அனைத்தும் ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தமுடையவைகள். எனவே வெக்டார்கள் X_1, X_2, X_3 மற்றும் X_4 'S' எனும் வெக்டார் வெளியை உருவாக்குகின்றன.

2. $x + y + Z = 4;\ 2x + 5y - 2z = 3;\ x + 7y - 7z = 5$-

இம்மூன்று சமன்பாடுகளும் பொருத்தமுடையவைகள் அல்ல என நிருபணம் செய்க. கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளை, நாம் $Ax = B$ என வெளிப்படுத்துவோம்

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

இதை அணியில் நிரை செயலைப் பயன்படுத்தி, முக்கோண அணியாகக் குறைக்கலாம். இதே நிரை செயலை 'B' அணியிலும் நாம் பயன்படுத்தலாம்.

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$x + y + z = 4$

$3y - 4z = -5$

$$0 = 11 \Rightarrow 11 \neq 0$$

இந்த முடிவு ஒத்துவராத முடிவு. எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் மூன்றும் பொருத்தமுடையவைகள் அல்ல.

3. $x + y + z + 3 = 0$

$3x + y - 2z + 2 = 0$

$2x + 4y + 7z - 7 = 0$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று சமன்பாடுகளின் தொகுப்புகள் பொருத்தமுடையவைகளா? பொருத்தமுடையவைகள் என்றால், அவற்றின் தீர்வைக் காண்க.

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளை, ஒரு அணியாக நாம் எழுதினால்,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

நிரை செயல்களை, மேலே உள்ள அணியின் குணகங்களுக்கும் பயன்படுத்துவோம்.

$R_2 \to R_2 - 3R_1$

$R_3 \to R_3 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & -5\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\7\\20\end{pmatrix}$$

$$x+y+z=-3$$

$$-2y-5z=7$$

$0=20$ இங்கு $20 \neq 0.$

எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் மூன்றும் பொருத்தமுடையவைகள் அல்ல.

4. $x+y+z=6$

$$x-y+z=2$$

$$2x+y-z=1$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளும் பொருத்தமுடையவைகள் என நிருபணம் செய்க.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\1\end{pmatrix}$$

அணிகளின் குணகங்களில், நிரை செயல்களைப் பயன்படுத்தினால், நமக்கு கிடைப்பது,

$R_2 \to R_2 - R_1$

$R_3 \to R_3 - 2R_1$ $\qquad\qquad R_3 = R_3 - \frac{1}{2}R_2$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & 0\\0 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\\-11\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\\-9\end{pmatrix}$$

$x+y+z=6 \qquad \longrightarrow (1)$

$-2y=-4 \qquad \longrightarrow (2)$

$$-3z = -9 \quad \longrightarrow (3)$$

$$(2) \Rightarrow -2y = +4$$

$$y = 2$$

$$(3) \Rightarrow -3z = -9$$

$$3z = 9$$

$$z = 3$$

$$(1) \Rightarrow x + 2 + 3 = 6$$

$$x + 5 = 6$$

$$x = 6 - 5$$

$$x = 1$$

எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் அனைத்தும் பொருத்த முடையவைகளே

5. $S = (1,0,0), (0,1,0),$ எனில் $'S'$ வெளியின் ஒருபரிமாண அல்லது, அதன் உருவாகும் தளம் என்ன?

$a_1 = (1,0,0);\ a_2 = (0,1,0),$ என்றால், $L(S)$ என்பது a_1 மற்றும் a_2- வின் ஒருபடிச் சேர்வு கணமாக இருக்கும்.
எனவே,

$$L(S) = k_1a_1 + k_2a_2 = -k(1,0,0) + k_2(0,1,0) = (k_1, -k_2, 0)$$

அதாவது, வரைகணிதப்படி, $L(S)$ என்பது xy –தளத்தில் அமைந்துள்ளது எனக் கூறலாம்.

6. $S = (1,0,0)\ \&\ (0,3,0),$ எனில், $'S'$-எனும் வெளி, உருவாகும் தளம் எது?

$a_1 = (1,0,0); a_2 = (0,3,0)$ எனக் கருதினால், $L(S)$ என்பது, a_1 மற்றும் a_2-வின் ஒருபடிச் சேர்வு கணமாக இருக்கும்.

எனவே, $L(S) = k_1a_1 + k_2a_2 = k_1(1,0,0) + k_2(0,3,0) = (k_1, 3k_2, 0)$

அதாவது, வரைகணிதப்படி, $L(S)$ எனும் வெளி, xy –தளத்தில் அமைந்துள்ளது எனக் கூறலாம்.

7. $S = (2,0,0), (0,1,0)(0,0,-2)$ எனில், $'S'$ எனும் வெளி உருவாகும் தளம் என்ன?

$a_1 = (2,0,0); a_2 = (0,1,0); a_3 = (0,0,-2)$,எனக் கருதினால், $L(S)$ என்பது a_1, a_2 & a_3-யின் ஒருபடிச் சேர்வு கணமாக இருக்கலாம்.

எனவே, $L(S) = k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$

$$= k_1(2,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,-2)$$

$$= (2k_1, k_2, -2k_3)$$

அதாவது, வரைகணிதப்படி, $L(S)$ என்பது x, y, z தளத்தில் அமைந்துள்ளது.

8. $S = (2,0,0), (3,0,0)$ எனில், $L(S)$- உருவாகும் தளம் எது?

$a_1 = (2,0,0); a_2 = (3,0,0)$ எனக் கருதினால், $L(S)$ என்பது a_1&a_2 க்களின் ஒருபடிச் சேர்வு கணமாக இருக்கும். அதாவது,

$$L(S) = k_1a_1 + k_2a_2$$

$$= k_1(2,0,0) + k_2(3,0,0)$$

$$= (2k_1 + 3k_2, 0,0)$$

வரைகணிதப்படி, $L(S)$, x – எனும் தளத்தில் அமைந்துள்ளது.

9. $(1,2,2,1),(3,4,4,3)$ மற்றும் $(1,0,0,1)$ இம் மூன்று வெக்டார்களும், ஒருபடிச் சார்ந்தவை என நிருபணம் செய்க; மேலும் வெக்டார் தளத்தையும் விளக்குக

கொடுத்துள்ள வெக்டார்களை, அணியின் குணகங்களாக எழுதும்போது,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

இதில் ஏதாவது ஒரு 3×3 அணிக்கோவையை நாம் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2(4-0) - 4(2-0) + 0(6-4)$$

$$= 8 - 8$$

$$= 0$$

எனவே, அணியின் தரம் < 3

அதாவது, அணியின் தரம் '2' எனக் கூறலாம். எனவே கொடுத்துள்ள வெக்டார்கள் அனைத்தும் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டார்களாகும் மற்றும் வெக்டார் தளமானது $V_4^2(F) -$ ஆகும்.

10. $(1,1,1,0),(4,3,2,-1),(2,1,0,-1)$ & $(4,2,0,-2)$

இந்நான்கு வெக்டார்களும் ஒருபடிச் சார்ந்தவை என நிருபணம் செய்க. மற்றும் அதன் வெக்டார் தளத்தை உருவாக்குக.

குணகங்களின் அணியானது,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3×3 அணிக்கோவையைக் கருதினால்,

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(0-0) - 2(0-4) + 4(0-2)$$

$$= 0 + 8 - 8 = 0.$$

∴ அணியின் தரமானது $3-$ ஐ விடக் குறைவு எனவே அணியின் தரம் $= 2$

∴ கொடுத்துள்ள வெக்டார்கள் அனைத்தும் ஒருபடிச் சார்ந்தவை, மற்றும் வெக்டார் தளமானது $V_4^2(F)$ ஆகும்.

1.32 திசையிலிப் பெருக்கல் (Scalar on Inner product)

ψ_1 மற்றும் ψ_2 என்ற இவ்விரு வெக்டார்களின் திசையிலிப் பெருக்கல் பலனானது, கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$< \psi_1, \psi_2 >= \int \psi_1^* \psi_2 d\psi$$

திசையிலிப் பெருக்கலின் பண்புகள்:

1. ψ_1 மற்றும் ψ_2 வெக்டார்களின் திசையிலிப் பெருக்கல் ψ_2 மற்றும் ψ_1 வெக்டார்களின் திசையிலிப் பெருக்கலின் இணை சிக்கல் எண்ணிற்குச் (complex conjugate) சமம்.

   அதாவது, $< \psi_1, \psi_2 >=< \psi_2, \psi_1 >^*$ இதில் * என்பது இணை சிக்கல் எண்ணைக் குறிப்பிடுகிறது.

2. வெக்டா ர் ψ – உடன் φ யின் திசையிலிப்பெருக்கலானது ψ_1- ஐப் பொறுத்தவரை ஒருபடியாகவும், ψ_2-வைப் பொறுத்தவரை, எதிர் ஒருபடியாகவும் இருக்கும்.

   அதாவது,

$$\varphi < k_1, \psi_1 + k_2 \psi_2 >=< \varphi, k_1 \psi_1 > +< \varphi, k_2 \psi_2$$

$$= k_1 < \varphi, \psi_1 > + k_2 < \varphi, \psi_2$$

3. $< \varphi, \psi_1 + \psi_2 > = < \varphi, \psi_1 > + < \varphi, \psi_2$

4. ψ எனில்,

$$< \varphi, \psi > = < \psi, \psi > = \int \psi^* \psi \, d\psi \geq 0$$

வெக்டார்களின் நேர்குத்து அல்லது நீளத்தைக் குறிக்கின்றது.

1.33 வெக்டார் அடித்தளத்தின் நேர் செங்குத்துத்திறன்:- (Ortho normality of basis vector)

$\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n$ என்ற வெக்டார்களின் கணமானது, கீழ்க்காணும் பண்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அவற்றை வெக்டார் அடித்தளத்தின் 'நேர் செங்குத்து' எனக் கூறலாம்

வெக்டாரின் தரம் (அல்லது) மாதிரி (Norn of a vector)

ψ என்ற வெக்டாரின் தரமானது அச்சார்பினால், சார்பின்மேல் உருவாகும் திசையிலிப் பெருக்கலாகும்.

அதாவது தரம் $N = < \psi \; \psi >$

வெக்டார் தரம் (அல்லது) மாதிரியின் பண்புகள்:-

1. ஒரு வெக்டாரின் தரம், எப்பொழுதுமே ஒரு மெய்யான, குறையெண் இல்லாத எண்ணாக இருக்கும் அதாவது,

$$< \psi \; \psi \geq 0$$

2. $\sqrt{< \psi \; \psi >} \rightarrow$ இத்தொடர்பு, $\psi -$ எனும் வெக்டாரின் நீளம் எனக் கூறலாம்.

3. ஓரலகு வெக்டாருக்கு, தரமானது 1 ஆக இருக்கும்.

அதாவது $< \psi \; \psi > = 1$

4. இரு வெக்டார்களின் திசையிலிப் பெருக்கல் சுழியமானால், அவ்விரு வெக்டார்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன எனக் கூறலாம்.

அதாவது, $<\psi\ \psi> = 0$

எடுத்துக்காட்டுகள்:-

1. $X_1 = [1,2,3]; X_2 = [2,-3,4]$

இவ்விரு வெக்டார்களின் திசையிலிப் பெருக்கற்பலனைக் காண்க.

திசையிலிப் பெருக்கல் $=< X_1X_2 >$

$$= < [1,2,3][2,-3,4] >$$

$$= 2 - 6 + 12$$

$$< X_1X_2 > = 8$$

2. $X = [2,1,2]$ இவ்வெக்டாரின் தரத்தையும் நீளத்தையும் காண்க

நேர்குத்து $N = < X\ X >$

$$=< [2,1,2]\ [2,1,2] >$$

$$= 4 + 1 + 4$$

$$N = 9$$

நீளம் $= \sqrt{N} = \sqrt{9}$

$$= 3$$

3. $X = \left[{}^{1}/_{3}, {}^{-2}/_{3}, {}^{-2}/_{3}\right]$; $Y = \left[{}^{2}/_{3}, {}^{-1}/_{3}, {}^{2}/_{3}\right]$

இவ்விரு வெக்டார்களும் ஒன்றுக்கொன்று 'செங்குத்து' என நிரூபணம் செய்க.

இரு வெக்டார்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், திசையிலிப் பெருக்கல்

$$< X ,Y > \; = \; 0$$

$$< X,Y > =< \left[{}^{1}/_{3}, {}^{-2}/_{3}, {}^{-2}/_{3}\right]\left[{}^{2}/_{3}, {}^{-1}/_{3}, {}^{2}/_{3}\right] >$$

$$= \left[{}^{1}/_{3} \times {}^{2}/_{3}\right] + \left[{}^{-2}/_{3} \times {}^{-1}/_{3}\right] + \left[{}^{-2}/_{3} \times {}^{2}/_{3}\right]$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{4}{9}$$

$$= 0$$

$$< X\, Y > = 0$$

எனவே, X, Y இவ்விரு வெக்டார்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவைகளே.

4. $X_1 = [1,2,1]$, $X_2 = [2,1,2]$, $X_3 = [2,1,-4]$

இவ்வெக்டார்களைப் பயன்படுத்தி,

1. ஒவ்வொ ரு ஜோடி வெக்டார்களுக்கும் திசையிலிப் பெருக்கத்தைக் காண்க.

2. ஒவ்வொ ரு வெக்டாரின் நீளத்தையும் கணக்கிடுக.

I. திசையிலிப் பெருக்கல்:-

$$X_1 = [1,2,1];\; X_2 = [2,1,2];\; X_3 = [2,1,-4]$$

a. $$< X_1, X_2 > = < [1,2,1][2,1,2] >$$

$$= 2 + 2 + 2$$

$$< X_1, X_2 > = 6$$

b. $$< X_2, X_3 > = < [2,1,2]\; [2,1,-4] >$$

$$= 4 + 1 - 8$$

$$< X_2, X_3 > = -3$$

c. $$< X_3, X_1 > = < [2,1,-4]\; [1,2,1] >$$

$$= 2 + 2 - 4$$

$$< X_3, X_1 > = 0$$

II. வெக்டார்களின் நீளம்:-

a. X_1 –ன் நீளம் $= \sqrt{< X_1 X_1 >}$

$= \sqrt{[1,2,1][1,2,1]}$

$= \sqrt{1 + 4 + 1}$

X_1 –ன் நீளம் $= \sqrt{6}$

b. X_2 –ன் நீளம் $= \sqrt{< X_2 X_2 >}$

$= \sqrt{[2,1,2]\; [2,1,2]}$

$$= \sqrt{4+1+4} \quad = \sqrt{9}$$

X_2 –ன் நீளம் $= 3$

c. X_3 –ன் நீளம் $= \sqrt{< X_3 X_3 >}$

$$= \sqrt{[2,1,-4]\ [2,1,-4]}$$

$$= \sqrt{4+1+16}$$

X_3 –ன் நீளம் $= \sqrt{21}$

1.34 சுவார்ட்ஸ் சமனின்மை (Schwartz Inequality):-

இரு சுழியமல்லாத வெக்டார்களின் திசையிலிப் பெருக்கற்பலன் சுழியமாக இருந்தால், அவ்விரு வெக்டார்களும் செங்குத்து (orthogonal) வெக்டார்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே, u மற்றும் v எனும் இரு வெக்டார்களும் செங்குத்து வெக்டார்கள் எனில்

$$< u, v > = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

ஒரு வெக்டாருடன், அதே வெக்டாரின் திசையிலிப் பெருக்கற்பலனானது ஒருமையாக இருந்தால், அவ்வெக்டாரானது ஒருமைக்குத் தரம் உயர்த்தப்படுகிறது எனலாம்.

அதாவது, 'v' எனும் வெக்டார் ஒருமை நிலை அடைகிறது, எனில்,

$$< u, u > = 1 \qquad \rightarrow (2)$$

ஒரு வெக்டார் கணமானது, மீதமுள்ள மற்ற வெக்டார்களுக்கு செங்குத்தாக இருந்தால், அக்கணத்தை நாம் **செங்குத்தான கணம்** என அழைக்கலாம்.

ஒரு கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு வெக்டாரும். ஒருமை நிலைக்கு தரம் உயர்த்தப்பட்டால், அக்கணத்தை நாம், **செங்குத்து இயல்நிலைக்**

கணம் (Ortho normal) எனக் கூறுவோம், எனவே, ‘u’ என்பது ஒரு வெக்டார் எனில், $\frac{u}{\sqrt{u,u}}$ - என்பது u-க்கு இணையாக ஒருமைத் தரம் உயர்த்தப்பட்ட வெக்டார் என அழைக்கப்படுகின்றது.

‘n’ வெக்டார்களின் கணமானது, $\overrightarrow{u_1}\,(i = 1, 2, \dots . n)$ ஒரு “செங்குத்து இயல்நிலை கணம்” எனக் கூற வேண்டுமெனில்,

$$< \hat{u}_i\, \hat{u}_j > = \delta_{ij}(i, j = 1, 2, \dots n)$$

இங்கு$\delta_{ij} = 1;\ i = j$ ஆக இருந்தால்

$= 0;\ i \neq j$ ஆக இருந்தால் $\rightarrow (3)$

இதே போல், அலகு வெக்டார்களின் கணமும்,

$e_i\ (i = 1,2, - - n)$ ஒரு செங்குத்து இயல்நிலைக்கணத்தை உருவாக்குகின்றது

சமன்பாடு (3) – லுள்ள தொடர்பைப் பயன்படுத்தி, a மற்றும் b எனும் இரு வெக்டார்களின் திசையிலிப் பெருக்கலை நாம் காண முடியும்

அதாவது, $< a, b > = < \sum_i a_i\, \hat{u}_i \sum_j a_j\, \hat{u}_j >$

$$= \sum_i \sum_j a_i^*\ b_j < \hat{u}_i\ \hat{u}_j >$$

$= \sum_i \sum_j a_i^*\ b_j\ \delta_{ij}$ $\because$ சமன்பாடு (3) லிருந்து

$= \sum_i \sum_j a_i^*\ b_i$ ($\because\ \delta_{ij} = 1;\ i = j$ ஆக இருந்தால்)

$$< a,b > = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \; b_i \quad \rightarrow (4)$$

$b = a$ எனில், நமக்கு,

$$< a,a > = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \; a_i$$

$$< a,a > = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \quad \rightarrow (5)$$

எனவே, வெக்டார் 'a'-யின் தரம் அல்லது நீளமானது,

$$|a| = < a,a >^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right\}^{1/2} \quad \rightarrow (6)$$

மேலுள்ள தொடர்புகள் அனைத்தும், ஒரு வெளியிலுள்ள இரண்டு மெய்யான வெக்டார்களின் பொதுவான திசையிலிப் பெருக்கலிற்கும், சிக்கலான திசையிலிப் பெருக்கலிற்கும் உள்ள வடிவொப்புமையை விளக்கிக் காட்டுகின்றன.

$$|A.B| = |A| \; |B| \; cos\,(A,B) = \sum_{i} A_i$$

எந்த ஒரு கோணத்திற்கும், அதன் 'கொசைன்' மதிப்பு +1 மற்றும் -1 –க்கு இடையில் அமைந்திருப்பதால்,

$$|A.B| \leq |A| \; |B|$$

சமன்பாடு (6) – ஐப் பயன்படுத்தினால்,

$$|A| \leq < A, A >^{1/2} = \sqrt{A, A}$$

$$|B| \leq < B, B >^{1/2} = \sqrt{B, B}$$

$$\therefore \quad |A.B| \leq \left(\sqrt{< A, A >}\sqrt{< B, B >}\right)$$

$$|A.B| \leq \sqrt{< A, A >< B, B >}$$

u மற்றும் v எனும் வெக்டார்களைப் பயன்படுத்தினால்

$$|< u, v >| \leq \sqrt{\{< u, u >< v, v >\}}$$

இருபக்கமும் வர்க்கப்படுத்தினால், நமக்குக் கிடைப்பது

$$|(u, v)|^2 \leq < u, u >< v, v >$$

இதுவே 'ஸ்வார்ட்ஸ் சமனின்மை' என்பதாகும்.

1.35 கிராம் -ஸிமிட்ஸ் செங்குத்தாக்கும் செய்முறை:- (Gram – Schmidt ' Orthogonalisation Process)

கிராம் ஸிமிட்ஸ் செங்குத்தாக்கும் செய்முறையானது செங்குத்தான கணம் அல்லது 'செங்குத்து இயல்நிலை' வெக்டார்களின் கணத்தை ஒருபடிச் சாராத வெக்டார்களுக்காக அளிக்கிறது. ஒருபடிச் சாரா வெக்டார்களை $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n$ எனக் கருதுவோம். இவைகள் செங்குத்து வெக்டார்களாக இருக்க வேண்டுமென்பதில்லை. இவ்வெக்டார்கணத்திலிருந்து, மற்றொரு செங்குத்து வெக்டார்களின் கணமான $V_1, V_2, V_3, \ldots V_n$ என்பதை உருவாக்குவது தற்போதைய தேவை. இவ்வாறு ஸ்மிட்ஸ் செங்குத்தாக்கும் செய்முறையின் விளக்கம் பின்வருமாறு:-

1. $V_1 = U_1 \quad \rightarrow \ (1)$ என்பதைத் தேர்ந்தெடு.

2. இங்கு $V_2 = U_2 + a_{21} V_1 \rightarrow (2)$

இதில், a_{21} – என்பது ஒரு மாறிலி.

இதன் மதிப்பினை, V_2 – வானது, V_1 – ற்கு செங்குத்தாக உள்ளது என்ற நிபந்தனையின் மூலம் அறியமுடியும்.

அதாவது $(V_1, V_2) = 0$

V_1 மற்றும் V_2 வெக்டார்களின் திசையிலிப் பெருக்கத்தை சுழியத்திற்கு சமன்படுத்தினால், நமக்கு கிடைப்பது

$$(V_1 V_2) = (V_1, U_2 + a_{21} V_1)0$$

$$\Rightarrow (V_1, U_2) + a_{21}, (V_1, V_1) = 0$$

$$a_{21}(V_1, V_1) = \qquad (V_1, U_2)$$

$$a_{21} = \ -\frac{V_1, U_2}{V_1, V_1} \quad \rightarrow (3)$$

எனவே, V_1 & V_2 – எனும் இரண்டு செங்குத்து வெக்டார்களை நாம் கொண்டுள்ளோம்.

2. தற்பே ாது

$$V_2 = U_3 + a_{32} V_2 + a_{31} V_1 \rightarrow (4)$$

இதில் a_{32} மற்றும் $a_{31} \rightarrow$ இரு மாறிலிகள்.

இவற்றின் மதிப்பினை, V_3 – யானது V_1 மற்றும் V_2 – வெக்டார்களுக்கு செங்குத்து நிலையில் உள்ளது என்ற நிபந்தனையின் மூலம் அறிய முடியும்.

எனவே,

$$(V_1, V_3) = 0 \quad \& \ (V_2, V_3) = 0$$

1. $(V_1, V_3) = 0 \quad \Rightarrow (V_1, V_2) = 0$

$$(ie) \quad (V_1, U_3 + a_{32} \; V_2 + a_{31} V_1 = 0$$

$$(V_1, U_3) + a_{32} \; (V_1, V_2) + \; a_{21} (V_1, V_1) = 0$$

$$(V_1, U_3) + 0 + a_{31}(V_1, V_1) = 0 \quad (\because V_1 \; V_2 = 0)$$

$$a_{31} \; (V_1, V_1) = - \; (V_1, U_3)$$

$$a_{31} = \frac{-(V_1, U_3)}{(V_1, V_1)} \quad \rightarrow \quad 5(a)$$

2. $(V_2, V_3) = 0 \quad \Rightarrow (V_2, V_1) = 0$

$$(ie) \quad (V_2, U_3 + a_{32} \; V_2 + a_{31} V_1 = 0$$

$$(V_2, U_3) + a_{32} \; (V_2, V_2) + \; a_{31} (V_2, V_1) = 0$$

$$(V_2, U_3) + a_{32}(V_2, V_2) + 0 = 0 \quad (\because V_2 \; V_1 = 0)$$

$$a_{32} \; (V_1, V_1) = - \; (V_2, U_3)$$

$$a_{32} = \frac{-(V_2, U_3)}{(V_2, V_2)} \quad \rightarrow \quad 5(b)$$

$5(a)$ மற்று ம் $5(b)$ சமன்பாடுகள் a_{31} மற்றும் a_{32} – களின் குணகங்களின் மதிப்பைத் தருகின்றன.

இதே செய்முறையைத் தொடர்ந்தால் சமமான செங்குத்து கணங்களின் மூலகங்களைப் பெறலாம்.

பொதுவாக, V_i – ன் i^{th} மூலகமானது

$$V_i = \; U_i - a_{i_1} V_1 + a_{i_2} V_2 + \cdots \; a_{i, \; i-1} \; V_{i_1} \qquad \rightarrow \; (6)$$

குணகங்கள் $a_{i_1}, a_{i_2} \cdots a_{i, \; i-1}$

அதாவது,

$a_{ij},\ 1 \le j \le i-1-$ இவற்றின் மதிப்புகளை, V_i ஆனது, மற்ற மூலகங்களான $V_1, V_2, V_3 \cdots V_{i-1}-$ இவற்றுக்கு செங்குத்து நிலையானது என்ற நிபந்தனையுடன் பெறமுடியும். எனவே,

$$a_{ij} = \frac{-(V_j, U_i)}{(V_j, V_j)} \quad \rightarrow \quad (7)$$

முடிவாக, $V_1, V_2 \cdots V_n$ போன்ற அனைத்து வெக்டார்களும் ஒரு செங்குத்து இயல்நிலை கணத்தைப் பெறுவதற்கு $\{x_i\}$ தரம் உயர்த்தப்படுகின்றன.

உதாரணமாக,

x_i வெக்டாரானது, அதன் நீளத்தால் வகுக்கப்பட்டு தரம் மாற்றப்படுகின்றது.

அதாவது $$x_i = \frac{V_i}{(V_i, V_i)^{1/2}} = \frac{V_i}{\left|\sum_{i=1}^{n} V_i\right|^2} \quad \rightarrow \quad (8).$$

❖ ❖ ❖

அத்தியாயம் 2

a. அணிகள் (Matrices)

2.1 வரையறை:-

ஒரு செவ்வக அமைப்பில் வரிசைப்படுத்தியுள்ள எண்களை, இரண்டு அடைப்புக் குறிகளுக்குள் குறிப்பிடக் கிடைப்பது ஒரு ***அணி*** எனப்படும், அதாவது, mn எண்களை, m நிரைகளிலும், n நிரல்களிலும் வரிசையாக எழுதி அவற்றைப் பின்வருமாறு இரண்டு அடைப்புக்குறிகளுக்குள் அமைப்போமானால், நமக்கு ஒரு அணி கிடைப்பதாகக் கூறலாம். அதாவது,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots\dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

எனில், பின் 'A' என்பது ஒரு $(m \times n)$ அணி எனப்படும் இந்த அணியில் m நிரைகளும், n நிரல்களும் உள்ளன. ஒவ்வொரு மூலகமும் a_{ij} என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும். இங்கு ij என்பது முறையே அந்த மூலகம் உள்ள நிரையையும், நிரலையும் குறிக்கிறது.

மேலே கண்ட A என்ற அணியை ஒரு ***செவ்வக அணி*** என்றும் கூறலாம். இந்த அணியின் வரிசை $m \times n$ எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (3 \times 3)$ அணியாகும்.
2. $[\, a \quad b \quad c \,] \Rightarrow (1 \times 3)$ அணியாகும்.
3. $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow (4 \times 1)$ அணியாகும்.

2.2 அணியின் சிற்றணிக் கோவைகள் (Minors of a Matrix) & அணியின் தரம் (அல்லது) மதிப்பு (Rank of a Matrix)

அணியின் சிற்றணி (Minors of Matrix):-

'A' என்பது ஒரு $(n \times n)$ சதுர அணி (அல்லது) $(m \times n)$ செவ்வக அணியாகவோ இருக்கட்டும். ஒரு அணியின் சதுர கீழ் அணிகளின் (square – sub matrix) அணிக்கோவைகள், அந்த அணியின் சிற்றணிக் கோவைகள் எனப்படும்.

அணி A யின் ஒரு மூலகமானது, சிற்றணி வரிசை 1- எனக் கருதப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad \text{எனில்,}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

மேலே உள்ள இரண்டு அணிக் கோவைகளும் A யின் 3- வரிசை சிற்றணிகளாக கருதப்படுகின்றன.

இதேபோல்,

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \cdots$, இந்த அணிக் கோவைகள் A யின் 2 – வரிசை சிற்றணிகளாகக் கருதப்படுகின்றன.

2.3 அணியின் தரம் (அல்லது) மதிப்பு:- (Rank of a Matrix)

'r' எனும் ஒரு இயல் எண், 'A' எனும் ஒரு அணியின் தரமாக இருக்க வேண்டுமெனில், $\underline{r}$ ஆனது கிழ்க்கண்ட இரு பண்புகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும். அவையாவன:

1. A எனும் அணியில், ஏதாவது ஒரு சுழியமல்லாத r – வரிசை சிற்றணியாவது இடம் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

2. இந் த அணியில், (r+1)- வரிசை சிற்றணி ஏதாவது இடம் பெற்றிருந்தாலும், அது மறைந்து விடும். (இல்லாமல் போய்விடும்).

அதாவது, ஒரு அணியின் தரம் (அல்லது) மதிப்பானது, அந்த அணியின் மறைவில்லாத, மிகப்பெரிய வரிசை உள்ள ஒரு சிற்றணியாகும்.

அணி A- ன் தரமானது $\rho(A)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

மேற்கூறிய விளக்கங்களிலிருந்து, ஒரு அணியின் தரத்தை நிர்ணயிப்பதற்கு, சில முக்கிய முடிவுகளை நாம் மேற்கொள்ளலாம். அவையாவன :-

i. ஒவ்வொரு சுழிய அணி (அல்லது) பூச்சிய அணியின் தரம் சுழியமே.

ii. ஒவ்வொரு சுழியிமல்லாத அணியின் தரம் ≥ 1

iii. ஒரு அணியின் (r+1) - வரிசை நிரை சிற்றணி மறைந்தாலோ அல்லது, அந்த அணியில் (r+1) - வரிசை நிரை சிற்றணி இல்லை என்றாலோ, அந்த அணியின் தரமானது. $\leq r$

iv. ஒரு அணியில் r - வரிசை சுழியமல்லாத சிற்றணி ஒன்றிருந்தாலே, அந்த அணியின் தரமானது $\geq r$

v. n- சதுர, சிறப்பு அல்லாத (non singular) அணியின் தரம் 'n' ஆகும்.

vi. ஒரு அணியின் (r+1) வரிசை நிரை சிற்றணி சுழியமாக இருந்தால், அதற்குமேல் வரிசை உள்ள சிற்றணி தன்னிச்சையாக சுழியமாகிவிடும்.

vii. $(m \times n)$ - வரிசை உள்ள ஒரு அணியின் தரமானது

$\leq m, \ m \leq n$ ஆக இருந்தால்;

$\leq n, \ n \leq m$ ஆக இருந்தால்.

(a). h - வரிசையுள்ள ஒரு அலகு அணி 'I_n' எனில்,

$$|I_n| = 1 \neq 0 \Rightarrow \rho\,(I_n) = n$$

(b). 'A' என்பது ஒரு மூலைவிட்ட அணியாக இருந்து, அதன் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் சுழியமல்லாது இருந்தால்,

$|A| \neq 0$ எனவே $\rho(\mathrm{A}) = \mathrm{n}$

எடுத்துக்காட்டு :-

1. கீழே கொடுக்கப்படடுள்ள அணிகளின் தரம் அல்லது மதிப்பைக் காண்க.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$

a :- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix}$

கொடுத்துள்ள அணி 3×4 வரிசையாக உள்ளது.

எனவே, இந்த அணியின் சிற்றணிக் கோவையின் அதிக பட்ச வரிசை 3 – ஆகும்.

எனவே

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 3 & -3 & -4 \\ 3 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

அதாவது இங்கு A- எனும் இந்த அணியில், ஒரு 3 வரிசை சுழியமல்லாத சிற்றணி இருப்பதால், அணியின் தரமானது 3 ஆகும். $\rho(A) = 3$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

இங்கு 3 வரிசை சதுர அணியாக உள்ளது.

இந்த 3 வரிசை சிற்றணியானது சுழியமதிப்பைக் கொண்டுள்ளது.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

எனவே, 2 வரிசை நிரை சிற்றணியானது.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

எனவே, இங்கு சுழியமல்லாத 2 வரிசை சிற்றணி இருப்பதால், அணியின் தரமானது '2' ஆகும்.

அதாவது $\rho(A) = 2$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$

இங்கு,

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix} = 0$$

மேலும், 2 வரிசை சிற்றணிகளின், மதிப்பும் சுழியமாகும்.

எனவே 'A' அணியில், 1 சதுர சிற்றணிதான் அமைந்துள்ளதால்,

அணியின் தரமானது 1 ஆகும்.

(a) $\rho(A) = 1$

எடுத்துக்காட்டு 2:-

கொடுத்துள்ள 'A' எனும் அணியின் தரத்தைக்காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

கொடுத்துள்ள அணியின் வரிசை 4X4 எனவே, இந்த அணியின் சிற்றணிக் கோவையின் வரிசை 1,2,3,4.

4 – வரிசை அணிக்கோவையானது,

$$|A| = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

$R_4 - R_3 \Rightarrow$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 6 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$C_3 -$ பொதுக்காரணியாக 3 – ஐ எடுத்தால்,

$$|A| = 3 \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \\ 10 & 3 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$= 0$ (ஏனெனில் $C_2 = C_3$)

எனவே A ன் தரமானது < 4.

அதாவது ρ (A) < 4.

எனவே ஒரு 3 வரிசை சிற்றணிக் கோவையை எடுத்துக்:-

கொண்டால்,

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 10 & 3 & 9 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$= 0$ (ஏனெனில் $C_2 = C_3$)

இதே போல, எல்லா 3 வரிசை சிற்றணிக் கோவைகளும் சுழியமாக உள்ளன.

எனவே, ρ (A) < 3

ஒரு 2 வரிசை சிற்றணிக் கோவையை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 \neq 0$$

எனவே A ன் தரம் = 2

அதாவது $\rho(A) = 2$.

2.4 ஹெர்மிஷியன் மற்றும் எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணிகள் :- (*Hermitian & Skew Hermitian Matrices*)

ஒரு சதுர அணியின் திருப்பு இணை அணியானது (*tranpose of a conjugate*), அந்த அணியாகவே இருந்தால், அச்சதுர அணியை நாம் ***ஹெர்மிஷியன் அணி*** எனக் கூறலாம்.

எனவே 'A' எனும் அணி ஒரு ஹெர்மிஷியன் அணியாக இருக்குமானால்,

$$A^{\dagger} = A$$

இச்சமன்பாட்டிற்கு, ***'திருப்பு'*** செயலை நாம் மேற்கெண்டால்,

$$(A^{\dagger})^T = A^T$$

$$\Rightarrow [(\bar{A})^T]^T = A^T \quad (\because A^{\dagger} = (\bar{A})^T)$$

இங்கு $\bar{A}$ - என்பது இணை அணியைக் குறிக்கிறது.

$$\Rightarrow \bar{A} = A^T$$

அதாவது, 'A' எனும் ஹெர்மிஷியன் அணியின் திருப்பு அணியானது, அதன் இணை அணிக்குச் சமமாக உள்ளது.

அதாவது, $A = (a_{ij})$ எனில்,

$$a_{ji} = \overline{a_{ij}}$$

அதாவது, ஹெர்மிஷியன் அணியின் (ij) மூலகமானது (ji) மூலகத்தின் இணைக்குச் சமம்.

இங்கு, i=j எனக் கருதினால்,

$$a_{ii} = \overline{a_{ii}}$$

அதாவது, ஒரு ஹெர்மிஷியன் அணியின் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் அனைத்தும் மெய் எண்களாக இருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு.

எடுத்துக்காட்டு:-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4+i \\ 0 & 1 & -i \\ 4-i & i & 3 \end{bmatrix}$$

இது ஒரு ஹெர்மிஷியன் அணியாகும்.

எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணி:-

ஒரு சதுர அணியின், திருப்பு இணை அணியானது, அந்த அணியாகவே, குறை அடையாளத்துடன் (negative sign) இருந்தால், அதை ***எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணி*** எனக் கூறலாம்.

எனவே 'A' எனும் அணியானது எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணியாக இருக்க வேண்டுமெனில்,

$$A^{\dagger} = -A$$

அல்லது,

$$\bar{A}^{T} = -\bar{A}$$

$$\Rightarrow a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$$

அதாவது, (ij) மூலகமானது, (ji) மூலகத்தின் குறை இணை மூலகமாகும்.

இதில் i=j ஆக இருந்தால்,

$$a_{ii} = -\overline{a_{ii}}$$

அதாவது, எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணியின் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் அனைத்தும், சுழியமாகவே அல்லது முழுவதும் கற்பனை எண்களாகவே இருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவாகிறது.

2.5 சிக்கல் செங்குத்தணி (Unitary Matrix) :-

'A' என்ற சதுர அணி $A^{\dagger}A = I$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால், அது **சிக்கல் செங்குத்தணி** எனப்படும்.

அதாவது, ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணியை, அதன் திருப்பு இணை அணியுடன் பெருக்கினால், கிடைப்பது அலகு அணியாகும் (Unit Matrix). சிக்கல் செங்குத்தணியின் மூலகங்கள், சிக்கல் எண்களாகவும் இருக்கலாம்.

$A^{\dagger}A = I$ என்ற இந்தச் சமன்பாட்டின் மூலம், ஒரு உண்மையான சிக்கல் செங்குத்தணியானது, செங்குத்தணியாகிறது.

$|A| = d$ எனில்,

$$|A^{\dagger}| = d^*$$

இங்கு d^* என்பது, 'd' - ன் சிக்கல் இணையைக் குறிக்கிறது.

அதாவது, $|AA^{\dagger}| = |A^{\dagger}A| = d\, d^* = 1$

(அல்லது) 'd' - ன் அளவு = 1

எனவே, ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணியின், அணிக் கோவையின் மட்டு ஒன்றாக இருக்க வேண்டும் எனத் தெரிகிறது. மேலும் ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணியானது ஒரு சிறப்பு அல்லாத அணியாகவும், எதிரணியையும் கொண்டுள்ளது எனலாம்.

சமன்பாடு (1) – ன் (ij) மூலகத்தை, இருபக்கமும் நாம் சமன்படுத்தினால்,

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, A^*_{jk} = \delta_{ij} \,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki} \ A_{kj} = \delta_{ij} \quad : \ 1 \leq i,j \leq n$$

இங்கு, $A_{ik} = A$ன் (ik) மூலகமாகும்.

மற்றும் n என்பது அதன் வரிசையைக் குறிக்கிறது.

சிக்கல் செங்குத்தணி, ஒரு ஹெர்மிஷியன் அணியாக இருந்தால்,

$$A^{\dagger}A = A = A^{-1} \text{ அல்லது}$$

$$AA = 1 = A^2$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{எனில்}$$

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

எனவே, $AA^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

எனவே 'A' என்பது ஒரு **சிக்கல்** ***செங்குத்தணி*** என நிரூபணம் ஆகிறது.

எனவே, இரு சிக்கல் செங்குத்தணிகளின் பெருக்கலின் முடிவும் ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணியாகத்தான் இருக்கும்.

A மற்றும் B எனும் இரு சதுர அணிகளைக் கருதினால்

$$A^{\dagger} = A \, ; \quad B = B^{\dagger}$$

மற்றும்

$$[AB]^{\dagger} \, [AB] = B^{\dagger} \ A^{\dagger} \ \ AB = B^{\dagger} = I$$

இதே போல்,

$$[AB] \, [AB]^{\dagger} = I$$

அதாவது,

ABயும் ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணியாகும். இதேபோல் BAயும் ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணியாகும்.

2.6 ஒரு அணியின் ஐகன் மதிப்பு, ஐகன் வெக்டார்கள், சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகள் :-

சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகள்

(அ) λ – ஐத் திசையிலி மாறிலியாகவும் (Scalar), A – ஐ ஒரு n - வரிசைச் சதுர அணியாகவும் கொண்டு $A_x = \lambda_x$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வினைக் காண்பது, இயற்கணிதத்தில் முக்கியமான ஒன்றாகும். இங்கு Xஐ மாற்றமிலா வெக்டார் அல்லது சிறப்பியல்பு வெக்டார் என்றும், λ - ஐச் சிறப்பியல்புமூலம் (ஐகன் மதிப்பு) என்றும் சொல்வோம்.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

என்று கொண்டால் $A_x = \lambda_x$ என்பதனைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

அதாவது

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

இந்தச் சமன்பாடுகள் x_1, x_2, x_3 - க்கு வெளிப்படைத் தீர்வுகளல்லாத மற்றத் தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டுமானால்,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ஆக இருக்கவேண்டும்.

1. இது A – ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு என வரையறுக்கப்படுகிறது.
2. இத ன் மூலங்களுக்குச் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு:

பின்வரும் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களைக் கண்டுபிடி,

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

இதனுடைய சிறப்பியல்பு சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ஆகும்.}$$

இதனை விரித்தெழுதினால்,

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். இதன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் 2,2,-2 என எளிதாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

தேற்றம் 1. A – யின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_n$ ஆனால் KA – ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் $K\lambda_1,\ K\lambda_2, \cdots K\lambda_n$ ஆகும்.

தேற்றம் 2. (A -KI) – ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள்

$$\lambda_1 - K \cdots \lambda_n - K.$$

தேற்றம் 3. $\propto$ ஆனது A – யின் சிறப்பியல்பு மூலமாக இருந்தால், $\frac{|A|}{\propto}$ ஆனது சேர்ப்பு A – யின் சிறப்பியல்பு மூலமாக இருக்கும்.

தேற்றம் 4. A – யின் சிறப்பியல்பு மூலம் $\propto$ ஆனால், A^{-1} - ன் சிறப்பியல்பு மூலம் $\propto^{-1}$ ஆகும்.

தேற்றம் 5. A – யின் சிறப்பியல்பு மூலம் $\propto$ ஆனால் A^2 - ன் சிறப்பியல்பு மூலம் $\propto^2$ ஆகும்.

(ஆ) ஓர் அணியின் சிறப்பியல்பு வெக்டார்கள் :

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ என்பவற்றை ஒரு சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் தனிவேறுபட்ட, மெய்யான மூலங்களாகக் கொள்வோம். λ_1 - ஐச் சமன்பாடுகள் (1) – ல் பிரதியிட்டு, x_1, x_2, x_3 இவற்றின் மதிப்பைக் காணலாம். இதேமாதிரி ஒவ்வொரு மூலத்தையும் பயன்படுத்தி x_1, x_2, x_3 – க்குத் தனித்தனி மதிப்புகளைக் (a set of values) கண்டுபிடிக்கலாம்.

அவற்றினை,

$$X_1 = \begin{vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{vmatrix}, \quad X_2 = \begin{vmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{vmatrix}, \quad X_3 = \begin{vmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{vmatrix}$$

என்று கொள்வோம்,

x_1, x_2, x_3 ஆகியவை சிறப்பியல்பு வெக்டார்கள் (ஐஜின் வெக்டார்கள்) எனப்படும். இவைகள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 1. கொடுக்கப்பட்ட ஒரே சிறப்பியல்பு வெக்டாருக்கு இரண்டு சிறப்பியல்பு மூலங்கள் இருக்க முடியாது.

$A\,X = \lambda_1 X \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$ ஆக இருந்தால்

$A\,X = \lambda_2 X$

$\lambda_1 X = \lambda_2 X$ ஆகும்.

ஆகவே $(\lambda_1 - \lambda_2)\; X = 0$ .... (1)

ஆனால் $\lambda_1 \neq \lambda_2;\; X \neq 0$

$\therefore \quad (\lambda_1 - \lambda_2), X \neq 0$ .... (2)

(1)-ம் (2)-ம் எதிர் மாறானவை.

எனவே $\lambda_1 = \lambda_2$

தேற்றம் 2 : ஒரே சிறப்பியல்பு மூலத்திற்கு, பல்வேறு சிறப்பியல்பு வெக்டார்கள் உடன்பாடாக இருக்கலாம்.

ஏனெனில் $AX = \lambda X$ ஆனால்

$$A(KX) = \lambda\,(KX)$$

$\therefore$ KX-ம் ஒரு சிறப்பியல்பு வெக்டார். X—ம், $K\,X$-ம் ஒன்றையொன்று சார்ந்தவை.

இ) ஓர் அணியை மூலைவிட்ட அணியாக மாற்றுதல்:

P என்பது X_1, X_2, X_3 –யினைக் கொண்டு எழுதப்பட்ட அணியாக இருக்கட்டும்.

அதாவது $[P] = [X_1, X_2, X_3]$

$$\therefore\ [A][P] = [A]\,[X_1, X_2, X_3] = [AX_1\ \ AX_2\ AX_3]$$

$$AX_1 = \lambda_1\, X_1, AX_2 = \lambda_2\, X_2, AX_3 = \lambda_3\, X_3$$

ஆக இருப்பதால்,

$$[A][P] = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \lambda_3 X_3]$$

$$= [X_1, X_2, X_3]\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$= [P][D]$$

$$\therefore\ [P^{-1}][A][P] = [D]$$

A சிறப்பு அணியாக இல்லாதிருந்தால், P என்ற அணியைக் கண்டுபிடித்து $P^{-1}AP = D$ என்று எழுதலாம். இங்கு D என்பது மூலைவிட்ட அணியாகும்.

குறிப்பு: சிறப்பியல்பு மூலங்கள் தனிவேறுபட்டதாக இல்லாதிருந்தால், அந்த அணியை மூலைவிட்ட அணியாக மாற்ற முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு:

$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ ஐ மூலைவிட்ட அணியாக மாற்று.

இதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -7 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

அதாவது $\lambda^3 - 13\lambda + 12 = 0.$

எனவே $\lambda = -4, 3, 1$ ஆகும்.

$\lambda = -4$ என்று சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட்டு x_1, x_2, x_3 -ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$(2+4)x_1 + 2x_2 + (0)x_3 = 0$$

$$2x_1 + (1+4)x_2 + x_3 = 0$$

$$-7x_1 + 2x_2 + (-3+4)\, x_3 = 0$$

$$\therefore\ x_1 = 1;\ x_2 = -3;\ x_3 = 13$$

$$\therefore X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 13 \end{bmatrix}$$

இதே மாதிரி $\lambda = 3, \lambda = 1$ என்று பிரதியிட்டு

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ என எழுதலாம்.}$$

எனவே,

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 13 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{35} & \frac{-2}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{10} & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{10} \end{vmatrix}$$

எனவே,

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} \frac{3}{35} & \frac{-2}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{10} & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{10} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 13 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.6 கேலீ ஹாமில்டன் தேற்றம் (Cayley Hamilton Theorem)

தேற்றம்.

ஒவ்வொரு சதுர அணியும் அதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் மூலமாக இருக்கும்.

$[A - \lambda I]$ என்ற அணி

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

ஆகும்.

$$\therefore \ |A - \lambda I| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots a_n\lambda^n \quad \ldots.. \quad (1)$$

$A -$ ஆனது இதன் மூலம் என நிருபிக்கவேண்டும். அதாவது,

$$a_0 + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

என நிரூபிக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது

$$(A - \lambda I) \text{ சேர்ப்பு } (A - \lambda I) = |A - \lambda I|\, I \qquad \ldots\ldots \qquad (3)$$

$(A - \lambda I)$ என்ற அணியின் உறுப்பிலுள்ள λ -ன்படி ஒன்று ஆக இருப்பதால் சேர்ப்பு $(A - \lambda I)$-ன் உறுப்புகளில், λ-ன்படி $(n-1)$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

எனவே, சேர்ப்பு $(A - \lambda I) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots + b_{n-1}\lambda^{n-1}$ ... (4)

என எழுதலாம்.

கோவைகள் (2) (4)-ஐ (3) – ல் பிரதியிட்டுப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(A - \lambda I) - (b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots + b_{n-1}\lambda^{n-1})$$
$$= (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots a_n\lambda^n)I$$

இட, வலப்பக்கங்களிலுள்ள λ –வின் அடுக்குகளின் குணகங்களைச் சமன்படுத்தினால்,

$$Ab_0 = a_0\ I$$

$$Ab_1 - b_0 = a_1\, I$$

$$Ab_2 - b_1 = a_2\, I$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$Ab_n - b_{n-1} = a_n\, I$ என எழுதலாம்.

இவற்றை முறையே $I, A, A^2 \ldots\ldots A^n$ ஆல் முன் பெருக்கிக் கூட்டினால்,

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 \ldots\ldots a_n A^n = 0.$$

என வரும். இதிலிருந்து A என்ற அணி $|A - \lambda I| = 0$ என்ற சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் மூலம் எனத் தெரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

A – ன் நேர் எதிர் அணியை, ஸ்கேலார் குணகங்கள் உள்ள பல்லுருப்புக் கோவையாக எழுதுக.

சமன்பாடு (1) – ல், $\lambda = 0$ என்று கொண்டால், $|A| = a_0$ ஆகும். A சிறப்பு இல் அணியாக இருப்பதால் $|A| = a_0 \neq 0$

சமன்பாடு (2)ஐ A^{-1} ஆல் முன் பெருக்கி, பின்வரும் பல்லுருப்புக் கோவையை எழுதலாம்.

$$A^{-1} a_0 + a_1 I + a_2 A \ldots\ldots a_n A^{n-1} = 0$$

$$A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} I - \frac{a_2}{a_0} A - \cdots - \frac{a_n}{a_0} A^{n-1}$$

எடுத்துக்காட்டு:

கீழே கொடுத்துள்ள அணியின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டினைக் காண்க:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

மேலும் கேலீ ஹாமில்டன் தேற்றத்தை ஆராய்க. மற்றும் A -ன் நேர் மாற்று அணியையும் (A^{-1}) காண்க.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore A - x\,\mathrm{I} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & -1-x & 4 \\ 3 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

எனவே,

$$|A - x\mathrm{I}| = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & -1-x & 4 \\ 3 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 18x + 30$$

எனவே கொடுத்துள்ள அணியின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடானது,

$$-x^3 + x^2 + 18x + 30 = 0$$

கேலீ ஹாமில்டன் தேற்றத்தை நிருபணம் செய்ய வேண்டும் எனில்

$$30\mathrm{I} + 18\mathrm{A} + \mathrm{A}^2 - \mathrm{A}^3 = 0 \qquad \text{------} \qquad (1)$$

என நிரூபிக்க வேண்டும்.

இங்கு $\mathrm{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 14 & 3 & 14 \\ 12 & 9 & 6 \\ 8 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 14 \\ 12 & 9 & 6 \\ 8 & 6 & 14 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 62 & 39 & 68 \\ 48 & 21 & 78 \\ 62 & 24 & 62 \end{vmatrix}$$

எனவே,

$$30I + 18A + A^2 - A^3$$

$$= 30\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix} + 18\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & -1 & 4\\3 & 1 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}14 & 3 & 14\\12 & 9 & 6\\8 & 6 & 14\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}62 & 39 & 68\\48 & 21 & 78\\62 & 24 & 62\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}30+18+14-62 & 0+36+3-39 & 0+54+14-68\\0+36+12-48 & 30-18+9-21 & 0+72+6-78\\0+54+8-62 & 0+12+6-24 & 30+18+14-62\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

இவ்வாறாக கேலீ ஹாமில்டன் தேற்றம் நிரூபிக்கப்படுகிறது.

நேர்மாற்றுஅணி A^{-1} ஐ கீழ்வருமாறு காணலாம்.

$$30I + 18A + A^2 - A^3 = 0$$

$$=> \ A^{-1} = A^{-1}\, I$$

$$=> 30A^{-1}I + 18AA^{-1} + A^2A^{-1} - A^3A^{-1} = 0$$

$$=> 30A^{-1}I = -18I - A + A^2$$

$$A^{-1} = A^{-1}I = -\frac{18}{30}I - \frac{1}{30}A + \frac{1}{30}A^2$$

$$=> A^{-1} = \frac{-18}{30}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix} - \frac{1}{30}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & -1 & 4\\3 & 1 & 1\end{vmatrix} + \frac{1}{30}\begin{vmatrix}14 & 3 & 14\\12 & 9 & 6\\8 & 6 & 14\end{vmatrix}$$

$$=> A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{-5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{11}{30} \\ \frac{10}{30} & \frac{-8}{30} & \frac{2}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{5}{30} & \frac{-5}{30} \end{vmatrix}$$

2.7 சுழிய வெளி மற்றும் அணியின் சுழியத்தன்மை (அல்லது) அணியின் செல்லாத் தன்மை:

X – எனும் வெக்டார்களால் உருவாக்கப்படும் உள்வெளியானது $m \times n$- வரிசையுள்ள A -எனும் அணியின் ***நிரல் சுழிய வெளி*** எனக் கூற வேண்டுமானால்,

$Ax = 0$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

மேலும் $(n - r)$ அளவையானது A - அணியின் நிரல் சுழியத்தன்மையைக் குறிக்கிறது. இங்கு r என்பது $A-$ ன் தரத்தைக் குறிக்கிறது.

அதாவது,

A - ன் தரம் $+A$-யின் நிரல் சுழியத்தன்மை

$= A$ எனும் அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை

இதேபோல்,

உள்வெளி $YA = O$, என்பது நிரை சுழியத் தன்மையைக் குறிக்கிறது. மேலும் $(m - r)$ அளவையானது நிரை சுழியத் தன்மையைக் குறிக்கிறது.

அதாவது,

A - ன் தரம் $+A$-யின் நிரை சுழியத்தன்மை

$= A$ அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை

ஒரு சதுர அணியாக இருந்தால், அங்கு நிரை மற்றும் நிரல் சுழியத் தன்மைகள் சமமாக இருக்கும்.

அதாவது, $\rho(A)$ - என்பது A- ன் தரம்

$V(A)$ - என்பது A- ன் சதுர அணியின் சுழியத்தன்மை

$'n'$- என்பது நிரை அல்லது நிரல்களின் எண்ணிக்கையாக இருந்தால்,

$$\rho(A) + V(A) = n$$

2.8 சில்வெஸ்டர்ஸ் தேற்றம் (Sylvester's Theorem) (சுழியத்தன்மை விதி)

A மற்றும் B என்பது இரு n வரிசை சதுர அணிகளாக இருந்தால்,

$$\max\{V(A), V(B)\} \leq V(AB) \leq V(A) + V(B)$$

இங்கு,

$V(A), V(B), V(AB) -$ என்பன, A, B மற்றும் AB-யின் சுழியத்தன்மைகளைக் குறிக்கின்றன.

$\rho(A), \rho(B), \rho(AB) -$ என்பன, A, B மற்றும் AB- யின் தரங்களைக் குறிக்கின்றன.

எனவே,

$$\left.\begin{aligned} \rho(A) &= n - V(A) \\ \rho(B) &= n - V(B) \\ \rho(AB) &= n - V(AB) \end{aligned}\right\} \quad \text{-----} \quad (1)$$

$'r'$ - தரம் உடைய $'A'$ எனும் அணியில், $'P'$ மற்றும் $'Q'$ எனும் சிறப்பு அல்லாத அணிகள் இருந்தால்,

$$PAQ = \begin{vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{-----} \quad (2)$$

சமன்பாடு 2- ஐ முன்னாலும், பின்னாலும் முறையே P^{-1} மற்றும் Q^{-1}-களால் பெருக்கினால்,

$$A = P^{-1} \begin{vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} Q^{-1} \qquad \text{-----} \qquad (3)$$

C எனும் மற்றொரு அணியை நாம் கருதினால்,

$$C = P^{-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{vmatrix} Q^{-1} \qquad \text{-----} \qquad (4)$$

எனவே, $A + C = P^{-1} \begin{vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{vmatrix} Q^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$

அதாவது $A + C$ என்பது சிறப்பில்லாத அணி (பூச்சியமில் அணி) எனத் தெரிகிறது.

எனவே,

$$\rho(C) = n - \rho(A)$$

$$\rho(A + C) = n$$

ஆனால் A மற்று C- சிறப்பில்லாத அணிகளாக இருப்பதால் நமக்குக் கிடைப்பது.

$$\rho\{(A + C)B\} = \rho(B)$$

அதாவது, $\rho(B) = \rho(AB + CB)$

$$\leq P(AB) + P(CB) \qquad \text{--------} \qquad (5)$$

மேலும் $\rho(CB) \leq \rho(C) = n - \rho(A)$ -------- (6)

சமன்பாடுகள் 5 மற்றும் 6 – லிருந்து

$$\rho(B) \leq \rho(AB) + n - \rho(A)$$

$$\rho(AB) \geq \rho(A) + \rho(B) - n$$

அதாவது,

$'A'$ மற்றும் $'B'$ என்பன இரண்டு n- வரிசை சதுர அணிகள் எனில்,

$$\rho(A) + \rho(B) - n \leq \rho(AB) \leq \min\,[\rho(A), \rho(B)]$$

அல்லது,

$$n - V(A) + n - V(B) - n \leq n - V(AB)$$

$$\leq \min\,[n - V(A), n - V(B)]$$

($\because$சமன்பாடு 1 − லிருந்து

$$=> \quad V(A) + V(B) \geq V(AB) \geq \max\,\{V(A), V(B)\}$$

இவ்வாறாக சில்வெஸ்டார்ஸ் தேற்றம் நிரூபிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்:

1. கொ டுத்துள்ள அணியின் சிறப்பியல்பு மூலகங்களையும், சிறப்பியல்பு வெக்டார்களையும் காண்க:

$$(a) \qquad A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (b)\, A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(a) \qquad A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

A -யின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடானது.

$$|A - \lambda I| = 0$$

அதாவது, $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$=> \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$=> (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$$

$$=> \lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = 6$$

இவை A -யின் சிறப்பியல்பு மூலகங்கள்.

சிறப்பியல்பு வெக்டாரானது,

$(A - \lambda I)X = 0$ எனும் சமன்பாட்டினை பயன்படுத்திக் காணலாம். எனவே

A-யின் X_1 – எனும் சிறப்பியல்பு வெக்டாரானது,

$\lambda = 1$ - எனும் சிறப்பியல்பு மூலகத்துடன் தொடர்புடையது.

அதனால்,

$$(A - 1I)(X_1) = 0$$

$$=> \left\{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right\} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$=> \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

இந்த அணியின் குணகத்தின் தரமானது $'1'$ ஆகும். எனவே இச் சமன்பாடு $(2 - 1 = 1)$ ஒருபடிச் சாராத தீர்வைத்தான் கொண்டிருக்கும்.

அதாவது,

$$4x_1 + 4x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -x_2$$

$x_1 = 1$ எனக் கருதினால்,

$x_2 = -1$ எனவே, A - யின் சிறப்பியல்பு வெக்டாரானது 1 எனும் சிறப்பியல்பு மதிப்புடன் தொடர்புடையது.

அதாவது, $x_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$

$\lambda_2 = 6$ எனும் சிறப்பியல்பு மூலகத்திற்கு, தீர்வானது,

$$(A - 6I)X_2 = 0$$

அதாவது, $\left\{ \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-6 & 4 \\ 1 & 2-6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$-x_1 + 4x_2 = 0$$

$$x_1 - 4x_2 = 0$$

$$x_1 = 4x_2$$

அதாவது,

$x_1 = 1$ ஆக இருந்தால்

$x_2 = 4$

$\therefore \quad x_2 = \begin{vmatrix}4\\1\end{vmatrix}$ என்பது $\lambda = 6$ எனும் சிறப்பியல்பு மூலகத்தின் சிறப்பியல்பு வெக்டாராகும்.

2. கீழ் க்காணும் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலகம் மற்றும் சிறப்பியல்பு வெக்டார்களைக் காண்க.

$$A = \begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 5\end{vmatrix}$$

A யின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடானது,

$$(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 4\\0 & 2-\lambda & 0\\0 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$=> \quad (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0$$

$$=> \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$$

இவையனைத்தும் A யின் சிறப்பியல்பு மூலகங்கள். சிறப்பியல்பு வெக்டார்களை அறிய, மூலகங்களை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

1) $\lambda_1 = 2$ எனில்,

சிறப்பியல்பு வெக்டார்

X_1 ஆனது $(A - 2I)X_1 = 0$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\0 & 0 & 6\\0 & 0 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$$

இந்த அணியின் தரம் '2' ஆகும். எனவே இந்த சமன்பாடு ஒரே ஒரு ஒருபடிச் சாராத தீர்வைக் கொண்டுள்ளது.

எனவே,

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \qquad \text{---------} \qquad (1)$$

$$6x_2 = 0 \qquad \text{---------} \qquad (2)$$

$$3x_3 = 0 \qquad \text{-----------} \qquad (3)$$

$$(2)\&(3) \;=>\; x_3 = 0;$$

$$(1) => \; x_1 + x_2 = 0$$

$x_1 = 1$ எனில் $x_2 = -1$ மற்றும் $x_3 = 0$

$\therefore\; x_1 = C_1 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}; C_1$ என்பது ஒரு திசையிலி.

2) $\lambda_2 = 3$ எனில்,

சிறப்பியல்பு வெக்டார் X_2 – ஆனது

$$(A - 3\mathrm{I})X_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

எனவே,

$$x_2 + 4x_3 = 0$$

$$-x_2 + 6x_3 = 0$$

$$2x_3 = 0$$

$=> x_3 = 0$ மற்றும் $x_2 = 0$

எனவே x_1 -ஐ தன்னிச்சையாகக் கருதலாம்.

அதாவது $x_1 = 1$

எனவே,

$$x_2 = C_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} => C_2 \text{ ஒரு திசையிலி.}$$

3) $\lambda_3 = 5$ எனில்,

சிறப்பியல்பு வெக்டார் X_3 – ஆனது

$$(A - 5I)X_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$-2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

$$-3x_2 + 6x_3 = 0$$

$$=> \quad x_2 = 2x_3 = {}^2/_3\, x_1$$

அதாவது, $2x_1 = 3x_2 = 6x_3$

$x_3 = 1$ எனில், $x_2 = 2, x_1 = 3$ எனவே

$$X_3, = C_3 \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} =>, \; C_3 \text{ ஒரு திசையிலி.}$$

❖ ❖ ❖

அத்தியாயம் 2

b. டென்சார் பகுப்பாய்வியல் (Tensor Analysis)

2.9. முன்னுரை

அளவுகளைக் குறிப்பிடுவதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் **ஆய அச்சு** அமைப்பில்லாத, மாறாத தொடர்புகள் அல்லது விதிகள் பற்றிய கணிதப்பிரிவு, திசையிலிகளின் விரிவாக்கமாகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட, டென்சார்கள், பல்வேறு பயன்களுக்கு இன்றியமையாதவை. ஒவ்வொரு வெக்டாரும் ஒரு டென்சார். ஆனால் டென்சார்கள் மிகப் பொதுவானவை. அவற்றை வடிவியல் பொருட்களாகக் காண இயலாது. டென்சார், காணாப் பொருளாகக் கொள்ளப்பட்டு, **ஆய அச்சு உருமாற்றத்தால்,** குறிப்பிட்ட வகை மாற்றத்துக்குள்ளாகும் உறுப்புகளின் கணம் என விளக்கப்படலாம். ஆல்பர்ட் ஐன்ஸ்டீனுக்கு முன்னரே, டென்சார்கள் ஆய்ந்தறியப் பட்டிருந்தாலும், அவருடைய சார்பியல் கோட்பாட்டின் வெற்றி, கணிதவியலாளர்களுக்கும், இயற்பியலாளர்களுக்கும் விரிவாக ஆராய வழி வகுத்தது.

இரு வேறுபட்ட ஆயக்கூறுகளின் தொகுதிகளில் உள்ள டென்சார்களின் உறுப்புகள், சிறப்பியல்பு மாற்றல் விதிகளுடன் தொடர்புடையவை. தேக்காட்டின் கூறுகள் (Cartesian Co-ordinates), ஒருபடிச் செங்குத்து மாற்றங்கள் மூலம் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையவை. இதை, நாம் **தேக்காட்டின் டென்சார்கள்** எனலாம்.

குறியீடுகள்:

டென்சார் பகுப்பாய்வியலில், குறியீடுகளின் தொகுப்புகள் (கீழ்குறியீடு மற்றும் மேற்குறியீடுகள்) பயன்படுகின்றன.

இங்கு மேற்குறியீடு அல்லது எதிர் மாறிக் குறியீடுகள் (Contra Variant), டென்சாரின் எதிர் மாறி உறுப்புகளைக் குறிக்கப் பயன்படுகின்றது. அதாவது $A^{\mu V}$

இதேபோல், கீழ்க்குறியீடுகள் - இணை மாறிக் குறியீடுகள் (Co-Variant) டென்சாரின் இணைமாறி உறுப்புகளைக் குறிக்கப் பயன்படுகிறது. அதாவது $A_{\mu V}$. கலப்பு டென்சாரின் உறுப்புகளானது, கீழ் மற்றும் மேல் குறியீடுகளால் குறிக்கப்படுகிறது. அதாவது A_{mn}^{ij}.

2.10 டென்சாரின் தரம் மற்றும் உறுப்புகளின் எண்:

(Rank & number of components of a Tensor)

ஒரு டென்சாரின் தரமானது, அந்த டென்சாரைக் குறிக்கப் பயன்படும் குறியீடுகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக,

1. ‘ A’ எனும் டென்சாரின் தரம் சுழியமாகும் (திசையிலி).
2. B^{μ} - இந்த எதிர்மாறி டென்சாரின் தரம் ஒன்றாகும் (வெக்டார்).
3. C_V - இந்த இணை மாறி டென்சாரின் தரம் ஒன்றாகும் (வெக்டார்).
4. $D_{\mu V}$ - இது ஒரு இணை மாறி டென்சார். இதன் தரம் இரண்டாகும்.
5. $E^{\mu V}$ - இது ஒரு எதிர்மாறி டென்சார் இதன் தரம் இரண்டாகும்.
6. T_{jkl}^{ij} - இது ஒரு கலப்பு டென்சார் இதன் தரம் மூன்றாகும்.

எனவே, ஒரு n –அளவைவெளியில், 'r' தரம் உள்ள டென்சாரின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n^r ஆகும்.

2.11 n- அளவை வெளி (n- dimensional space)

மூவளவை வெளியில், ஒரு புள்ளியை, மூன்று ஆயக் கூறுகளால் அதாவது (x,y,z) எனும் செவ்வகக் கூறுகளால் குறிக்கலாம். இதைப்போல், ஒரு புள்ளியானது 'n' எண்ணுள்ள ஒரு மெய்யான மாறிகளின் கணத்தால் $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n)$ அல்லது $(x^1, x^2, x^3 \ldots\ldots . x^n)$ எனக் குறிக்கப்பட்டால், அந்தப்புள்ளிகள் அனைத்தையும் n அளவை வெளியை உருவாக்கும் புள்ளிகள் எனக் கூறலாம் இந்த 'n' அளவை வெளியானது, S_n எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

n – அளவை வெளியில் ஒரு வளைவரை (V_n) ஆனது $x^\mu = x^\mu(u)$ எனும் சமன்பாட்டினை நிறைவுப்படுத்தும் புள்ளிகளின் தொகுப்பாகும். இங்கு $\mu = (1,2,3, \ldots\ldots\ldots . n)$

$u -$ என்பது, ஒரு துணையாரும்.

மற்றும் $x^\mu(u)$ - என்பது u- ன் n - சார்புகள்.

ஒரு உள்வெளி, அதாவது $V_m \ (m < n)$ என்பது

$x^\mu = x^\mu(u^1, u^2, \ldots\ldots u^n)$ எனும் $n -$ சமன்பாடுகளை நிறைவுப்படுத்தும் புள்ளிகளின் தொகுப்பாகும். இங்கு $\mu = (1,2,3, \ldots\ldots . n)$

$u^1, u^2, u^3, \ldots\ldots u^m \rightarrow$ இதுவை $'m'$ துணையலகுகள்

மற்றும்

$x^\mu(u^1, u^2, u^3, \ldots\ldots u^m)$ என்றும் $u^1, u^2, \ldots\ldots u^m$- ன் $'m'$ சார்புகள்.

2.12 ஒருபடி வெளியில் ஆயக் கூறுகளின் உருமாற்றம்:

(Transformation Co- ordinates in linear space)

$x^1, x^2, x^3, \dots\dots\dots x^n = (x^i)$ எனும், ஒரு ஒழுங்கான, ஒன்றுக்கொன்று சாராத, மெய்யான மாறிகளின் கணம் ஒன்றைக் கருதுவோம். இவை ஒரு **புள்ளியின் ஆயக் கூறுகள்** என அழைக்கப்படுகிறது. x^i எனும் மதிப்புகளின் கணங்களுடன் தொடர்புடைய இத்தகு புள்ளிகளின் தொகுப்பானது, $n-$ அளவை ஒரு படி வெளி உருவாக்குகிறது. அதை நாம் V_n எனக் குறிப்பிடலாம்.

$'n'$ - சமன்பாடுகளின் கணமாகிய

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x^1, x^2, x^3, \dots\dots\dots x^n)(i = 1,2, \dots\dots n) \text{ ------ } \quad (1)$$

இவை ஒரு புதிய ஆயக் கூறுகளின் தொகுப்பை வரையறுப்பதுடன், $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \dots\dots \bar{x}^n$ எனும் ஒன்றுக்கொன்று சாராத மாறிலிகளால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. φ^i என்பது ஒரு ஒருமை மதிப்புடைய, ஆயக்கூறுகளின் மெய்யான சார்புகள் எனவும், ஒரு தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக் கெழுக்களைக் கொண்டுள்ளது எனவும் கருதப்படுகிறது.

சமன்பாடு (1) –ஐ x^j -க்கு இணையாக, வகைக்கெழு கண்டால், கீழ்க்கண்ட தொடர்பை, நாம் பெறலாம். இத்தொடர்பானது, ஒரு உண்மையான ஆயக்கூறுகளின் தொகுதியான x^j-ன் கழிநுண் (Infinitesmal) இடப் பெயர்ச்சிக்காக ஒரு புதிய ஆயக்கூறுகளின் தொகுதியாக $\bar{x}^j$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

அதாவது,

$$d\bar{x}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j \qquad --- \qquad 1\,(a)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^j} dx^j$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j \qquad --- \qquad 2$$

2.13 எண்கள் மற்றும் கூட்டுத்தொகைக் காணலின் மரபுகள்:

(Indicial and summation Conventions)

கீழ்க்காணும் இருமரபுகள் செயல்முறையில் உள்ளன.

அவையாவன:

a) எண்களின் மரபு: (Indicial Conventions)

கீழ்க்குறியீடு அல்லது மேல் குறியீடுகளைக் குறிக்கப் பயன்படும் எந்த ஒரு எண்ணும் அதற்கு எதிராக எதுவும் குறிப்பிடப்படும் வரையில், 1 முதல் n – வரையிலான மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்கிறது. எனவே, சமன்பாடு (1) – ஐ நாம்,

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x^\alpha) \qquad ---- \qquad (3)$$

என எழுதலாம்.

அதாவது,

$i = 1,2, \ldots\ldots n$ வரையிலான, n - சமன்பாடுகள் இங்கு உள்ளன என்பதை வெளிப்படுத்துகிறது. மேலும் φ^i என்பது,

x^{α}-எனும் ஆயக்கூறுகளின் சார்புகளாகும். இங்கு $\alpha = 1,2,3 \ldots\ldots n$.

p) ஐன்ஸ்டீனின் கூட்டல் மரபுகள்: (Einstein's Summation Convention)

எந்த ஒரு தொடரிலும், இரு முறை தோன்றும் ஒரு எண்ணானது கூட்டுத் தொகைக்கு உள்ளாகும். எனவே அந்தக் கூட்டுத்தொகையானது, அந்த எண்ணிற்குத் தொடர்பாக, 1, 2, 3, --- n வரை குறிப்பிடப்படும். இக்கூட்டல் மரபானது ஐன்ஸ்டீனால் உருவாக்கப்பட்டது.

எனவே ஐன்ஸ்டீனின் கூட்டல் மரபுகளின்படி,

$\sum_{\mu=1}^{n} a_r x^{\mu}$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பதிலாக, நாம் $a_{\mu} x^{\mu}$ என எழுதலாம்.

எனவே, மேற்கூறப்பட்ட இவ்விரு மரபுகளின்படி,

சமன்பாடு 1(a) –ஐ நாம்,

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j \qquad \text{--------} \qquad (4)$$

என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளை, கூட்டல் மரபுகளைப் பயன்படுத்தி எழுதுக:

(1) $$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} dx^n$$

$$=> d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} dx^j$$

(2) $$\frac{d\bar{x}^k}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^1} . \frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^2} . \frac{dx^2}{dt} + \cdots \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n} . \frac{dx^n}{dt}$$

$$=> \frac{d\bar{x}^k}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}$$

(3) $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots (x^n)^2$

$$=> (x^j)^2 => x^j, x^j$$

$$=> x^{2j}$$

(4) $ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$

$$=> g_{jj}dx^j dx^j$$

$$=> g_{jj}(dx^j)^2, \qquad N = 3; \qquad j = 1,2,3$$

(5) $$\sum_{P=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\, dx^p dx^q => g_{pq}\, dx^p dx^q; \quad N = 3$$

2.14 நேர்மாறி டென்சார், எதிர்மாறி டென்சார் மற்றும் கலப்பு டென்சார்:

(Covariant, Contra variant and Mixed Tensors)

(x_1, x_2, x_3, x_4) எனும் ஒரு ஆயக்கூறுகளின் தொகுதியை, (x_1', x_2', x_3', x_4') எனும் மற்றொரு ஆயக்கூறுகளின் தொகுதிக்கு உருமாற்றம் செய்வதை, நாம் கருதினால், அவைகளின் வகைக் கெழுக்கள் (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)- ஆனது, கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றங்கள் செய்யப்படுகின்றன.

அதாவது,

$$dx_1' = \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_4}dx_4 \ldots\ldots etc.$$

அல்லது சுருக்கமாக

$$dx'_\mu = \sum_{\propto=1}^{4} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\propto} dx_\propto ; \quad \mu = 1,2,3,4$$

இந்த விதியைப் பொறுத்து உருமாற்றம் செய்யப்படும் எந்த நான்கு கணியங்களும், **"எதிர்மாறி வெக்டார்"** என அழைக்கப்படுகின்றன.

எனவே A^1, A^2, A^3, A^4 எனும் இந்த ஆயக்கூறுகளின் தொகுப்பு, A'^1, A'^2, A'^3, A'^4 எனும் புதிய ஆயக்கூறுகளின் தொகுப்புக்கு உருமாறும்போது,

$$A'^\mu = \sum_{\propto=1}^{4} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\propto} A^\propto \qquad ---- \qquad (1)$$

இங்கு A^1, A^2, A^3, A^4 என்பது சுருக்கமாக A^μ எனக் குறிக்கலாம். இது ஒரு எதிர்மாறி வெக்டாராகும். எனவே, மேற்குறியீடுகளானது, எதிர்மாறி வெக்டார்களைக் குறிக்கப் பயன்படுகிறது.

$'\varphi'$ எனும் ஒரு செயலியை நாம் கருதுவோம். இது ஒரு மாறாத சார்பு. அதாவது, ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், ஆயக்கூறுகளின் தொகுதிகளைச் சாராமல், ஒரு நிலையான மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும்.

எனவே,

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_4}$ எனும் இந்த நான்கு உருமாற்றங்கள் செய்யப்பட்டால்

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_1} = \frac{\partial x_1}{\partial x''_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial x_4}{\partial x''_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \ldots\ldots \text{etc}$$

சுருக்கமாக,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_\mu} = \sum_{\propto=1}^{4} \frac{\partial x_\propto}{\partial x'_\mu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \; (\mu = 1,2,3,4)$$

இந்த விதியைப் பொறுத்து உருமாற்றம் செய்யப்படும் எந்த நான்கு கணியங்களும் **இணைமாறி வெக்டார்** என அழைக்கப்படுகின்றன.

எனவே,

A_μ என்பது ஒரு இணைமாறி வெக்டார் எனில் இதன் உருமாற்ற விதியின்படி,

$$A'_\mu = \sum_{\propto=1}^{4} \frac{\partial x_\propto}{\partial x'_\mu} A_\propto \qquad ----- \qquad (2)$$

இங்கு கீழ்க்குறியீடு இணைமாறியைக் குறிக்கின்றது. எனவே, சமன்பாடுகள் (1)-ம் (2) –ம் வெக்டார்களின் உருமாற்ற விதிகளைக் குறிப்பிடுகின்றன.

16 – உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணியத்தை நாம் $A_{\mu v}$ எனக் குறிப்பிட்டால், (μ மற்றும் V-க்கு 1,2,3,4, எனும் மதிப்புகளை அளிக்கும்போது), பொதுவாக, இங்கு கணியங்கள் அனைத்தும் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

1). எதிர்மாறி டென்சார்கள்:. (Contra variant)

$$A'^{\mu v} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\propto} \frac{\partial x'_V}{\partial x_\beta} A^{\propto\beta} \qquad ----- \qquad (3)$$

2). இணைமாறி டென்சார்கள்: (Co variant)

$$A'_{\mu v} = \frac{\partial x_\propto}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_V} A^{\propto\beta} \qquad ----- \qquad (4)$$

3) கலப்பு டென்சார்கள்: (Mixed)

$$A'_{\mu v} = \frac{\partial x_\propto}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_v}{\partial x'_\beta} A^{\beta}_{\propto} \qquad ----- \qquad (5)$$

மேலே குறிப்பிட்டுள்ள அனைத்தும், தரம் இரண்டைப் (Rank 2) பெற்றுள்ள டென்சார்களாகும்.

இதேபோல்,

$'A_{\mu\nu\sigma}'$ என்பது 64 உறுப்புகளையும், $'A_{\mu\nu\sigma\tau}'$ என்பது 256 உறுப்புகளையும் கொண்டுள்ளது. எனவே, தரம் அதிகம் உள்ள டென்சார்களை நாம்,

$$A'^{\tau}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial x_{\propto}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x^{1}_{\tau}}{\partial x_{\delta}} A^{\delta}_{\propto\beta\gamma} \qquad ---- \qquad (6)$$

இங்கு, “வெக்டார் என்பது முதல் தரமுள்ள டென்சாராகும். இதே போல், திசையிலி அல்லது **‘மாறிலி’** என்பது சுழிய தரமுள்ள டென்சாராகும்.

2.15 டென்சாரின் தரம்:

ஒரு டென்சாரின் தரமானது, அதன் பின் வரும் குறியீடுகளின் எண்ணிக்கைகளைப் பொறுத்து வரையறுக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக,

$A^{\mu\nu\sigma}_{\lambda}$- என்பது ஒரு கலப்பு டென்சார். இதன் தரம் நான்காகும்.

(எதிர் மாறிலி 3: இணைமாறிலி -1) இதனை, கீழ்க்கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்பின் மூலம் விளக்குவோம்.

அதாவது,

$$A^{\mu\nu\sigma}_{\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\propto}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'_{\lambda}} A'^{\propto\beta\gamma}_{\delta}$$

ஒரு டென்சாரின் தரம், அதன் அளவைகளின் எண்ணிக்கையின் அடுக்காக, உயர்த்தப்படும்போது, டென்சாரின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அளிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, டென்சாரின் தரம், n – அளவை வெளியில், r எனில், அங்கு (n^r) உறுப்புகள் உள்ளன எனக் கூறலாம். அதாவது ஒரு டென்சாரின் தரமானது, இயல்கணியத்தில், ஒரு தொகுதியிலிருந்து மற்றொரு தொகுதிக்கு உருமாற்றம் செய்யப்படும்போது, ஏற்படும் மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைத் தருகின்றது எனலாம். எனவே, ஒரு கணியமானது, எந்த வித மாற்றமும் இல்லாமல் இருந்தால், அதை சுழியத் தரமுள்ள டென்சார் எனலாம். இதை திசையிலி அல்லது மாறிலி எனவும் கூறலாம்.

2.16 சமச்சீர் மற்றும் சமச்சீரின்மை டென்சார்கள்:

(Symmetric (or) Anti (Skew) Symmetric Tensors)

சமச்சீர் டென்சார்: (Symmetric Tensor)

ஒரு டென்சாரின் இரு எதிர் மாறிலிகள் அல்லது இணைமாறிலிகளை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றுகின்ற போது, அதன் மதிப்பு மாறாமல் டென்சாரை, நாம் **சமச்சீர் டென்சார்** எனக் கருதலாம்.

அதாவது,

$A^{\mu v}$ மற்றும் $A^{v\mu}$ என்பன ஒரு ஆயக்கூறுகளின் தொகுப்பின் இரு எதிர்மாறி டென்சார்கள் எனில், அவற்றின் சமச்சீரானது,

$A'^{\mu v} = A^{1 v\mu}$ என்றிருந்தாலும், அந்தத் தொகுப்பில் தொடர்ந்து செயல்படுகின்றது. இதை நிரூபிக்க நாம்,

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_x} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} A^{\propto\beta}$$

$= \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\propto} A^{\beta\propto}$ (மாற்றம் செய்யப்படும் போது)

$$A'^{\nu\mu} \ (\because A^{\propto\beta} = A^{\beta\propto})$$

இது "சமச்சீர்" உள்ளதை நிருபிக்கின்றது.

இதேபோல், இரு இணைமாறிலி டென்சார்கள் $A_{\mu\nu}$ மற்றும் $A_{\nu\mu}$ க்களை கருதுவோம். ஒரு தொகுப்பில் $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ எனில் இவை சமச்சீர் டென்சார்கள் ஆகும்.

மற்றுமொரு தொகுப்பில், $A'_{\mu\nu}$ மற்றும் $A'_{\nu\mu}$ என மாறி இருந்தால்,

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\propto}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\propto\beta}$$

$$= \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\propto}{\partial x'_\mu} A_{\beta\propto} \quad \text{(மாற்றம் செய்யப்படும் போது)}$$

$A'_{\nu\mu} (\because A_{\propto\beta} = A_{\beta\propto})$.

சிலதருணங்களில், ஒரு குறியீடு எதிர்மாறிலியாகவும், மற்றுமொரு குறியீடு இணைமாறிலியாகவும் இருந்தால், 'சமச்சீர்' டென்சார்களை எளிதில் வரையறுக்க இயலாது.

$A^{\mu\nu}$ ஒரு சமச்சீராக இருந்தால்,

$A^{11} = A^{11}; A^{22} = A^{22}$ ..... மற்றும் பல. அதாவது இங்கு $4C_2 + 4 = 5C_2$ உறுப்புகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு திடப்பொருளில் $'B_\mu'$ எனும் கோண உந்தத்தின் உறுப்புகளானது. $'A_\propto'$ எனும் கோணத்திசைவேகத்தின் உறுப்புகளோடு கீழ்க்கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்புகளால், இணைக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$$B_\mu = \sum_{\propto=1}^{3} T_{\mu\propto} A_\propto$$

இங்கு $T_{\mu\propto}$ → நிலைத்தன்மை டென்சார். இந்த டென்சார் ஒரு சமச்சீரான டென்சாராகும்: ஏனெனில்,

$$T_{\mu\propto} = T_{\propto\mu} \quad \text{------} \qquad (1)$$

ஒரு டென்சாரை நாம் ஒரு அணியாகவும் வெளிப்படுத்தலாம். இந்த அணியில், அதன் நிரை, நிரல்களை மாற்றம் செய்யும்போது கிடைக்கும் டென்சாரானது ஒரு இணை டென்சார் எனப்படுகிறது. எனவே, டென்சாரின் இணையானது,

$$\varphi_C = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{zy} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{bmatrix}$$

டென்சார் φ_C ஆனது, டென்சார் φ -யின் இணை டென்சாராக வேண்டுமெனில்,

$$a_{xy} = a_{yx}\ ;\ a_{xz} = a_{zx}\ ;\ a_{yz} = a_{zy}$$

ஒரு டென்சாரானது, மேற்குறிப்பிடப்பட்டுள்ள இந்த நிபந்தனைக்கு, கட்டுப்பட்டால், அதை நாம் ஒரு சமச்சீர் டென்சார் எனலாம். அதாவது ஒரு டென்சார், சமச்சீர் டென்சாராக இருக்க வேண்டுமெனில், சமன்பாடு (1) –ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனை மிக இன்றிமையாதது. இந்த டென்சார் மூவளவை வெளியில் ஆறு சாராத மூலகங்களைக் கொண்டிருக்கும்:

இதையே நாம் கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம் அதாவது,

$$\varphi \ \text{சமச்சீர்} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix}$$

சமச்சீர் டென்சார்களின் சில எடுத்துக்காட்டுகள் கீழ்க்கண்டவாறு:

$$A_{\mu\propto\beta} = A_{\propto\mu\beta}$$

இங்கு டென்சாரானது, முதல் இரண்டு எண்களினால் சமச்சீராக உள்ளது.

மேலும்,

$$A_{\mu\propto\beta\gamma} = A_{\mu\beta\propto\gamma} = A_{\propto\mu\beta\gamma} = A_{\beta\propto\mu\gamma} = A_{\propto\beta\mu\gamma} = A_{\beta\mu\propto\gamma}$$

இங்கு டென்சாரானது, முதல் மூன்று எண்களினால் சமச்சீராக உள்ளது.

2.17 சமச்சீரின்மை டென்சார்கள்:

(Anti (or) Skew Symmetric Tensors)

ஒரு டென்சாரின் இரு எதிர் மாறிலிகள் அல்லது இணை மாறிலிகளை நாம் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றுகின்றபோது, டென்சாரின் உறுப்புகளானது, அதன் எண்மதிப்பு (Magnitude) களில் மாறாமல், அடையாளக் குறியீடுகளில் (Sign) மட்டும் மாற்றம் அடைந்தால், அந்த டென்சாரை நாம், சமச்சீரின்மை டென்சார் எனலாம்.

எனவே,

$$A^{\mu v} = -A^{v\mu} \text{ எனில்}$$

$$A'^{rv} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\propto} \frac{\partial x'_v}{\partial x_\beta} A^{\propto\beta}$$

$$= \frac{\partial x'_v}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\propto} A^{\beta\propto}$$

$$= -A'^{v\mu} \quad (\because A^{\propto\beta} = -A^{\beta\propto})$$

இதேபோல்,

$$A_{\mu v} = -A_{v\mu} \text{ எனில்}$$

$$A'_{\mu v} = A'_{v\mu}$$

இங்கு,

$$A^{12} = -A^{21} \ldots\ldots$$ மற்றும் பல

மேலும்

$$A^{11} = 0 = A^{22} = A^{33}$$

ஒரு சமச்சீரின்மை டென்சார்களின் உறுப்புகளானது,

$$A_{\mu v} + A_{v\mu} = 0$$ அல்லது

$$A_{\mu v} = -A_{v\mu} \qquad \text{-------} \qquad (3)$$

என்ற இந்த நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்படுகின்றன. அதாவது, மூலகங்கள் மாற்றப்படும்போது, டென்சாரானது அந்த அடையாளக் குறியீட்டை மாற்றிக் கொள்கிறது.

$\mu = v$ எனில், சமன்பாடு (3) –ஆனது,

$$A_{\mu\mu} + A_{\mu\mu} = 0$$

அல்லது $2A_{\mu\mu} = 0$

$$=> \quad A_{\mu\mu} = 0 \qquad \text{-------} \qquad (4)$$

எனவே, குணகங்கள் மூலமாக,

$$a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} = 0$$

மற்றும்,

$$a_{xy} = -a_{yx};$$

$$a_{xz} = -a_{zx}$$

$$a_{yz} = -a_{zy}$$

இவை, ஒரு டென்சார், சமச்சீரின்மை டென்சாராக இருப்பதற்கான நிபந்தனைகளாகும்.

எனவே φ-யானது ஒரு சமச்சீரின்மை டென்சார் எனில்,

$$\varphi_{(skew)} = \varphi_{(\text{சமச்சீரின்மை})} = \begin{bmatrix} 0 & a_{xy} & a_{xz} \\ -a_{xy} & 0 & a_{yz} \\ -a_{xz} & -a_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

இந்த அணியில் மூன்று உறுப்புகள் மட்டுமே உள்ளன. சமச்சீரின்மை டென்சார்களுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

(1) $A_{\mu\nu\sigma} = -A_{\nu\mu\sigma}$

மேலும்,

$$A_{\mu\nu\sigma\rho} = -A_{\nu\sigma\mu\rho} = A_{\sigma\mu\nu\rho} = -A_{\mu\sigma\nu\rho} = A_{\nu\mu\sigma\rho} = -A_{\sigma\nu\mu\rho}.$$

2.18 டென்சார்களின் சுருக்கம்:

(Contraction of Tensors)

ஒரு டென்சாரின் தரமானது, இரண்டாலோ அல்லது எந்த ஒரு இரட்டை எண்ணாலோ, குறைக்கப்பட்டால், அதற்குக் காரணமான இயற்கணித செயலானது **டென்சாரின் சுருக்கம்** எனப்படுகிறது. டென்சாரின் சுருக்கமானது, கொடுத்துள்ள இரட்டைகளில் சமமான மூலகங்கள் உள்ள உறுப்புகளை கூட்டலுக்கு உட்படுத்தும் போது பாதிக்கப்படுகிறது. எந்த இரு மூலகங்களும், ஒன்றுக்கும் பயன்படாத இரட்டை மூலங்களாக மாற்றப்படுகின்றன.

தரம் 3- ஐக் கொண்டுள்ள ஒரு டென்சாரை நாம் கருதுவோம். இதில் ஒரு எதிர்மாறிலி மூலகமும், (α) இரு இணைமாறிலி மூலகங்கள் (β, ν) உள்ளது எனக் கொள்வோம்.

எனவே,

$$A'^{\lambda}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta,\mu=0}^{3} A^{\alpha}_{\beta\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\alpha}$$

V-ஐ, $\lambda -$ ஆல் மாற்றும்போது,

$$A'^{\lambda}_{\mu v} = \sum_{\alpha,\beta,v=0}^{3} A^{\alpha}_{\beta v} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_v}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\alpha}$$

$$= \sum_{\propto,\beta,r=0}^{3} A^{\propto}_{\beta v} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_v}{\partial x_\propto}$$

ஆனால்,

$$\frac{\partial x_v}{\partial x_\propto} = \begin{Bmatrix} 0 & v \neq \propto & \text{எனில்} \\ 1 & \gamma = \propto & \text{எனில்} \end{Bmatrix}$$

$v = \propto$ எனில்,

$\frac{\partial x_v}{\partial x_\propto} = 1$ எனும் இந்த இரண்டாவது நிபந்தனையை நாம் தேர்ந்தெடுத்தால், மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்புகளானது.

$$A'^{\lambda}_{\mu v} = \sum_{\propto,\beta,=0}^{3} A^{\propto}_{\beta \alpha} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}$$

அதாவது,

$$A'_\mu = \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} A_\beta$$

மேலே உள்ள சமன்பாடு, தரம் ஒன்றைக் கொண்டுள்ள டென்சார்களின் உருமாற்ற விதியைக் குறிக்கிறது. அதாவது ஒரு டென்சாரின் எதிர்மாறிலி மற்றும் நேர்மாறிலியை நாம் சமமாக்கும் போது, கிடைக்கும் டென்சாரின் தரமானது, கொடுத்துள்ள முதல் டென்சாரின் தரத்தை விட 2- ஆல் குறைக்கப்படுகிறது. இதனையே நாம் **டென்சாரின் சுருக்கம்** எனக் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, தரம் 2 –ஐக் கொண்டுள்ள ஒரு டென்சாரின் சுருக்கமானது ஒரு திசையிலியை அளிக்கிறது. அதாவது சுழியத் தரம் கொண்ட டென்சாராகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்:

(1) A_λ – எனும் டென்சார், ஒரு தரம் ஒன்றையுடைய இணைமாறிலி டென்சாராக இருந்தாலும் $\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\alpha}$ என்பது டென்சாராக இல்லை என்பதை நிருபணம் செய்க.

இணை மாறிலி விதிப்படி,

$A'_\alpha = \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\alpha} A_\lambda$ எனக் கருதுவோம்.

X'_β -ன் சார்பாக, மேற்காணும் டென்சாருக்கு வகைக் கெழு காண,

$$\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'_\beta} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x'_\alpha} + \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha x'_\beta} A_\lambda$$

$$= \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\alpha}\ \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_r}\ = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta} + \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha x'_\beta} A_\lambda$$

$$= \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\alpha}\ \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\beta x'_\alpha} A_\lambda$$

இங்கு, இரண்டாவதாக இருக்கும் சார்பானது,

$\frac{\partial a_\lambda}{\partial x_\mu}$, எனும் இந்த மூலகம், ஒரு டென்சாராக மாற்றம் அடையாது என நிருபணம் செய்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2

$xy, 2y - Z^2$ மற்றும் xz, என்பன, செவ்வக ஆயக்கூறுகளின் இணை மாறிலி டென்சார்களின் உறுப்புகள் எனில், அதன் கோளக ஆயக்கூறுகளின் இணை மாறிலி டென்சார்களின் உறுப்புகளைக் காண்க.

$x = x_1, y = x_2; Z = x_3$ எனக் கருதுவோம்.

A_λ -எனும் டென்சாரின் இணைமாறிலி உறுப்புகளானது,

$$A_1 = xy = x_1x_2$$

$$A_2 = 2y - z^2 = 2x_2 - x_3^2$$

$$A_3 = xz = x_1x_3$$

A'_μ- என்பது கோளக ஆயக்கூறுகளின் இணைமாறிலி உறுப்புகள் எனக் கருதினால்,

$$x'_1 = r;\ x'_2 = \theta;\ x'_3 = \varphi$$

மற்றும்

$$A'_\mu = \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\mu} A_\lambda \qquad \text{-------} \qquad (1)$$

உருமாற்ற சமன்பாடுகளானது,

$$x = r\sin\theta\ \cos\varphi;$$

$$y = r\sin\theta\ \sin\varphi\ ;$$

$$z = r\cos\theta$$

இங்கு நாம்,

$$x_1 = x'_1 Sin\ x'_2\ Cos\ \ x'_3$$

$$x_2 = x'_1\ Sin\ x'_2\ Sin\ x'_3$$

$$x_3 = x'_1\ Cos\ \ x'_2$$

என எழுதலாம். எனவே, சமன்பாடு (1) –லிருந்து,

$$A'_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} A_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} A_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} A_3$$

$$= (sin\, x'_2\ cos\, x'_3)x_1\, x_2 + sin\, x'_2\ sin\, x'_3\, (2x_2 - x_3^2) + \cos\ x'_2 x_1$$

$$= (sin\theta\ cos\varphi)(r^2 sin^2\theta\ sin\varphi\ cos\varphi)$$

$$+ sin\theta\ sin\varphi(2r\ sin\theta\ sin\varphi - r^2 cos^2\theta\ )$$

$$+ cos\theta\ (r^2 sin\theta\ cos\theta\ cos\varphi)$$

இதைப்போல்,

$$A'_2 = (r\ cos\theta\ cos\varphi)(r^2 sin^2\theta\ sin\varphi\ cos\varphi) + (rcos\theta\ sin\varphi\ )$$

$$(2r\ sin\theta\ sin\varphi - r^2 cos^2\theta\ ) + (-rsin\theta)\ (r^2 sin\theta\ cos\theta\ cos\varphi)$$

மற்றும்

$$A'_3 = (-r\ sin\theta\ sin\varphi)(r^2 sin^2\theta\ sin\varphi\ cos\varphi)$$

$$+ (r\ sin\theta\ cos\varphi)\ (2rsin\theta\ Sin\varphi - r^2 cos^2\theta)$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

$A_{\mu\nu}$ என்பது ஒரு சமச்சீரின்மை டென்சார் எனில்,

$(B_\nu^\mu\, B_\tau^\sigma + B_\tau^\mu\, B_\nu^\sigma)\quad A_{\mu\sigma} = 0$ என நிரூபணம் செய்க.

$A_{\mu\nu}$ என்பது ஒரு சமச்சீரின்மை டென்சார் எனில்,

$$A_{11} = A_{22} = \cdots 0;$$

$$A_{12} = \ -A_{21} \ldots \ldots, \qquad \text{-------} \qquad (1)$$

எனவே $B_\nu^\mu\, B_\tau^\sigma + B_\tau^\mu\, B_\nu^\sigma = 0$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

இங்கு, இடப்பக்க சமன்பாட்டை நாம் கருதினால்,

$$= B_\nu^\mu\, B_\tau^\sigma + B_\tau^\mu\, B_\nu^\sigma$$

$$= (B_\nu^\mu\, B_\tau^\sigma + B_\tau^\mu\, B_\nu^\sigma)\, A_{1\sigma} + (B_\nu^z\, B_\tau^\sigma + B_\tau^z\, B_\nu^\sigma) A_{2\sigma} + \cdots$$

$$= (B_\nu^1\, B_\tau^1 + B_\tau^1\, B_\nu^1)\, A_{11} + (B_\nu^2\, B_\tau^2 + B_\tau^2\, B_\nu^2) A_{22} + \cdots$$

$$+(B_\nu^1\, B_\tau^2 + B_\tau^1\, B_\nu^2)\, A_{12} + (B_\nu^2\, B_\tau^1 + B_\tau^2\, B_\nu^1) A_{21}$$

$$= \quad 0 + 0 + \cdots . + (B_v^1\, B_\tau^2 + B_\tau^1\, B_v^2)\,(A_{12} + A_{21}) + \cdots$$

$$= \quad (B_v^1\, B_\tau^2 + B_\tau^1\, B_v^2)\,(0)$$

$$= 0$$

எடுத்துக்காட்டு 4

ஒரு இணை மாறிலி அல்லது எதிர் மாறிலி மூலகங்களின் இரட்டையில் (Pair) ஒன்று சமச்சீராகவும், மற்றொன்று சமச்சீரின்மையாகவும் இருக்கும் பட்சத்தில், ஒவ்வொரு டென்சாரையும், இரு டென்சார்களின் கூட்டுத் தொகையாக வெளிப்படுத்த முடியும் என்பதை நிரூபணம் செய்க.

➔ இங்கு

$$A_{\mu v} = \frac{1}{2}\left[A_{\mu v} + A_{v\mu}\right] + \frac{1}{2}\left[A_{\mu v} - A_{v\mu}\right]$$

$$= B_{\mu v} + C_{\mu v}$$

இங்கு,

$$B_{\mu v} = \frac{1}{2}\left[A_{\mu v} + A_{v\mu}\right] = \frac{1}{2}\left[A_{v\mu} + A_{\mu v}\right]$$

$$= B_{v\mu}$$

இது ஒரு சமச்சீர் டென்சாராகும்

மேலும்

$$C_{\mu v} = \frac{1}{2}\left[A_{\mu v} - A_{v\mu}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[A_{v\mu} - A_{\mu v}\right]$$

$= -\,C_{\mu v} \rightarrow$ இது சமச்சீரின்மை டென்சாராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

$A^{\tau}_{\mu\sigma v}$ – என்பது ஒரு டென்சார் என நிரூபணம் செய்க.

$$A'^{\delta}_{\propto\beta\gamma} = \frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\tau} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\propto} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\gamma} A^{\tau}_{\mu\sigma\nu}$$

அதாவது,

உருமாற்ற விதியின்படி, $A^{\tau}_{\mu\sigma\nu}$ - என்பது ஒரு கலப்பு டென்சாராகும். இதன் தரம் 4 ஆகும். அதாவது எதிர்மாறிலி வரிசையில் 1: மற்றும் இணை மாறிலி வரிசையில் 3- ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

A^{λ} மற்றும் B_μ என்பன, தரம் 1 – ஐ உடைய, எதிர்மாறிலி மற்றும் நேர்மாறிலி டென்சார்களின் உறுப்புகள் எனில்,

$C^{\lambda}_{\mu} = A^{\lambda}\, B_\mu$ என நிரூபணம் செய்க. மேலும் இவை தரம் 2 –ஐ உடைய, கலப்பு டென்சார்களின் உறுப்புகள் எனவும் ஆராய்க.

$\rightarrow \quad A'_\lambda = A^{\propto} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\propto}$ மற்றும்

$$B'_\mu = B_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}$$

எனவே,

$$C'^{\lambda}_{\mu} = A'^{\lambda} B'_\mu = A^{\alpha} B_\beta \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\propto} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}$$

$$= A^{\alpha} B_\beta \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\propto} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}$$

அதாவது,

C'^{λ}_{μ} ஆனது தரம் 2- ஐ உடைய ஒரு கலப்பு டென்சாராக உருமாற்றம் அடைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 7

$A^{\nu\sigma\rho}_{\lambda\mu\nu}$ – எனும் இந்த டென்சாரின் சுருக்கமானது ஒரு கலப்பு டென்சார் என நிருபணம் செய்க.

$$\rightarrow \quad A'^{\delta\varepsilon\eta}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\tau}\frac{\partial x'_\epsilon}{\partial x_\sigma}\frac{\partial x'_\eta}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\gamma}A^{\tau\sigma\rho}_{\lambda\mu\nu}$$

இங்கு $\delta = \gamma$ எனக் குறித்து, கூட்டல் தொகையைக் கண்டால்,

$$A'^{\delta\varepsilon\eta}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial x'_\epsilon}{\partial x_\sigma}\frac{\partial x'_\eta}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\tau}A^{\tau\sigma\rho}_{\lambda\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial x'_\epsilon}{\partial x_\sigma}\frac{\partial x'_\eta}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta}\delta^\nu_\tau A^{\tau\sigma\rho}_{\lambda\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial x'_\epsilon}{\partial x_\sigma}\frac{\partial x'_\eta}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta}A^{\nu\sigma\rho}_{\lambda\mu\nu}$$

இதை நாம் உருமாற்ற விதியோடு ஒப்பிடும்போது,

$$A'^{\varepsilon\eta}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'_\epsilon}{\partial x_\sigma}\frac{\partial x'_\eta}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta}A^{\sigma\rho}_{\lambda\mu}$$

எனவே,

$A^{\nu\sigma\rho}_{\lambda\mu\nu}$ – என்பது தரம் 4 – ஐ உடைய ஒரு டென்சாராகும், எதிர்மாறிலியின் தரம் 2. நேர்மாறிலியின் தரம் 2.

❖ ❖ ❖

அத்தியாயம் 3

வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்

(Differential Equations)

3.1 அறிமுகம் (Introduction):

அறிவியல், பொறியியல் பற்றிய பல பகுதிகளில் வகைக்கெழுக்கள் இடம் பெறுகின்றன. வகைக்கெழுக்களால் மாற்றிகளின் மாறு வீதத்தினை அளக்க இயலும். ஆகவே மாறுவீதம் தொடர்பான பல விதிகளை எடுத்துரைக்க வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் பயன்படுகின்றன. இதில் குறிப்பாக, சாரா மாறிகள், சார்புள்ள மாறிகள் மற்றும் யாதாமொரு மாறிலிகள் (arbitrary constants) இவற்றுக்கு இடையேயான தொடர்பிலிருந்து, யாதாமொரு மாறிலிகளை நீக்க, வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

இயற்கை நிகழ்ச்சிகளை ஆராயும்போது, அந்நிகழ்ச்சிகளை விவரிக்கும் அளவுகளிடையே, நேரடியான தொடர்புகளையோ, விதிகளையோ காண்பது அரிது. ஆனால் அந்த அளவுகளின், காலத்தைச் சார்ந்த வகைக்கெழுக்களும், அளவுகளும் சேர்ந்து வரும் விதிகளைக் காணலாம். அளவுகள் வெக்டார்களாகவோ, வெற்றெண்களாகவோ இருக்க முடியும். கீழே சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

1) $\frac{dx}{dt} = -kr$ எனும் சமன்பாடு, கதிரியக்கத்தால் ஏற்படும் சிதைவைத் தருவதாகும். [k என்பது சிதைவுக் குணகம்; ‘x’ என்பது ‘t’ நேரத்தில் சிதையாதிருக்கும் பொருளின் செறிவு;

$\frac{dx}{dt}$ என்பது சிதையும் பொருளின் செறிவுடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ள அழிவு வீதம்].

2) $m\frac{d^2r}{dt^2}=F\left(t_1 r_1 \frac{dr}{dt}\right)$ என்பது 'm' எனும் செறிவுடைய பொருளின் மேல், F எனும் விசை செயல்பட நேரிடும் இயக்கத்தை விவரிப்பதாகும். இந்த இயக்கம், நேரம் t; நிலை வெக்டார் r; திசைவேகம் $\frac{dr}{dt}$ என்பவற்றின் சார்பலன், செறிவை முடுக்கத்தால் பெருக்க வருவது விசையளவு.

3) $m\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=4\pi\rho(x,y,z)$ என்பது பாய்சான் (Poisson's) சமன்பாடு எனப்படுகிறது. $\rho(x,y,z)$ எனும் செறிவுடைய, நிலை மின்களத்தின் (electrostatic field), நிலைப்பண்பு $u(x,y,z)$, இச்சமன்பாட்டிற்கிணங்க உள்ளது.

அளவுகளிடையே உள்ள தொடர்பைக் காண, மேலே உள்ளது போன்ற வகைக்கெழு சமன்பாடுகளிலிருந்து, சார்பலனைக் காணும் முறைகளைக் காண வேண்டும். வகைக்கெழு சமன்பாடுகளுக்கிணங்கும், சார்பலன்களைக் காணும் முறையே, **வகைக்கெழு சமன்பாட்டுக் கணிதம் (Theory of Differential equation)** எனப்படுகிறது.

3.2 வரையறை :

வகைக்கெழு சமன்பாடு :

ஒரு சமன்பாட்டில், வகைக்கெழுக்களோ அல்லது வகைக்கெழு குணகங்களோ இருப்பின், அது வகைக்கெழு சமன்பாடு என அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0 \qquad \text{---------- } 1$$

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}=k\frac{d^2y}{dx_2} \qquad \text{---------- } 2$$

$$xdy+ydx=0 \qquad \text{---------- } 3$$

$$x\frac{\partial u}{dx}+y\frac{\partial u}{\partial y}=nu \qquad \text{---------- } 4$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial^2u}{dx^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial 2^2}=0 \qquad \text{---------- } 5$$

வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் இரு வகைப்படும். அவை,

1. சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்,

   (Ordinary Differential Equation),

2. பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்.

   (Partial Differential Equations.

3.3 சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் :

ஒரு வகைக்கெழு சமன்பாட்டில், ஒரேயொரு சாராத (independent) மாறியைப் பொறுத்த வகைக்கெழுக்கள் மட்டும் காணப்படின், அது சாதாரண வகைக்கெழு என அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

சமன்பாடுகள் 1, 2 மற்றும் 3 ஆகியன சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாடுகளாகும்.

3.4 பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

ஒரு வகைக்கெழு சமன்பாட்டில், ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சாரா மாறிகளின் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் காணப்பட்டால் அச்சமன்பாடுகள், பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் என அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

சமன்பாடுகள் 4 மற்றும் 5 ஆகியன, பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் ஆகும்.

ஒரு வகைக்கெழு சமன்பாட்டில், அமைந்துள்ள வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே அச்சமன்பாட்டின் வரிசை (Order) என அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

சமன்பாடுகள் 1, 2 ஆகியவற்றின் வரிசை 2, சமன்பாடுகள் 3, 4 ஆகியவற்றின் வரிசை 1, சமன்பாடு 5 – ன் வரிசை 2.

நாம் இங்கு, அன்றாடம் நிகழும் முக்கிய அறிவியல் நிகழ்வுகளுக்கான பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் மற்றும் அதன் தீர்வுகள் பற்றி விரிவாகக் காணலாம்.

பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளும் தீர்வுகளும்
(Partial Differential Equations and solutions)

3.5 பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்
Partial Differential Equations

அறிமுகம்:

ஒன்றோ அல்லது ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பகுதி வகைக் கெழுக்களைக் கொண்ட சமன்பாட்டினை பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு என அழைக்கின்றோம். ஆகவே, இச்சமன்பாட்டில் குறைந்தபட்சம் இரு சார்பிலா மாறிகள் (Independent Variables) அமைந்திருக்கும்.

குறியீடுகள்:

இந்த அத்தியாயத்தில் பின்வரும் குறியீடுகளை (Notations) பயன்படுத்துவோம்.

$$p=\frac{\partial z}{\partial x};\ q=\frac{\partial z}{\partial y};\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$$s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

3.6 பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை உருவாக்குதல்:

பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளை இரு வழிகளில் உருவாக்கலாம். அவைகள் (1) x, y, z மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டில் உள்ள ஒரு மாறிலியை (Arbitrary Constants) நீக்குதல்

(2) x, y, z மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டில் உள்ள ஏதாவது ஒரு சார்பினை (Arbitary Function) நீக்குதல் ஆகும்.

3.7.மாறிலியை நீக்குதல் முறை

(Elimination of arbitrary Constants):

x, y என்ற சார்பிலா மாறியையும் z என்ற சார்புடைய மாறியையும் கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டை

$$F(x,y,z,a,b) = 0 \qquad \text{.............(1)}$$

என்றால் a, b மாறிகளாகும்.

(1) லிருந்து a,b யை நீக்க மேலும் இரு சமன்பாடுகள் தேவையாகும். ஆகவே x, y யைப் பொறுத்து பகுதி வகையீடு செய்ய

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \text{(i.e)}\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p=0 \qquad \text{.............(2)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad \text{(i.e)}\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{q}=0 \qquad \text{.............(3)}$$

என்ற இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

(2) மற்றும் (3) லிருந்து a, b யை நீக்க

$$\phi(x,y,z,p,q)=0 \qquad \text{.............(4)}$$

என்ற ஒரு வரிசைப் (order) பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு கிடைக்கும்.

உதாரணம்(1):

z = (x+a)(y+b) லிருந்து a, b யை நீக்குக

$$z = (x+a)\ (y+b) \qquad \text{.............(1)}$$

(1) யை x, y யைப் பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y+b) \Rightarrow p = y+b \qquad \text{.............(2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x+a) \Rightarrow q = x+a \qquad \text{.............(3)}$$

(2), (3) யை (1) -ல் பிரதியிட

z = pq என்ற பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு கிடைக்கும்.

உதாரணம் (2):

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = a^2 + b^2$ என்பதிலிருந்து a, b யை நீக்கி பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டை உருவாக்குக,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{.............(1)}$$

சமன்பாடு (1) யை x,y யைப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$2(x-a) + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow -zp = (x-a) \qquad \text{.............(2)}$$

$$2(y-b) + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow -zp = (y-b) \qquad \text{.............(3)}$$

சமன்பாடு (2), (3) களை (1)ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$$z^2p^2+z^2q^2+z^2 = (x+zp)^2+(y+zp)^2$$

$$= x^2+y^2+z2P^2+z2q^2+2z(xp+yq)$$

$z^2 = x^2+y^2 +2z(xp + yq)$ என்பது பகுதிவகைக் கெழு சமன்பாடாகும்.

உதாரணம் 3:

z –அச்சில் மையத்தைக் கொண்ட அனைத்து கோளங்களின் பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டினைக் காண்க.

z – அச்சில் மையத்தினையுடைய கோளத்தின் சமன்பாட்டினை

$x^2 + y^2 + (z-c)^2 = r^2$ ....(1)

எனக் கொள்வோம். இதில் C மற்றும் r என்பன மாறிலிகளாகும்.

சமன்பாடு (1) யை x –ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$2x + 2(z-c)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow (z-c) = \frac{-x}{p}$ ....(2)

சமன்பாடு (1) யை y –யைப் பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$2y + 2(z-c)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow (z-c) = \frac{-y}{p}$ ....(3)

சமன்பாடு (2) மற்றும் (3) லிருந்து நாம் பெறுவது,

xq = yp என்பது பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்.

3.8.சார்பினை நீக்குதல் முறை (Elimination of arbitary functions):

u,v என்பன x, y, z என்ற மாறிகளைக் சார்ந்த இரு சார்புகள் என்றும், u மற்றும் v சார்புகளுக்கு உள்ள உறவினை

$F(u,v) = 0$ ....(1)

எனக் காண்போம்,

சமன்பாடு (1) யை x – பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \quad ....(2)$$

சமன்பாடு (1) யை − y பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \quad \text{.............(3)}$$

என்றவாறு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

சமன்பாடு (2) லிருந்து

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}=\frac{-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\ P.\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)} \quad \text{.............(4)}$$

சமன்பாடு (3) லிருந்து

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}=\frac{-\left(\frac{\partial v}{\partial y}q\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)} \quad \text{.............(5)}$$

சமன்பாடு (4) மற்றும் (5) லிருந்து

$$\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)}=\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad \text{.............(6)}$$

சமன்பாடு (6) − னை

$$Pp+Qq=R \quad \text{.............(7)}$$

என எழுதலாம். இச்சமன்பாடு (7)ஆனது லக்ரான்சின் சமன்பாடு (Lagrange's equation) எனப்படும்.

இதில்,

$$P = \left(\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$Q = \left(\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$R = \left(\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$ ஆகும்.

உதாரணம் 1:

$\phi(x+y+z) = xyz$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு அமைக்கவும்.

$\phi(x+y+z) = xyz$ ....(1)

சமன்பாடு (1)யை x ஐப்பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$$\phi'(x+y+z)(1+\frac{\partial z}{\partial x}) = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}$$

$\Rightarrow \phi'(x+y+z)(1+p) = yz + xyp$ ....(2)

சமன்பாடு (1)யை y யைப் பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$$\phi'(x+y+z)(1+\frac{\partial z}{\partial y}) = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

$\Rightarrow \phi'(x+y+z)(1+q) = xz + xyq$ ....(3)

சமன்பாடு (2)லிருந்து,

$\phi'(x+y+z) = \dfrac{yz+xyp}{1+p}$ ....(4)

சமன்பாடு (3)லிருந்து,

$\phi'(x+y+z) = \dfrac{xz+xyq}{1+q}$ ....(5)

சமன்பாடு (4) மற்றும் (5) லிருந்து,

$$\frac{y(z+xp)}{(1+P)}=\frac{x(z+yp)}{(1+P)}$$

அதாவது x(z-y) + y(x-z)q = z(y-x) என்பது தேவையான பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

உதாரணம் 2:

$z=f(x^2+y^2)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டைக் காண்க.

$z= f(x^2+y^2)$ ....(1)

சமன்பாடு (1)யை x ப் பொறுத்து பகுதி வகையீடு செய்ய

$$\frac{\partial z}{\partial x}= f'(x^2+y^2)2x$$

$$\Rightarrow p = f'(x^2+y^2)2x$$

$$\Rightarrow f'(x^2+y^2) = \frac{p}{2y} \quad ....(2)$$

சமன்பாடு (2)யை y யைப் பொறுத்து பகுதி வகையீடு செய்ய

$$\frac{\partial z}{\partial x}= f'(x^2+y^2)2y$$

$$\Rightarrow q = f'(x^2+y^2)2y$$

$$\Rightarrow f'(x^2+y^2) = \frac{q}{2y} \quad ....(3)$$

சமன்பாடுகள் (2) மற்றும் (3) லிருந்து

$$\frac{p}{2x}=\frac{q}{2y}$$

அதாவது py =qx என்பது தேவையான பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்.

உதாரணம் 3

$z = f(x+ay) + \phi(x-ay)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து f மற்றும் ϕ யை நீக்கி பகுதி வகைக்கெழு. சமன்பாட்டைக் காண்க

$$z = f(x+ay) + \phi(x-ay) \qquad \text{.............}(1)$$

சமன்பாடு (1)யை x-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x+ay) + \phi'(x-ay)$$

$$\Rightarrow p = f'(x+ay) + \phi'(x-ay) \qquad \text{.............}(2)$$

சமன்பாடு (1)யை y-யைப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x+ay)a + \phi'(x-ay)(-a)$$

$$\Rightarrow q = af'(x+ay) + a\phi'(x-ay) \qquad \text{.............}(3)$$

சமன்பாடு (2)யை xப் பொறுத்து மீண்டும் பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x+ay)a + \phi''(x-ay)$$

$$\Rightarrow r = f''(x+ay) + \phi''(x-ay) \qquad \text{.............}(4)$$

சமன்பாடு (3)யை yப் பொறுத்து மீண்டும் பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(x+ay)a^2 + \phi''(x-ay)(a^2)$$

$$\Rightarrow t = a^2 f''(x+ay) + a^2\phi''(x-ay) \qquad \text{.............}(5)$$

சமன்பாடு (4) மற்றும் (5) லிருந்து

$t = a^2 r$ அல்லது $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ என்பது தேவையான பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்.

பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் பல்வேறு தீர்வுகள்:

(Different Integrals of partial differential equations)

3.9.முழுத்தீர்வுகளும் சிறப்புத்தீர்வுகளும்:

$F(x, y, z, a, b) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து முன்பே $\phi(x, y, z, p,q) = 0$ என்ற வடிவிலான பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டினைக் கண்டோம்.

இங்கு $F(x, y, z, a, b) = 0$ ....(1)

என்கிற சமன்பாடானது.

$\phi(x, y, z, p, q) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து வந்த சமன்பாடு (Derived Equation) எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு (1)னது (2)ன் முழுத்தீர்வு (Complete Integral) எனப்படும். இத்தீர்வில் சார்பற்ற மாறிகளது எண்ணிக்கையும், மாறிகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்கும்.

முழுத்தீர்வில் உள்ள a, b என்கிற மாறிகளும் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு கொடுப்பதின் மூலம் பெறப்படும் தீர்வானது சிறப்புத்தீர்வு (Particular Integral) எனப்படும்.

3.10. ஒருமைத் தீர்வுகளும் பொதுத்தீர்வுகளும்:

(Singular Integral and General Integral)

$\phi(x, y, z, p, q) = 0$ ....(1)

என்ற பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும் முழுத்தீர்வு

$F(x, y, z, a, b) = 0$ ....(2)

எனக்கொள்வோம்.

சமன்பாடு (2) –யை a, b யைப் பொறுத்து தனித்தனியாக பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \qquad \text{.............(3)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 0 \qquad \text{.............(4)}$$

என்கிற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

சமன்பாடு (2), (3), (4) a, b யை நீக்கிட கிடைக்கப் பெறும் தீர்வான ஒருமைத் தீர்வு (Singular Integral) எனப்படும்.

சமன்பாடு (2) –ல் a, b என்ற மாறிலிகளில் ஒன்று மற்றதன் சார்பு எனில் உதாரணமாக

b னது a சார்பு என்றால் (2) னது

$$F(x, y, z, a, f(a)) = 0 \qquad \text{.............(5)}$$

ஆகும், சமன்பாடு (2) யை a யைப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial a} f'(a) = 0 \qquad \text{.............(6)}$$

எனவாகும். சமன்பாடுகள் (5), (6) லிருந்து, a -யின்ன நீக்க கிடைக்கப் பெறும் சமன்பாட்டினை பொதுத்தீர்வு (General Integral) எனலாம்.

3.11. பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் சில நிரந்தர வகைகளும் தீர்க்கும் முறையும்:

வகை I:

இதன் பொது வடிவமானது $\phi(p, q) = 0$ என்று இருக்கும். இதில் p மற்றும் q மட்டுமே இருக்கும். இதனை பின்வருமாறு தீர்க்க வேண்டும்.

முழுத்தீர்வு:

$$\phi(p, q) = 0 \qquad \text{.............(1)}$$

என்ற சமன்பாட்டினை முழுத் தீர்வானது

$z = ax + by + c$ ....(2)

என்போம். இங்கு

$\phi(a, b)= 0$ ....(3)

சமன்பாடு (2)யை x, y யை பொறுத்து பகுதி வகையிட

$p = \frac{\partial z}{\partial x} = a$

$p = \frac{\partial z}{\partial y} = b$

$\phi(p, q)= 0$ ஆதலின், $\phi(a, b)= 0$

$\phi(a, b)= 0$ என்பதிலிருந்து b யை a, யின் சார்பாக எழுதலாம்.

அதாவது,

$b= f(a)$

$\therefore$(f)ன் முழுத்தீர்வு

$z=ax + f(a)y +c$ ....(4)

ஆகும்.

ஒருமைத்தீர்வு

$z, = ax + f(a) + c$ யை a,c பொறுத்து பகுதிய வகையிட கிடைக்கப்பெறும் சமன்பாடுகளின் உதவியால் முழுத்தீர்விலிருந்து a,c யை நீக்க ஒருமைத்தீர்வு கிடைக்கும்.

அதாவது,

$0 = x +F '(a) y$

$0 = 1$

இவ்விரு சமன்பாடுகள் பொருத்தமற்றது, எனவே இவ்வகைச் சமன்பாடுகளுக்கு ஒருமைத்தீர்வு கிடையாது. அதாவது $(p,q) = 0$

வடிவிலான சமன்பாடுகளுக்கு ஒருமைத்தீர்வு (Singular Integral) கிடையாது.

பொதுத்தீர்வு:

$\phi(p,q) = 0$ ....(5)

என்ற சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வு

$z = ax + f(a) + c$ ....(6)

c= F (a) எனக் கொள்வோம்.

எனவே (6)னது

$z=ax+f(a) + F(a)$ ....(7)

எனவாகும். சமன்பாடு (7) யை a – யை பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$0 = x +f'(a) y +F'(a)$ ....(8)

எனவாகும். சமன்பாடு (7), (8) லிருந்து a – யினை நீக்க கிடைக்கப்பெறுவது பொதுத்தீர்வு (General Integral) எனப்படும்.

உதாரணம் 1:

தீர்க்க : $p^2 + q^2 = l^2$

தீர்வு : $p^2 + q^2 = l^2$ என்பது $\phi(p,q) = 0$ என்ற வடிவில் உள்ளது, ஆகவே, இதன் முழுத்தீர்வு $z = ax + by +c$ ஆகும்.

இங்கு $\phi(p,q) = 0$

$a^2 + b^2 = l^2$

$b^2 = l^2 - a^2$

$b = \sqrt{l^2 - a^2}$

எனவே, முழுத்தீர்வானது

$z = ax + = \sqrt{l^2 - a^2}\, y + c$ ....*(1)*

ஆகும். இதில் C=F(a) என்க.

$z = ax + = \sqrt{l^2 - a^2}\, y + F(a)$ ....(2)

(2) வை a – யைப் பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$0 = x + \frac{1}{\sqrt[2]{l^2 - a^2}}(-2a) + F'(a)$ ....(3)

சமன்பாடுகள் (2),(3)—லிருந்து a யை நீக்கக் கிடைப்பது பொதுத்தீர்வாகும். இவ்வகைச் சமன்பாடுகளுக்கு ஒருமைத்தீர்வு கிடையாது, ஆகவே அதனைக் காண வேண்டாம்.

உதாரணம் 2:

தீர்க்க : $p^2 + q^2 = mpq$

தீர்வு : $p^2 + q^2 = mpq$ ....(1)

இது $\phi(p, q) = 0$ என்ற வகையாகும்.

∴ இதன் முழுத்தீர்வு,

$z = ax + by + c$

$\phi(p, q) = 0$என்பதால்

$a^2 + b^2 = mab$

அதாவது,

$b^2 - mab + a^2 = 0$

$\therefore b = \frac{ma \pm \sqrt{m^2a^2 - 4a^2}}{2}$

$= \left(\frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}\right)a$

∴சமன்பாடு (1)-ன் முழுத்தீர்வு,

$z = ax + \left(\frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}\right)ay + c$ ....(2)

(2)ல் c = F(a) எனக்கொண்டால்

$$z = ax + \left(\frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}\right)ay + F(a) \quad \text{.............}(3)$$

சமன்பாடு (3)-யை a –யை பொறுத்து வகையிட

$$0 = x + \left(\frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}\right)y + F(a) \quad \text{.............}(4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4) லிருந்து a – யை நீக்கக் கிடைப்பது பொதுத் தீர்வாகும். இதற்கும் ஒருமைத் தீர்வு கிடையாது.

வகை 2: கிளாரட்ஸ் வடிவம் (Clairaut's form)

இவ்வகைச் சமன்பாடுகளின் பொது வடிவமானது.

z = px + qy + ϕ(p, q) என்ற அமைப்பில் இருக்கும். இதனை

$$z = px + qy + \phi(p, q) \quad \text{.............}(1)$$

சமன்பாடு (1)-ன் முழுத்தீர்வு,

$$z = ax + by + \phi(a, b) \quad \text{.............}(2)$$

சமன்பாடு (2) – யை a, b –யைப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$0 = x + \frac{\partial \phi}{\partial a} \quad \text{.............}(3)$$

$$0 = y + \frac{\partial \phi}{\partial b} \quad \text{.............}(4)$$

சமன்பாடு (2),(3),(4) லிருந்து a, b –யினை நீக்கிட கிடைக்கப் பெறும் தீர்வினை ஒருமைத்தீர்வு எனப்படும்.

சமன்பாடு (2)-ல் b = F(a) எனக் கொண்டால்

$$z = ax + F(a)y + \varphi'(a) \quad \text{.............}(5)$$

சமன்பாடு (5)-யை a -யைப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$z = x + F'(a)y + \phi'(a)$ ....(6)

சமன்பாடு (5), (6) களிலிருந்து a, - யினை நீக்கிட கிடைக்கப் பெறும் தீர்வினை பொதுத்தீர்வு எனப்படும்.

உதாரணம் 1:

தீர்க்க : $z = px + qy + c\sqrt{l+p^2+q^2}$

தீர்வு : $z = px + qy + c\sqrt{l+p^2+q^2}$ ....(1)

சமன்பாடு (1) – னது

$z = px + qy + \phi(p,q)$ என்ற வடிவில் உள்ளது. எனவே சமன்பாடு (1)ன் முழுத்தீர்வு,

$z = ax + by + c\sqrt{l+a^2+b^2}$ ஆகும், ...(2)

சமன்பாடு (2) –யை a, b யைப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$0 = x + \frac{c}{2\sqrt{l+a^2+b^2}}2a$$

அதாவது,

$$0 = x + \frac{ac}{\sqrt{l+a^2+b^2}} \quad ....(3)$$

இதுபோன்றே,

$$0 = y + \frac{bc}{\sqrt{l+a^2+b^2}} \quad ....(4)$$

சமன்பாடுகள் (2) (3) களிலிருந்து a, b –யை நீக்கக் கிடைப்பது ஒருமைத்தீர்வு ஆகும்.

சமன்பாடு (3)-லிருந்து

$$x^2 = \frac{a^2c^2}{1+a^2+b^2}$$

சமன்பாடு (4)-லிருந்து

$$y^2 = \frac{b^2c^2}{1+a^2+b^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{(a^2+b^2)c^2}{1+a^2+b^2}$$

$$(x^2+y^2)(1+a^2+b^2)=(a^2+b^2)c^2$$

$$(x^2+y^2)\ (x^2+y^2)\ (a^2+b^2) = (a^2+b^2)\ c^2$$

$$x^2+y^2 = (a^2+b^2)\ (c^2-x^2-y^2)$$

$$a^2+b^2 = \frac{x^2+y^2}{c^2-x^2-y^2}$$

$$1+a^2+b^2 = 1+\frac{x^2+y^2}{c^2-x^2-y^2}$$

$$1+a^2+b^2 = \frac{c^2}{c^2-x^2-y^2}$$

மீண்டும் (3), (4) லிருந்தும்

$$a = \frac{-x\pm\sqrt{1+a^2+b^2}}{c}$$

$$= -x\frac{c}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}}\ \frac{1}{c}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}}$$

இது போன்றே,

$$b = \frac{-y}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}}$$

இவ்விரு மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (2)ல் பிரதியிட

$$z = \frac{-x^2}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}}$$

$$z = \frac{c^2-x^2-y^2}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}}$$

$$z = c^2-x^2-y^2$$

அதாவது,

$z^2 = c^2 - x^2 - y^2$

$x^2 = y^2 + z^2 = c^2$ என்பது முழுத்தீர்வாகும்.

சமன்பாடு (2)ல் b = F(a) எனப் பிரதியிட

$z = ax+F(a)y+c\sqrt{1+a^2+(F(a))^2}$ ....(5)

சமன்பாடு (5)யை a –யைப் பொறுத்து பகுதி வகையீடு செய்ய பொதுத்தீர்வு கிடைக்கும்.

$0 = x+F(a)y+c\frac{\partial}{\partial a}\sqrt{1+a^2+(F(a))^2}$ ....(6)

ஆகும்.

சமன்பாடுகள் (5), (6) லிருந்து a யினை நீக்கிட பொதுத்தீர்வு கிடைக்கும்.

உதாரணம் 2:

தீர்க்க : z = px + qy +pq

தீர்வு : z = px + qy +pq ....(1)

இது $z = ax + by + \phi(a,b)$ என்ற வடிவில் உள்ளதால் இதன் முழுத்தீர்வு

z = ax + by + ab ....(2)

சமன்பாடு (2)ஐ a, b-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$0 = x+b$; $0 = y+a$

$x = -b$; $y = -a$

இவைகளை (2)-இல் பிரதியிட,

$z = -xy - xy + xy$

$z = -xy$ ஆனது ஒருமைத்தீர்வாகும்.

மேலும், (2)-இல் $b = F(a)$ என பிரதியிட

$$z = ax + F(a)y + \phi(a, F(a)) \qquad \text{.............(3)}$$

எனவாகும்.

சமன்பாடு (3)ஐ a ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$0 = x + F'(a)y + aF'(a) + F(a) \qquad \text{.............(4)}$$

சமன்பாடு (3),(4)களிலிருந்து a – யினை நீக்கிட பொதுத்தீர்வு கிடைக்கும்.

வகை 3:

இவ்வகைச் சமன்பாடுகளில் z, p, q போன்றவைகள் மட்டுமே இருக்கும். இதன் பொது வடிவத்தினை $\phi(z, p, q) = 0$ என எழுதுவோம். இதனை பின்வருமாறு தீர்ப்போம்.

$$\phi(z, p, q) = 0 \qquad \text{.............(1)}$$

$X = x+ay$ எனவும் $z = f(X)$ எனவும் கொள்வோம். இதில் a என்பது ஒரு மாறிலியாகும்.

$$\therefore \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{dz}{dX}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial y} = a\frac{dz}{dX}$$

∴சமன்பாடு (1) ஆனது

$$\phi(z.\frac{dz}{dX}.a\frac{dz}{dX}=0) \qquad ....(2)$$

சமன்பாடு (2) ஆனது முதல்வரிசையுடைய சாதாரண சமன்பாடு (Ordinary differential equation of first order) ஆகும்.

$$\frac{dz}{dX}=F(z,a)$$

$$\frac{dz}{F(z,a)}=dx$$

$$\int\frac{dz}{F(z,a)}=\int dx$$

அதாவது,

$\psi(z,a) = x+b$

எனவே,

$\psi(z,a) = x+ay+b$ னது (1) ன் முழுத்தீர்வு ஆகும். இதனுடைய ஒருமைத் தீர்வு மற்றும் பொதுத்தீர்வு ஆகியவைகளை வழக்கமான முறையில் காணலாம்.

உதாரணம் 1:

தீர்க்க: $pz = 1 + q^2$

தீர்வு : $pz = 1+q^2$ ....(1)

$p = \frac{dz}{dx}, q = a\frac{dz}{dx}$ என (1)ல் பிரதியிட

$$z = \frac{dz}{dX}=1+a^2\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$$

$$a^2\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2-z\frac{dz}{dX}+1=0$$

ஆகவே,

$$\frac{dz}{dX}=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4a^2}}{2a^2}$$

$$\frac{dz}{z\pm\sqrt{z^2-4a^2}}=\frac{dX}{2a^2}$$

$$\frac{dX}{2a^2}=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4a^2}}{z^2-(z^2-4a^2)}dz$$

$$=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4a^2}}{4a^2}dz$$

$$2dX=(z\pm\sqrt{z^2-4a^2})dz$$

$$2X+c=\frac{z^2}{2}\pm\left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2-4a^2}-\frac{4a^2}{2}\log\left[z+\sqrt{z^2-4a^2}\right]\right]$$

அதாவது,

$$4(x+ay)+c= \quad =z^2\pm\left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2+4a^2}-4a^2\log\left[z+\sqrt{z^2+4a^2}\right]\right]$$

என்பது முழுத்தீர்வாகும்.

குறிப்பு:

இவ்வகையில் $\phi(z,p,q)=0$ விற்கு பதிலாக $\phi(x,p,q)=0$ அல்லது $\phi(y,p,q)=0$ என்று வரலாம். அதாவது x,y, z என்ற ஏதேனும் ஒரு மாறியுடன் p,q சேர்ந்த சார்பாக வரும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

$\phi(x,p,q)=0$ .... (1) எனக்கொண்டால் z னது ன் x,y ன் சார்பாகும்.

எனவே,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dz + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$= pdx + qdy \qquad \text{.............(2)}$$

q=a எனக் கொள்வோம்

∴சமன்பாடு 1னது

F(x,p,q)=0 ஆகும். இதிலிருந்து P = φ(x,a) எனப்பெறலாம்; ஆகவே சமன்பாடு 2 ஆனது dz = φ(x,a) dx+ady என்பது இதன் முழுத்தீர்வாகும். இதில் a,b என்பன மாறிலிகளாகும்.

உதாரணம் 2:

தீர்க்க : $q=xp+p^2$

தீர்வு : $q=xp+p^2$ ....(1)

q=a என்க

சமன்பாடு (1)னது

$$a=xp+p^2$$

அதாவது, $p^2 + xp - a=0$

$$p = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4a}}{2}$$

$$dz = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4a}}{2}dx + ady$$

$$z = \int(\frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4a}}{2})\,dx + ay + b$$

$$= \frac{-x^2}{4} \pm \left\{\frac{x}{4}\sqrt{x^2 + 4a + a\sinh^{-1}}\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right)\right\} + ay + b$$

என்பது முழுத்தீர்வாகும்.

$\phi(y,p,q) = 0$ என்றவாறு இருக்குமானால் p = a என கொண்டால் $\phi(y,a,q) = 0$ என்றாகும். இதிலிருந்து $q = \phi(y,a)$ என கிடைக்கும்.

எனவே $dz = adx + \phi(y,a)dy$

$z = ax + \int\phi(y,a)dy + b$ என்பது முழுத்தீர்வாகும்.

உதாரணம் 3:

தீர்க்க : $p=y^2q^2$

தீர்வு : $p=y^2q^2$ ....(1)

$p= a^2$ என்க

$\therefore$.சமன்பாடு (1)னது

$a^2 = y^2q^2$

அதாவது $q = \pm\frac{a}{y}$

$$dz = a^2dx \pm \frac{a}{y}dy$$

$z = a^2x \pm a\log y + b$ என்பது முழுத்தீர்வாகும். இதில் a, b னது மாறிலிகளாகும்.

வகை :4

இதன் பொது வடிவமானது $\phi_1(x,p) = \phi_2(x,q)$ ஆகும். இதனை பின்வருமாறு தீர்க்க வேண்டும்.

$\phi(x,p) = \phi2(x,q)1$ ....(1)

$\phi(x,p) = \phi_2(x,q) = a$ என்க.

$\therefore$ சமன்பாடு (1)லிருந்து

$p = f_1(x,a)$ ....(2)

$q = f_2(y,a)$ ....(3)

ஆதாவது,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x,a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x,a)$$

$z = \int f_1(x,a)dx + X$ சாராத உறுப்பு,

$z = \int f_2(y,a)dy + Y$ சாராத உறுப்பு,

இவைகளிலிருந்து,

$$z = \int f_1(x,a)dx + \int f_2(y,a)dy + b \qquad \text{.............(4)}$$

இதுவே முழுத்தீர்வாகும். இதில் b-னது ஏதேனும் ஒரு மாறிலியாகும். இதற்கு பொதுத்தீர்வு வழக்கமான முறையில் காணலாம். ஆனால் இவ்வகை வகைக்கெழு சமன்பாடுகளுக்கு ஒருமைத் தீர்வு கிடையாது.

உதாரணம் 1:

தீர்க்க : $p^2 + q^2 = x + y$

தீர்க்க : $p^2 + q^2 = x + y$ ....(1)

$$p^2 - x = y - q^2$$

இதில் $\phi_1(x,p) = p^2 - x$

$\phi_2(y,q) = y - q^2$ ஆகும்.

$\phi_1(x,p) = \phi_2(y,q) = a$ என்பதால்

$$p = \pm\sqrt{a+x}$$

$$p = \pm\sqrt{y-a}$$

$$z = \pm\int \sqrt{a+x}\ dx \pm \int \sqrt{y-a}\ dy + b$$

$$\frac{2}{3}(x+a)^{3/2} + \frac{2}{3}(y-a)^{3/2} + b$$

என்பது முழுத்தீர்வாகும்.

உதாரணம் 2:

தீர்க்க : $p+q=x+y$

தீர்வு : $p+q=x+y$ ....(1)

$p-x=y-q=a$ என்க

எனவே

$p=a+x$

$q=y-a$

$dz=(x+a)dx+(y-a)dy$

$dz=\frac{(x+a)^2}{2}+\frac{(y-a)^2+b}{2}$ என்பது முழுத்தீர்வாகும். இதற்கு ஒருமைத்தீர்வு கிடையாது. வழக்கமான முறையில் முழுத்தீர்வைக் காணலாம்.

3.12.இலக்குரான்சியின் சமன்பாடு (Lagrange's Equation):

$Pp+Qq=R$ ....(1)

என்கிற வடிவில் உள்ள பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு இலகுரான்சியின் சமன்பாடு (Lagrange's Equation) எனப்படும்.

இதில்,

$$p=\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}=\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$Q=\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}=\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$R=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x}$$

சமன்பாடு 1ன் பொதுத்தீர்வு

F(u,v) = 0 ....(2)

ஆகும். இங்கு $u(x,y,z)=c_1$

$v(x,y,z)=c_2$ எனக்கொள்வோம்.

$u(x,y,z)=c_1$ வகையிட

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0$$

ஆனால், $u(x, y, z)=c_1$ ஆனது

$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ தீர்வு என்பதால்,

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad \text{.............(3)}$$

இதுபோன்றே $v(x,y,z)= C_2$ ஆனது

$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ என்பதில் தீர்வு என்பதால்,

$$P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial z}=0 \qquad \text{.............(4)}$$

சமன்பாடு (3), (4)லிருந்து

$$\frac{P}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}=\frac{Q}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)}=\frac{R}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}$$

அதாவது, $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ ஆகும்.

எனவே,

$P_p + Q_q = R$ என்கிற பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு $F(u,v) = 0$ ஆகும்.

உதாரணம் 1:

தீர்க்க: $xzp + yzq = xy$

தீர்வு: $xzp + yzq = xy$ ....(1)

சமன்பாடு $P_p + Q_q = R$ என்ற வடிவில் இருப்பதால் (1)ன் துணைச்சமன்பாடு (Auxilary Equation)

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

ஆகவே,

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$$

இதில்

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\log x = \log y + \log c$$

$$\log x - \log y = \log c$$

$$\log \frac{x}{y} = \log c$$

$$\frac{x}{y} = c$$ ....(2)

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$$

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}$$

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{yc}$$

$cy\, dy = z\, dz$

$c\,\frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + d$

$cy^2 = z^2 + d_1$ ....(3)

$[\therefore d_1 = 2d]$

i.e. $c_1 = \frac{x}{y}$

$\frac{x}{y} y^2 - z^2 = d_1$

$z^2 = xy + d_1$

$F\,[\frac{x}{y}, xy - z^2] = 0$

அதாவது, தேவையான தீர்வு

$xy - z^2 = f\,(\frac{x}{y})$

உதாரணம் 2:

தீர்க்க: $(x^2 - yz)\,p + (y^2 - zx)\,q = z^2 - xy$

தீர்வு: $(x^2 - yz)\,p + (y^2 - zx)\,q = z^2 - xy$ ....(1)

இது $P_p + Q_q = R$ என்ற வடிவில் உள்ளதால் $\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy}$

என்பது துணைச்சமன்பாடாகும். இதிலிருந்து

$$\frac{dx - dy}{(x^2 - yz) - (y^2 - zx)} = \frac{dy - dz}{(y^2 - zx) - (z^2 - xy)} = \frac{dz - dx}{(x^2 - xy) - (x^2 - yz)}$$

$$\frac{dx - dy}{(x - y)(x + y + z)} = \frac{dy - dz}{(y - z)(x + y + z)} = \frac{dz - dx}{(z - x)(x + y + z)} \quad \text{.............(2)}$$

சமன்பாடு (2)லிருந்து

$$\frac{dx - dy}{(x - y)} = \frac{dy - dz}{(y - z)}$$

log (x-y) = log (y-z) + log c

$\frac{x-y}{(y-z)}$ = c

சமன்பாடு (2)லிருந்து

$$\frac{dy-dz}{(y-z)}=\frac{dz-dx}{(z-x)}$$

log (y-z) = log (z-x) + log d

$\frac{y-z}{(z-x)}$ = d

$$F\left[\frac{x-y}{(y-z)},\frac{y-z}{(z-x)}\right]=0$$

அல்லது $\frac{x-y}{y-z}=f\left(\frac{y-z}{z-x}\right)$ ஆகும்.

உதாரணம் 3:

தீர்க்க: x (y-z) p + y (z-x) q = z (x-y)

தீர்வு: x (y-z) p + y (z-x) q = z (x-y) .... (1)

இது $P_p + Q_q = R$ என்ற வடிவில் உள்ளதால்

$$\frac{dx}{x(y-z)}=\frac{dy}{y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}$$ .... (2)

என்பது (1)ன் துணைச்சமன்பாடு ஆகும்.

$$\frac{\frac{dx}{x}}{(y-z)}=\frac{\frac{dy}{y}}{(z-x)}=\frac{\frac{dz}{z}}{(x-y)}=\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}++\frac{dz}{z}\right)\Big/0$$ ....(3)

$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}$ = 0

log x + log y + log z = log a

xyz = a

மேலும் சமன்பாடு (2)லிருந்து

$$\frac{(y+z)dx}{x^2(y^2-z^2)} = \frac{(x+z)dy}{y^2(z^2-x^2)} = \frac{(x+y)dx}{z^2(x^2-y^2)} = \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\frac{(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dx}{0}$$

சமன்பாடு (4)லிருந்து

(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dx = 0

அதாவது,

y dx+x dy + (z dy + y dz) + (x dz + z dx) = 0

d(xy) + d(yz)+d(xz) = 0

xy+yz+xz = b

சமன்பாடு (1)ன் தீர்வானது

F(xyz, xy+yz+zx) = 0

அல்லது

xy+yz+zx = ϕ (xyz) ஆகும்.

உதாரணம் 4:

தீர்க்க: $(y^3x-2x^4)\,p + (2y^4-x^3y)q = 9z\,(x^3-y^3)$

தீர்வு: $(y^3x - 2x^4)\,p + (2y^4 - x^3y)q = 9z\,(x^3-y^3)$ ....(1)

சமன்பாடு (1)னது, Pp+Qq = R என்ற வடிவிலுள்ளது. எனவே (1)ன் துணைச்சமன்பாடு,

$$\frac{dx}{y^3x-2x^4} = \frac{dy}{2y^4-x^3y} = \frac{dz}{x^3-y^3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4 - x^3 y}{y^3 x - 2x^4}$$

இதை ஒரு படித்தான சமன்பாடாகக்கொண்டு y =vx எனப்பிரதியிடின்

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2v^4x^4 - vx^4}{v^3x^4 - 2x^4}$$

$$= \frac{2v^4 - v}{v^3 - 2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v^4 - v - v^4 + 2v}{v^3 - 2}$$

$$= \frac{v^4 + v}{v^3 - 2}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{v^3 - 2}{v^4 + v}dv$$

log x+log a = -2 log v + log (v+1)+ + log (v^2-v+1)

$$ax = \frac{(v+1)(v^2 - v + 1)}{v^2}$$

$$a = \frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}$$

மேலும், சமன்பாடு (2) லிருந்து

$$\frac{\frac{1}{x}dx}{y^3 - 2x^3} = \frac{\frac{1}{y}dy}{2y^3 - x^3} = \frac{\frac{1}{z}dz}{9(x^3 - y^{3)}}$$

$$\frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}}{3(y^3 - x^3)} = \frac{\frac{1}{z}dz}{-9(x^3 - y^3)}$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=\frac{1}{-3z}dz$$

எனவே,

$$\log x + \log y = \frac{b}{z^{\frac{1}{3}}}$$

அதாவது, $xyz^{\frac{1}{3}} = b$

தேவையான தீர்வு

$$F[\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}, xyz^{\frac{1}{3}}] = 0$$

அல்லது

$$\frac{x^3+y^3}{x^2y^2} = f(xyz^{\frac{1}{3}})$$

அதாவது $z = \frac{1}{x^3y^3}\int(\frac{x^3+y^3}{x^2y^2})$ ஆகும்.

3.13. சார்ப்பியின் முறை (Charpit's Method)

நான்கு வடிவ அமைப்புகளில் உள்ள சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறைகளையும், Pp+Qq = R என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு காணும் முறையினையும் இதுவரையில் கண்டோம். ஆனால், நான்கு வடிவில் இல்லாத அமைப்புடைய F[x, y, z, p, q] = 0 என்ற அமைப்புடைய சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காண ஒரு முறையினை **சார்ப்பி** என்ற கணித வல்லுநர் வகுத்தார். அதனைதான் சார்ப்பின் முறை(Charpit's method) எனக்கூறுகிறோம்.

சார்ப்பியின் முறையில் தீர்வு காணல்:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

F[x, y, z, p, q] = 0 என்றால், ...(1)

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\ dx + \frac{\partial z}{\partial x}$ dy ஆதலால்,

dz = p dx + q dy ....(2)

என்பது நாம் அறிந்ததாகும்.

சமன்பாடு (1)யைப் பயன்படுத்தி

f[x, y, z, p, q] = 0 ....(3)

என்ற மற்றொரு சார்பை கணக்கிட முடியும் எனில் (1), (2), (3)

என்பவைகளிலிருந்து p,q இரண்டையும் நீக்க இயலும். x,y யைப் பொறுத்து (1),(3)யை வகையீடு செய்ய

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$F_x + F_z p + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$ ....(4)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$f_x + f_z p + f_p \frac{\partial p}{\partial x} + f_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$ ....(5)

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

$$F_y + F_z p + F_p \cdot \frac{\partial p}{\partial y}+F_q\frac{\partial q}{\partial y}=0 \qquad \text{.............(6)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

$$f_y + f_z q + f_p \frac{\partial p}{\partial y}+f_q\frac{\partial q}{\partial y}=0 \qquad \text{.............(7)}$$

(4), (5) லிருந்து $\frac{\partial p}{\partial x}$யை நீக்க, மற்றும் (6), (7) லிருந்து $\frac{\partial q}{\partial y}$யை நீக்க

$$(F_x\, f_q - F_p\, f_x) + p(F_z f_p - F_p f_z) + \frac{\partial q}{\partial x}(F_q f_p - F_p f_q) = 0 \qquad \text{.............(8)}$$

$$(F_y f_q - F_q f_y) + q\,(F_z f_q - F_q\, f_z) + \frac{\partial p}{\partial y}(F_p f_q - F_q f_p) = 0 \qquad \text{.............(9)}$$

$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x dy}=\frac{\partial p}{\partial y}$ என்ற உண்மையைக் கொண்டு (8), (9)யை கட்டினால், (8), (9)ல் உள்ள மூன்றாவது உறுப்புகள் பூச்சியமாகும். மீதம் கிடைப்பது.

$$(F_x + pF_z)\,f_p + (F_y + qF_z)f_q - (pF_p + qF_q)f_z - F_p f_x - F_q f_y = 0 \text{..........10}$$

ஆகும். இது முதல் வரிசைச் சமன்பாடு, இதன் தீர்வு துணைச் சமன்பாட்டான (3)க்கு உடையதாகும். எனவே, fயை (10)லிருந்து பெறலாம்.

அதாவது,

$Pf_p + Q f_q + Rf_z + S f_x + T f_y = R_1 (=0)$

$$\frac{dp}{F_x+pF_z}=\frac{dq}{F_y+qF_z}=\frac{dz}{-pF_p-qF_q}=\frac{dx}{-F_p}=\frac{dy}{-F_q}=\frac{df}{0}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(11)-ன் தீர்வுகள் 10ன் தீர்வுகள் ஆகும். இதிலிருந்து f-க் காணலாம்.

இதைக் கொண்டு வகை 1, வகை 2, வகை 3, வகை 4 என்ற அமைப்புடைய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கலாம்.

வகை 1.

சார்ப்பி முறையில் தீர்த்தல்

$F(p,q)=0$

$F_x = F_y = F_z = 0, F_p, F_q$ மட்டும் பெறலாம்.

எனவே,

$$\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dz}{-pF_p-qF_q}=\frac{dx}{-F_p}=\frac{dy}{-F_q}=\frac{df}{0}$$

$$\frac{dp}{0}=\frac{dx}{-F_p};$$

$$\frac{dq}{0}=\frac{dx}{-F_q};$$

ஆகியவைகளிலிருந்து dp=0, dq=0 .எனவே, p=a, q=b என்ற மாறிலிகளைப் பெறலாம். எனவே, F(a,b)=0 அல்லது b = ϕ (a) எனவாகும்.

உதாரணம் :

தீர்க்க : p q = C

தீர்வு :

$F_p=q, F_q=p$

$F_x=F_y=F_z=0$

$$\therefore \frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dz}{-pq-pq}=\frac{dx}{-q}=\frac{dy}{-p}$$

$$\therefore \frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dz}{2pq}=\frac{dx}{q}=\frac{dy}{p}$$

$\therefore p = a$

pq = c என்பதால் $q=\frac{c}{p}$

அதாவது $q=\frac{c}{a}$

$\therefore z=ax+\frac{c}{a}y+k$ எனத் தீர்வு கிடைக்கும்.

வகை 2 : (சார்ப்பி முறையில்)

$z = px+qy+f(p,q)$ என்றால்

$F_x=p, F_y=q, F_z=-1, F_p=x+f_p, F_q=y+f_q$

ஆகவே துணைச் சமன்பாடு பெற

$$\frac{dp}{p-p}=\frac{dq}{q-q}=\frac{dp}{-p(x+f_p)-q(y+f_q)}=\frac{dx}{-(x+f_q)}=\frac{dy}{-(y+fq)}=\frac{df}{0}$$

dp = 0, dq = 0 என்றாகும்.

ஆகவே, p = a, q = b என வரும்.

$\therefore z = ax + by + f(a,b)$ எனத் தீர்வாகும்.

உதாரணம் : 2

தீர்க்க : z=px+qy+p^2+q^2

தீர்வு : z=px+qy+p^2+q^2

F_x=p, F_p = x+2p, F_y=q, F_q = y+2q, F_z=-1.

$$\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dz}{-px-2p^2-qy-2q^2}=\frac{dx}{-x-2p}=\frac{dy}{-y-2p}$$

$\therefore$ dp=0, dq = 0

ஆகவே, p=a, q=b

$\therefore$ z =ax+by+a^2+b^2 என்பது தீர்வாகும்.

வகை 3 : (சார்ப்பி முறையில்)

F(x,p,q) = 0 என்றால்

F_x=0, F_y=0, Fx, F_p, F_q க்காண தீர்வு காண முடியும்.

சார்ப்பின் முறைப்படி,

$$\frac{dp}{0+pF_z}=\frac{dq}{0+qF_z}=\frac{dz}{-pF_p-qF_q}=\frac{dx}{-F_p}=\frac{dx}{-F_q}=\frac{df}{0}$$

$\frac{dp}{p}=\frac{dp}{q}$ ஆகும்.

இவைகளைத்தீர்க்க q=ap எனக் கிடைக்கும்.

இதிலிருந்து F(z,p,ap) = 0 எனவாகும். இதைக் கொண்டு $p=\phi(z,a)$ என வரும்.

dx = pdx+qdy என்பதைக் கொண்டு

dz = $\phi(z,a)dx$ + a $\phi(z,a)dy$ எனவாகும்.

$$\frac{dz}{\varphi(z,a)} = dx + ady$$

$$\therefore \int \frac{dz}{\varphi(z,a)} = x + ay + b$$

என்பது தீர்வாகும்.

உதாரணம் 3 :

தீர்க்க : $z^2(p^2+q^2+1)=c^2$

தீர்வு : $F = z^2(p^2+q^2+1)-c^2=0$

$F_p = 2z^2p$, $F_q=2z^2q$, $F_z=2z(p^2+q^2+1)$, $F_x=0$, $F_y=0$

$$\frac{dp}{0+2zp(p^2+q^2+1)} = \frac{dq}{0+2zq(p^2+q^2+1)} = \frac{dz}{-p(2z^2p)-q(2x^2q)} = \frac{dx}{-(2z^2p)} = \frac{dy}{-(2z^2q)} = \frac{df}{0}$$

$$\therefore \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

p=ap ஆகும்.

$z^2 (a^2q^2+q^2+1)=c^2$

$$q^2(a^2+1)=\frac{c^2}{z^2}-1$$

$$q = \sqrt{\frac{c^2-z^2}{z^2(a^2+1)}}$$

$$p = a\sqrt{\frac{c^2-z^2}{z^2(a^2+1)}}$$

எனவே,

$$dz = \frac{a}{z}\sqrt{\frac{c^2 - z^2}{z^2(a^2+1)}}\, dx + \frac{1}{z}\sqrt{\frac{c^2 - z^2}{z^2(a^2+1)}}\, dy$$

அதாவது,

$$\int \frac{zdz}{\sqrt{c^2 - z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}x + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}y + b$$

$(a^2+1)\ (c^2-z^2)=(ax+y+B)^2$ என்பது தீர்வாகும்.

வகை 4 (சார்ப்பி முறையில்):

$F(x,y,p,q)=F_1(x,p)-F_2(y,q)=0$

$F_x = F_1x$

$F_y = -F_2y$

$F_z = 0$

$F_p = F_{1p}$

$F_q = -F_{2q}$

∴ சார்ப்பின் முறைப்படி

$$\frac{dp}{F_1x+0} = \frac{dq}{-F_2y} = \frac{dz}{-pF_{1p}+qF_{2q}} = \frac{dx}{-F_{1p}} = \frac{dy}{F_{2q}} = \frac{df}{0}$$

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{F_{1x}}}=\frac{dx}{-F_{1p}}$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{F_{1x}}{-F_{1p}}=\phi_2(x,p)$$ ஆகும்.

$p=f_1(x)$ என்றாகும்.

$$\frac{dq}{-F_{2,y}}=\frac{dy}{F_{2q}}$$

$$\frac{dp}{dy}=\frac{-F_{2y}}{F_{2q}}=\phi(y,q)$$ ஆகும்.

$q=f_2(y)$ என்றாகும்

$$dz=f_1(x)dx+f_2(y)dy$$

$z=\int f_1(x)dx+\int f_2(y)dy$ என்பது தீர்வாகும்.

உதாரணம் 4:

தீர்க்க : $P^2+q^2=x+y$

தீர்வு : $F=p^2-x+q^2-y=0$

$F_p=2p, F_q=2q, F_x=-1, F_y=-1, F_z=0$

$$\frac{dp}{-1+0}=\frac{dq}{-1+0}=\frac{dp}{-2p^2-2q^2}=\frac{dx}{-2p}=\frac{dy}{-2p}=\frac{df}{0}$$

$$\frac{dp}{-1}=\frac{dx}{-2p}$$

$$\Rightarrow p^2=x+a$$

$$\therefore p=\sqrt{x+a}$$

மேலும்,

$$\frac{dq}{-1}=\frac{dy}{-2q}$$

$$q^2=y-a$$

$$q=\sqrt{y-a}$$

$$\therefore dz = pdx + qdy$$

$$dz = \sqrt{x+a}\ dx + \sqrt{y-a}\ dy.$$

$$z=\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(y-a)^{\frac{3}{2}}+b$$

என்பது தீர்வாகும்.

இதற்கு சிறப்புத் தீர்வு கிடையாது.

3.14.ஒலி அலைகளின் பரவல் பண்பு

(Propagation of Sound Waves)

வாயு போன்ற ஒரு அழுத்தமான பாய்மத்தில் (Compressible fluid), ஒலி அலைகளின் பரவலை நாம் கருதுவோம்.

ஒரு பாய்மத்திற்கு பொதுவான ஒரு தொடர் சமன்பாடானது

$$\nabla.(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{...........(1)}$$

இங்கு,

ρ என்பது பாய்மத்தின் அடர்த்தியையும்,

v என்பது பாய்மத்தின் திசைவேகத்தையும் குறிக்கிறது.

ஆய்லரின் (Euler's) இயக்க சமன்பாடானது,

$$(\nabla.V)\ v+\frac{\partial v}{\rho t} = F - \frac{1}{p}\nabla P \qquad ....(2)$$

இங்கு,

$P \rightarrow$ பாய்மத்தின் அழுத்தத்தையும்,

$F \rightarrow$ ஓரலகு நிறைக்கான விசையையும் குறிக்கிறது.

இந்தப் பாய்மமானது, ஒரு பூரணமான (Perfect) வாயுவாக இருந்தால், கீழ்க்கண்ட மூன்று வகைகளை நாம் கருதுவோம். அவையாவன:-

1. இய க்கமானது, சுழற்சியில்லாத (Irrotational) இயக்கமாக இருந்தால் 'φ' எனும் திசைவேக அழுத்தம் உருவாகின்றது. 'φ' ஆனது, கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டினால் வரையறுக்கப்படுகிறது.

   $$V = -\nabla\varphi \qquad ....(3)$$

2. திசைவேகங்களின் மதிப்புகள் மிகவும் சிறியதாக இருப்பதால், அவற்றின் உயர் அடுக்குகளை நாம் விட்டுவிடலாம்.
3. மூலக்கூறுகளுக்கிடையேயான விசைகள் இல்லை. எனவே பொருளின் விசை F ஆனது சுழியமாகும்.

'ρ_o' என்பது அடர்த்தியின் ஆரம்ப மதிப்பு மற்றும் $\underline{S}$ என்பது ஒடுக்க உறுப்பு (Condensation term) எனில்,

அடர்த்தி 'ρ' வானது,

$$\rho = \rho_o\,(1+S) \qquad .....(4)$$

என வெளிப்படுத்தப்படுகிறது.

ஒரு வாயுவிற்கு, அடர்த்தி ρ - வின் மாற்றம் சிறிதாக இருந்தால், 'S' ம் சிறிதாகும். சமன்பாடு 4 ஐ 1 ல் பயன்படுத்தினால், நமக்குக்கிடைப்பது,

$$\nabla\left[\rho_o(1+S)V\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_o(1+S)\right]=0 \qquad \text{........(5)}$$

'S' மிக சிறிதாக இருப்பதால்,

∇.(SV) ஐ நாம் விட்டு விடலாம். எனவே,

$$\nabla.V+\frac{\partial s}{\partial t}=0$$

$$=> \frac{\partial s}{\partial t} = - \nabla.V \qquad \text{........(6)}$$

சமன்பாடு 3 ஐப் பயன்படுத்தினால், நமக்குக் கிடைப்பது

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla^2.\ \varphi \qquad \text{........(7)}$$

ஒரு பூரண வாயுவின் கொள்கைகளைப் பொறுத்து

[$F=0$ மற்றும் $(V.\nabla)V$ –ஐ-விட்டுவிடலாம்], சமன்பாடு 2 ஆனது,

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{-1}{\rho}\nabla p \qquad \text{........(8)}$$

சமன்பாடு 3 ஐப் பயன்படுத்தினால், நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\frac{\partial}{\partial t}=(\nabla\varphi)=\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad \text{.......... (9)}$$

இருபக்கங்களிலும் *dr*- ஆல் நாம் பெருக்கும் போது

$$\frac{\partial}{\partial t}=(\nabla\varphi.dr) =\frac{1}{\rho}(\nabla p.dr) \qquad \text{...........(10)}$$

இங்கு dr என்பது இரு அடுத்தடுத்த புள்ளிகளுக்கு (x,y,z) மற்றும் (x+dx, y+dy, z+d^2) இடையேயான இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கிறது.

இங்கு நாம்,

$$\nabla\varphi.dr = d\varphi$$

மற்றும் $\nabla p.dr = dp$ என எழுதலாம்.

எனவே சமன்பாடு 10 ஆனது,

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\varphi) = \frac{dp}{\rho} \qquad \text{........(11)}$$

தொகை காணும்போது, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$d\varphi = \int \frac{dp}{\rho} + C \qquad \text{...........(12)}$$

C - என்பது தொகையிடலின் ஒரு மாறிலியாகும். தொகையிடலின் லாப்லாஸின் சமன்பாடானது.

$P.V^{\gamma}$ மாறிலி = மாறிலி ....(13)

இங்கு γ = $\frac{C_P}{C_V}$ = $\frac{\text{மாறாத அழுத்தத்தில் தன் வெப்பம்}}{\text{மாறாத பருமனில் தன் வெப்பம்}}$

காற்றிற்கு γ = 1.41

'm' என்பது ஒரு வாயுவின் நிறையானால்;

பருமன் $V = \frac{m}{\rho}$

எனவே,

$p\left(\frac{m}{\rho}\right)^{\gamma}$ ஒரு மாறிலி என எழுதலாம்.

அல்லது $p = k\rho^{\gamma}$ ....(14)

இங்கு 'k' என்பதும் ஒரு மாறிலி சமன்பாடு 14ஐ வகைக்கெழு காணும்போது, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$dp = k^{\gamma} \rho^{\gamma - 1} (l+s)^{\gamma - 1} ds \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

இதை சமன்பாடு 12ல் பிரதியிடும்போது,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int \frac{k\gamma\rho_0^{\gamma}(1+s)^{\gamma-1}ds}{\dot{\rho}_o(1+s)} + C$$

$$= kv\rho_o^{\gamma-1}\int 1+s)^{\gamma-2}ds + c$$

't' ன் சார்பாக, பகுதிவகைக்கெழு காணும்போது, நமக்கு கிடைப்பது,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = kv\rho_o^{\gamma-1}\int 1+s)^{\gamma-2}\frac{\partial s}{\partial t} \qquad \ldots\ldots\ldots(16)$$

'S' ன் மதிப்பு மிகவும் சிறியதாக இருப்பதால்,

$(l+S)^{\gamma-2} \approx 1$, எனவே

$$K\rho_o^{\gamma-1} = \frac{k\rho_o^{\gamma}}{\rho_o} = \frac{p_o}{\rho_o} (\therefore p = k\rho^{\gamma})$$

சமன்பாடு 16 ஆனது,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\gamma p_O}{\rho_O} \quad \frac{\partial s}{\partial t} \qquad \ldots\ldots\ldots(17)$$

சமன்பாடு 7ஐ இங்கு பிரதியிடும்போது,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\gamma p_O}{\rho_O} \quad \nabla^2 \phi$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \phi = \frac{\rho_O}{\gamma p_O}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

அலைபரவுதலின் நிலையான சமன்பாடானது,

$$\nabla^2\varphi = \frac{\rho_O}{\gamma p_O}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad ....(19)$$

இங்கு 'C' என்பது அலை பரவுதலின் திசைவேகம் ஆகும்.

சமன்பாடுகள் 18 மற்றும் 19களை ஒப்பிடும்போது,

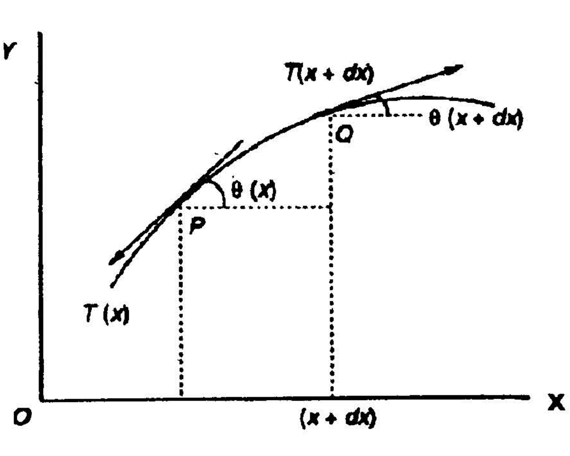
$$C^2 = \frac{\gamma p_O}{\rho_O}$$

$$=> C = \sqrt{\frac{\gamma p_O}{\rho_O}} \qquad ....(20)$$

இச்சமன்பாடானது, வாயுவின் ஒலி அலைகளின் திசைவேகத்தை அளிக்கிறது. மற்றும் இச்சமன்பாடு, ஆய்வக முடிவுகளோடும் ஒத்துப் போகிறது.

3.15.அதிர்வடையும் ஒரு நூல் (அல்லது) நாணின் இயக்க சமன்பாடு: (Equation of Motion for the Vibrating String)

ஒரு நூல் என்பது, அதன் விட்டத்தை விட, நீளம் அதிகம் உள்ள நாணாகும். மேலும், ஒரே சீராகவும், வளையும் தன்மையுடையதாகவும் இருக்கும். ஒரே நூலை, இருபுள்ளிகளுக்கிடையில் அதிகமான இழுவிசைக்கு உட்படுத்தும்போது, குறுக்கதிர்வுகளை உருவாக்குகின்றன. இதற்கான தீர்வைக் காண நாம் நூலின் அதிர்வானது, அதன் செங்குத்து தளத்தில் ஏற்படுத்துவதாக கருதுவோம்.



dl எனும் நீளத்தை உடைய ஒரு நாணில், PQ எனும் மூலகத்தின் இயக்கத்தை நாம் கருதுவோம் இங்கு O என்பது ஆதியாகவும், (x,y) மற்றும் (x+dx, y+dy))என்பது P மற்றும் Q புள்ளிகளின் ஆயக்கூறுகளாகவும் கருதுவோம்.

T(x) மற்றும் T(x+dx) என்பது P மற்றும் Q வில் ஏற்படுத்தும் இழுவிசைகள் எனவும், θ(x) மற்றும் θ(x+dx) என்பவை P மற்றும் Q வின் தொடுகோடுகளால் X – அச்சில் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் எனவும் கருதுவோம்.

X மற்றும் Y அச்சுகளில், $\hat{i}$ மற்றும் $\hat{j}$ என்பவை, ஓரலகு வெக்டார்கள் எனில், PQ மூலகத்தில் X அச்சில் ஏற்படும் ஒரு மொத்த கிடைமட்ட விசையானது,

$$= [T(x+dx)\cos\theta(x+dx) - T(x)\cos\theta(x)]\,\hat{i} \qquad \ldots\ldots\ldots \; 1$$

'PQ' மூலகத்தில், Y அச்சில் ஏற்படும் ஒரு மொத்த செங்குத்து விசையானது,

$$= [T(x+dx)\sin\theta(x+dx) - T(x)\sin\theta(x)]\,\hat{j} \qquad \ldots\ldots\ldots \; 2$$

அதிர்வுகளானது, செங்குத்துத் தளத்தில் மட்டுமே நடைபெறுவதாகக் கருதினால், கிடைமட்ட இயக்கத்தை நாம் புறக்கணித்து விடலாம். எனவே, சமன்பாடு 1ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசையானது சுழியமாகும்.

'M' என்பது, அந்த நாணின் ஓரலகு நீளத்தின் நிறை எனில் 'PQ' மூலகத்தின் நிறையானது = m.dl.

நியூட்டனின் விதிப்படி, மற்ற விசைகள் அனைத்தையும் புறக்கணித்தால், அந்த இயக்கத்தின் சமன்பாடானது,

$$m.dl\,\frac{\partial^2 y}{dt^2}\,\hat{j} = \left[T(x+dx)\sin\theta(x+dx) - T(x)\sin\theta(x)\right]\hat{j}$$

$dx.\ \hat{j}$- யால் நாம் வகுக்கும்போது,

$$m.\frac{dl}{dx}.\frac{\partial^2 y}{dt^2}\,\hat{j} = \frac{\left[T(x+dx)\sin\theta(x+dx) - T(x)\sin\theta(x)\right]}{dx}$$

இங்கு,

$$dl = dx^2 + dy^2$$

$$\therefore m\left[\left(1+\frac{\partial y}{dx}\right)^2\right]^{1/2}\frac{\partial^2 y}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x}(TSin\theta) \qquad \ldots\ldots\ldots\ 3$$

ஆனால்,

$$Sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{\partial y/dx}{\sqrt{1+\left(\partial y/dx\right)^2}}$$

எனவே, சமன்பாடு 3 ஐ, நாம் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$m.\frac{\partial^2 y}{dt^2}.\left[\left(1+\frac{\partial y}{dx}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T.\frac{\partial y/dx}{\sqrt{1+\left(\partial y/dx\right)^2}}\right)$$

சிறு அதிர்வுகளை மட்டும் நாம் கருதினால், $\frac{\partial y}{dx}$ என்பதை, ஒன்றோடு ஒப்பிடும் போது மிகவும் சிறிய மதிப்பாகும் எனவே,

$$m.\frac{\partial^2 y}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T.\frac{\partial y}{\partial x}\right) \quad \ldots\ldots\ldots 4$$

மேலும் 'T' எனும் இழுவிசையானது, நாண் முழுவதும் மாறாது இருக்குமெனில்,

$$m.\frac{\partial^2 y}{dt^2} = T.\frac{\partial^2 y}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{dt^2} = \frac{T}{m}.\frac{\partial^2 y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots 5$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{dt^2} = C^2.\frac{\partial^2 y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

இங்கு

$$C = \left(T/m\right)^{1/2} = \sqrt{T/m} \quad \ldots\ldots\ldots 7$$

'C' எனும் இந்த மாறிலியானது, திசைவேகத்தின் அளவுகளைக் கொண்டுள்ளது. சமன்பாடு 6 ஆனது அதிர்வடையும் ஒரு நாணின் இயக்க சமன்பாட்டைக் குறிப்பிடுகிறது.

குறிப்பு

'f' எனும் ஓரலகு நீளத்தில் ஒரு செங்குத்து விசையானது, அந்த நாணில் பயன்படுத்தப்படும்போது, அதிர்வடையும் நாணின் இயக்க சமன்பாடானது,

$$m.dl\frac{\partial^2 y}{dt2}\hat{j}=\left[T(x+dx)\ Sin\theta-(x+dx)-T(x)Sin\theta(x)\hat{j}+f.dl\hat{j}\right]$$

$$=> m\frac{\partial^2 y}{dt^2}=T.\frac{\partial^2 y}{dx^2}+f \qquad - 8$$

'f' என்பது ஓரலகு நீளத்திற்கான, ஈர்ப்பு விசையெனில், 'f' = mg;

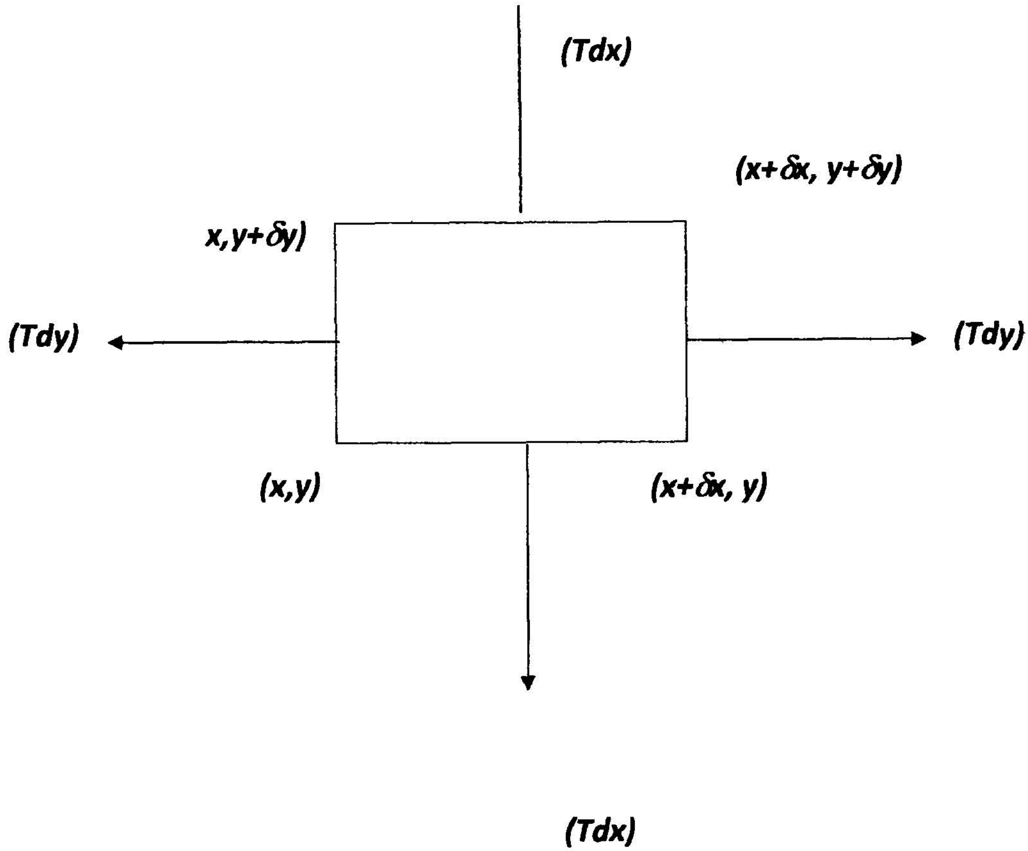
எனவே, அதிர்வடையும் நாணின் இயக்க சமன்பாடானது,

$$\frac{\partial^2 y}{dt^2}=C^2.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-g \qquad - 9$$

3.16 செவ்வக மென்படலத்தின் அதிர்வுகள் :

ஒரு மெல்லிய படலத்தின் அதிர்வுகளைப் பற்றிய அறிய, நாம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றை கருதலாம். அதாவது,

1. அந்தப் படலமானது முழுமையாக வளையும் தன்மை உடையது.
2. அப்படலத்தின் அடர்த்தி ஒரே சீராக இருக்கும்.
3. அதிர்வுகளுக்கு உட்படுத்தப்பட்டபோது, அதன் இடப்பெயர்ச்சியானது அப்படலத்திற்கு செங்குத்துத் திசையில் இருக்கும், மற்றும் அதன் சமநிலைத்தன்மையிலிருந்து சிறிதாக இருக்கும்.



'σ' என்பது, படலத்தின் ஓரலகு பரப்பளவுக்கான நிறை எனவும், 'T' என்பது ஓரலகு நீளத்திற்கான செங்குத்து விசை எனவும் கருதுவோம். இம்மெல்லிய படலமானது முழுவதும் வளையும் தன்மையுடையதாக இருந்தால், இந்த இழுவிசையானது, ஒரே சீராக, அதன் பரப்பு முழுவதும் பரவியிருக்கும்.

'XY' தளத்தில், அம்மெல்லிய படலத்தின் சிறு மூலகம் *dxdy* எனக் கருதுவோம். U என்பது, படலமானது, அதன் சமநிலைத் தன்மையிலிருந்து, உருவாகும் இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கிறது. இந்த இடப்பெயர்ச்சியானது, மெல்லிய படலத்தின், ஒரு புள்ளியின் நிலை மற்றும் நேரத்தின் சார்பாக உள்ளது, இப்படலத்தில் மூலகமானது, *δu* எனும் நிலைக்கு, xy – தளத்திற்கு செங்குத்து

திசையில், இடப்பெயர்ச்சி அடைந்தால், அதன் விசையானது, δx எனும் நீளத்தில் $T.\delta u.$,

எனவே, ஓரலகு நீளத்தில் ஏற்படும் விசையானது,

$$T.\frac{\delta U}{\delta X} = T.\frac{\partial U}{\partial X}$$ (அதன் எல்லைக்குள்)

∴ செங்குத்துத் திசையில், $(x+\delta x)$ ல் விசையானது,

$$T.\frac{\partial U}{\partial x}|_{x+\delta x}\ \delta y$$

x - ல் நடைபெறும் விசையானது,

$$-T.\frac{\partial u}{\partial x}|_{x}\ \delta y$$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருவிசைகளின் மொத்த விசையானது,

$$T\delta y\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}\right] = T.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta x\delta y \qquad \text{.............1}$$

இவ்விசையானது, (x) மற்றும் (x+δ x) ல் ஏற்படுவது. இதேபோல,

(y) மற்றும் (y+δy) களில் ஏற்படும் விசையானது,

$$T\delta x\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y+\delta y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y}\right] = T.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\delta x\delta y \qquad \text{..............2}$$

எனவே மூலகத்தின் மொத்த விசையானது,

$$= T\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y^2}\right)\right]\delta x\delta y \qquad \text{............. 3}$$

நியூட்டனின் இரண்டாவது இயக்க விதியின்படி, இந்த விசையானது, மூலகத்தின்

$(\sigma\delta x\delta y)$ எனும் நிறை மற்றும் அதன் முடுக்கம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனுக்கு சமமாகும். அதாவது.

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\delta x\,\delta y - \sigma\delta x\,\delta y.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$(\delta x\,\delta y)$ இருபக்கமும் பொதுவாக இருப்பதால், அதை நாம் நீக்கிவிட, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{.............. 4}$$

இங்கு

$v=\sqrt{T/\sigma}$ = அலையின் திசைவேகம். சமன்பாடு 4 – ஆனது, ஓரளவை வெளியில், மெல்லிய படலத்தின் அலை சமன்பாடாகும்.

3.17 அலைசமன்பாட்டின் தீர்வு (மாறிலிகளைப் பிரிக்கும் முறை) (Solution of wave equation – Method of Separation of variables)

'u' என்பது x, y மற்றும் t - ன் சார்பு எனில், மாறிலிகளைப் பிரிக்கும் முறையின்படி நாம் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$U(x,y,t)=X(x)Y(y)\tau(t)=\phi(x,y)\tau(t) \qquad \text{.............. 5}$$

இங்கு

$\phi(x,y)=X(x)Y(y)$ எனும் இந்த சமன்பாடு x மற்றும் y -ன் சார்பாகும்.

τ(t) என்பது 't' ன் சார்பு மட்டுமே ஆகும். சமன்பாடு 5 ஐ 4ல் பிரதியிட்டு மற்றும் ϕ τவால் முழுவதும் வகுக்கும்போது நமக்குக் கிடைப்பது.

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{1}{v^2\,\tau}\;\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} \qquad \text{. . . . . 6}$$

இங்கு இடதுபக்கமுள்ள சமன்பாடு, x, y ஐச் சார்ந்தும், வலப்பக்கமுள்ள சமன்பாடு 't' ஐச் சார்ந்தும் உள்ளது. எனவே ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும், தனித்தனியே,

$\left(\frac{-\omega^2}{v^2}\right)$ எனும் மாறிலிக்குச் சமமாகக் கருதலாம்.

எனவே,

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{-\omega^2}{v^2} \qquad \text{.......... 7}$$

மற்றும்

$$\frac{1}{v^2\tau}\;\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}=\frac{-\omega'^2}{v^2} \qquad \text{.......... 8}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}+\omega^2\tau=0 \qquad \text{...........9}$$

சமன்பாடு 9-ன் தீர்வானது

$\tau = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$; அல்லது

$\tau = A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t$; 10

இங்கு A_1 மற்றும் A_2 வானது யாதுமொரு மாறிலிகள் (Arbitrary Constants)

சமன்பாடு 7 ஐ நாம் பின்வருமாறு வெளிப்படுத்தலாம். அதாவது,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\omega^2}{v^2}\varphi=0 \qquad \text{............ 11}$$

இச்சமன்பாடானது, சாதாரண **ஹெல்மோட்ஸ் சமன்பாடு** (Ordinary Helmholtz equation) என அழைக்கப்படுகிறது. இதன் தீர்வுகளை, மாறிலிகளைப் பிரிக்கும் முறையின்படி, கிரீன் சார்புகளைப் (Green's functions) பயன்படுத்தி, எளிதில் காணலாம்.

a மற்றும் b என்பன, மெல்லிய படலத்தின் பக்கங்கள் எனில் ஓரங்களில் நாம்.

x = o ; x = a எனவும்

y = o ; y = b எனவும் கருதலாம். எனவே எல்லைக்குரிய நிபந்தனைகளை பின்வருமாறு கூறலாம்.

அதாவது,

$u=0$; $x=o$ ஆக இருக்கும்போது,

$u=0$; $x=a$ ஆக இருக்கும்போது, ...12

$u=0$; $y=o$ ஆக இருக்கும்போது,

$u=0$; $y=b$ ஆக இருக்கும்போது,

சமன்பாடு 11ல், நாம் $\varphi = X(x)Y(y)$ எனப்பிரதியிட்டு, XY ஆல் வகுக்கும்போது, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+\frac{\omega^2}{v^2}=0$$

=> $$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{v^2}=\frac{-1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \qquad -13$$

இச்சமன்பாட்டில், இடப்பக்கம் x –ன் சார்பாகவும், வலப்பக்கம் y-ன் சார்பாகவும் உள்ளன. எனவே நாம், அவைகளைத் தனித்தனியே (k^2) எனும் மாறிலிக்குச் சமமாகக் கருதலாம். அதாவது,

$$\frac{1}{x}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{v^2}=k^2$$

=> $$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\left[\frac{\omega^2}{v^2}-k^2\right]x=0 \qquad -14$$

மற்றும்,

$$\frac{-1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=k^2$$

=> $$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 y = 0 \qquad -15$$

சமன்பாடுகள் 14 மற்றும் 15ன் தீர்வுகளை பின்வருமாறு வெளிப்படுத்தலாம்.

அதாவது,

$$X = B \sin\left[\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{v^2} - k^2\right)} x + \delta_x\right] \qquad -16$$

$$Y = (\sin(ky + \delta_y) \qquad -17$$

இங்கு,

B, C, δ_x மற்றும் δ_y என்பன யாதாமொரு மாறிலிகளாகும்.

x=0 மற்றும் x=a எனும்போது u = 0; என்ற இந்த நிபந்தனையின்படி, சமன்பாடு 16ல் நமக்குக் கிடைப்பது,

δ_x=0 மற்றும்

$$a\left[\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{v^2} - k^2\right)} = m\pi\right] \qquad -18$$

(இங்கு m = 1, 2,3)

$$\therefore x_m = B \text{ Sin} \frac{m\pi x}{a}$$

மற்றும்

X - ன் பொதுவான தீர்வானது

$$X = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \text{ Sin} \frac{m\pi x}{a} \qquad -19$$

y = 0 மற்றும் y = b எனும் போது u = 0 என்ற நிபந்தனையின்படி, சமன்பாடு (17)-ல் நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\delta y = 0 \text{ மற்றும் } kb = n\pi;\ n = 1, 2, 3 \qquad -20$$

எனவே,

$$Y_n = C_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi y}{b} \qquad -21$$

மற்றும்,

'y'-ன் பொதுவான தீர்வானது,

$$Y = \sum_n Y_n = \sum_n C_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi y}{b} \qquad -22$$

'ω'-ன் மதிப்பானது, சமன்பாடு (17)-ன் மூலமாக,

$$\left(\frac{\omega^2}{v^2} - k^2\right).a^2 = m^2\,\pi^2$$

அல்லது $\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + k^2$

'k'ன் மதிப்பை, சமன்பாடு (19)லிருந்து பிரதியிடும்போது,

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

அல்லது,

$$\omega = V\,\pi \sqrt{\left\{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right\}} = \omega_{mn} \text{ (எனக் கருதுக)} \qquad -23$$

இச்சமன்பாடானது, கோண அலைவெண்களைக் குறிக்கிறது. எனவே, அதிர்வடையும் ஒரு மென்படலத்தின் முழுத்தீர்வானது,

$$u = X(x)\;Y(y)\;\tau(t)$$

$$= \sum_m B_m \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{a} \sum_n C_n \frac{n\pi y}{b}\ \{A_1 \operatorname{Cos} \omega_{mn} t + A_2 \operatorname{Sin} \omega_{mn} t\} \qquad -24$$

$$= \sum_m \sum_n [A_{mn} \cos\omega_{mn} t + B_{mn} \sin\omega_{mn} t] \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad -25$$

இங்கு A_{mn} மற்றும் B_{mn}-கள் யாதாமொரு மாறிலிகள். இவற்றின் மதிப்புகளை, திசைவேகம் மற்றும் இடப்பெயர்ச்சி ஆகியவற்றின் ஆரம்ப நிபந்தனைகளின் உதவியால் கண்டறியலாம்.

$t = 0$ எனில்,

$$\text{இடப்பெயர்ச்சி } u(x,y,t) = u_0 \quad --- 26$$

$$\text{திசைவேகம் } u(x,y,t) = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = u_0 \quad --- 27$$

$t = 0$ எனில், ; $u = u_0$

$\Rightarrow$ சமன்பாடு (22)-ஆனது,

$$u_0 = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \frac{n\pi y}{b} \quad --- 28$$

இருபக்கமும், $\sin\frac{m\pi x}{a}$ -ல் பெருக்கலுக்கு உட்படுத்தி, அதனை, $x=0$ மற்றும் $x=a$ எனும் எல்லைக்குள் வகைக்கெழு காண, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\sum_n A_{mn} \sin\frac{n\pi y}{b} = \frac{2}{a}\int_0^a u_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx \quad --- 29$$

இச்சமன்பாட்டை, $\sin\frac{n\pi y}{b}$-ல் பெருக்கி, $y = 0$ மற்றும் $y = b$ எனும் எல்லையில் வகைக்கெழு காண,

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b u_0 \, Sin \, \frac{m\pi x}{a} \, Sin \frac{n\pi y}{b} dxdy \qquad \text{--- } 30$$

இதே போல,

$$B_{mn} = \frac{4}{ab\omega_{mn}} \int_0^a \int_0^b u_0 \, Sin \, \frac{m\pi x}{a} \, Sin \frac{n\pi y}{b} dxdy \qquad \text{--- } 31$$

இந்த A_{mn} மற்றும் B_{mn} மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி, சமன்பாடு (22), தேவையான தீர்வைத் தருகிறது.

3.18 வட்டவடிவ மென்படலத்தின் அதிர்வுகள்

இரண்டளவை வெளியில் (Two-dimensional) மென்படலத்தின் அதிர்வுகளுக்கான, அடிப்படை சமன்பாடானது,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{--- } (1)$$

வட்டமென்படலத்தில், கோண தூர ஆயக்கூறுகளான (r, ϕ)-வை நாம் பயன்படுத்தலாம்.

அதாவது,

$x = r \cos \theta; \; y = r \, Sin\theta$

சமன்பாடு (1)-ஐ கார்ட்டீசியன் கோணதூர ஆயக்கூறுகளுக்கு உருமாற்றம் செய்தால், நமக்கு,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{--- } (2)$$

நாம் இங்கு, இயக்கமானது, ஆதியிலிருந்து சமச்சீரான முறையில் தொடர்வதாகக் கருதினால், மென்படலத்தின் இடப்பெயர்ச்சியானது (μ') r மற்றும் r - ன் சார்பாகவும், 'θ' எனும் கோணத்தை சாராமலும் இருக்கும் இந்த இடப்பெயர்ச்சியானது,

$$u = u\,(r,t) \qquad \text{--- (3)}$$

எனவே,

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0;$$

சமன்பாடு (2) ஆனது, சமச்சீரான அதிர்வுகளால், பின்வருமாறு மாற்றம் கொள்கிறது.

$$\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\ \left(r\frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{--- (4)}$$

மாறிலிகளைப் பிரிக்கும் முறையின்படி,

$$u\,(r,t) = R(r)\ \tau(t) \qquad \text{--- (5)}$$

எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

இங்கு, 'R' – என்பது 'r'-ன் சார்பு மட்டுமே;

τ-என்பது 't'-ன் சார்பு மட்டுமே;

(5)-ஐ (4)-ல் பிரதியிட்டு, Rτ-வால் வகுத்திட,

$$\frac{1}{R}\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\ \left(r\frac{\partial R}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2 \tau}\ \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \qquad \text{--- (6)}$$

இச்சமன்பாடானது, இடதுபுறம் r-ன் சார்பாகவும், வலதுபுறம் 't'-ன் சார்பாகவும் உள்ளது. எனவே, ஒவ்வொரு புறமும் $\left(\frac{-\omega^2}{v^2}\right)$ எனும் ஒரே மாறிலிக்குச் சமமாகக் கருதப்படுகிறது.

அதாவது,

$$\frac{1}{R}\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\ \left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{-\omega^2}{v^2} \quad \text{--- (7)}$$

மற்றும்,

$$\frac{1}{V^2\tau}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} = \frac{-\omega^2}{v^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} + \omega^2\,\tau = 0 \quad \text{--- (8)}$$

சமன்பாடு (8) ஆனது. செவ்வக மென்படலத்தின் சார்பைப் போலவே அமைந்துள்ளது. எனவே, இதன் தீர்வானது,

$$\tau = Ae^{\pm i\omega t} = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t \quad \text{--- (9)}$$

சமன்பாடு (7)-ஐ, பின்வருமாறு வெளிப்படுத்தலாம்

$$\frac{1}{R}\ \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\omega^2}{v^2}R = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\omega^2}{v^2}R = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + k^2 R = 0 \quad \text{--- (10)}$$

இங்கு

$$k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v} \quad \text{--- (11)}$$

சமன்பாடு (8) ஆனது, சுழிய வரிசையுடைய பெஸ்ஸல் (Bessel's) சார்பாகும். இதன் பொதுத்தீர்வானது,

$$R = BJ_0\,(kr) + CY_0\,(kr) \quad \text{--- (12)}$$

இங்கு 'B' மற்றும் 'C' யாதாமொரு மாறிலிகள். 'J_0' மற்றும் 'Y_0' – சுழிய வரிசையுடைய பெஸ்ஸல் சார்புகளாகும்.

r = 0 எனும் ஆதிப்புள்ளில் அதிர்வின் வீச்சம் ஒரு முடிவுள்ள (Finite) நிலையில் இருந்தால், R-ம் ஒரு முடிவுள்ளதாகவே இருக்கும்.

ஆனால், $r \rightarrow 0$ எனில்,

$$Y_0\,(kr) \rightarrow \infty$$

எனவே $C = 0$.

சமன்பாடு (12) ஆனது, பின்வருமாறு மாற்றம் கொள்கிறது.

$$R = BJ_0\,(kr) \quad \text{--- (13)}$$

'a' என்பது அம்மென்படலத்தின் ஆரம் எனில், அதிர்வுகளின் வீச்சமானது $r = a$ ஆக இருக்கும்போது, சுழியமாக இருக்கும்.

அதாவது,

$$BJ_0\,(ka) = 0 \quad \text{--- (14)}$$

$$\Rightarrow J_0\,(ka) = 0 \quad \text{--- (15)}$$

$$\therefore (B \neq 0)$$

பெஸ்ஸல் சார்புகளின்படி, சமன்பாடு (14) ஆனது, ka-ன் மதிப்புகளானது, 2.404, 5.520, 8.653, 14.93.., ஆக இருந்தால் மட்டுமே முழுமையடையும். எனவே, இதைப் பொறுத்து, அடிப்படை கோண அலைவெண் (ω_1) ஆனது,

$$\omega_1 = kv = \frac{2.404V}{a} \quad \text{--- (16)}$$

மற்ற கோண அலைவெண்களானது, ka-யின் பிற பாதிப்புகளைக் கொண்டு மதிப்பிடப்படுகின்றது. இங்கு இயற்கை அலைவெண்களானது முடிவில்லா எண்ணிக்கையில் உள்ளது தெளிவாகின்றது. எனவே ω-ன் தீர்வுகள் அனைத்தும் ω_n எனக் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

எனவே, சமன்பாடு (11)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 'R'-ன் பொதுவான தீர்வானது, பின்வருமாறு மாற்றம் செய்யப்படுகின்றது.

$$R = \sum_n B_n J_0 (k_n r) = \sum_n B_n J_0 \left(\frac{\omega_n r}{V}\right) \quad \text{--- (17)}$$

இதன் முழுமையான தீர்வானது,

$$u = R\tau = \sum_{n=1}^{\infty} (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) B_n J_0 \left(\frac{\omega_n r}{V}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t) J_0 \left(\frac{\omega_n r}{V}\right) \quad \text{-- (18) a}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos vk_n t + D_n \sin vk_n t) J_0 (k_n r) \quad \text{-- (18) b}$$

$$\therefore \left(k_n = \frac{w_n}{V} \right)$$

யாதாமொரு மாறிலிகளான 'C_n' மற்றும் 'D_n' களைப் பின்வருமாறு தீர்வு காணலாம்.

ஆரம்ப இடப்பெயர்ச்சி, t = 0 ஆக இருக்கும்போது,

$$u = u_0 (r)$$

மற்றும்,

$$\text{ஆரம்ப திசைவேகம்} = \frac{du}{dt} = u (r, 0)$$

$$= u_0 (t = 0)$$

t = 0 மற்றும் $u = u_0$ என சமன்பாடு (17-b)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$u_0 = \sum_n C_n J_0 (k_n r) \quad \text{--- (19)}$$

இருபுறங்களிலும், rJ_0 $(k_m r)$ எனும் இந்த மாறிலியால் பெருக்கி, சுழியத்திலிருந்து a வரை தொகையிடல் காண, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\int_0^G u_0 r \ J_0 (k_m r) \, d\tau = \sum_n C_n \int_0^a r \ J_0 (k_m r) J_0 (k_n r) \, dr$$

$$= C_m \int_0^a r\left[J_o(R_m r)\right]^2 dr.$$

$$= C_m \frac{a^2}{2} J_1^2 (k_m a)$$

(பெஸ்ஸல் சார்பின் செங்குத்துப் பண்பை பயன்படுத்தினால்)

$$C_m = \frac{2}{a^2 J_1^2)k_m a)} \int_0^a u_o \ r \ j_o (k_m r) \, dr.$$

m = n எனில்,

$$C_n = \frac{2}{a^2\, j_1^{\,2}\,(k_n a)} \int_0^a u_o\, r\, j_o\,(k_n r)\, dr \qquad \text{--- (20)}$$

சமன்பாடு 17b ஐ 't' ன் மதிப்பிற்கு வகைக்கெழு காண, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\dot{U} \sum_{n=1}^{\varpi} (-C_n\, v\, k_n \sin v\, k_n\, t + v\, k_n\, D_n\, \text{ws}\, v\, k_n\, t)\, J_o\,(k_n r) \qquad \text{--- (21)}$$

இங்கு U = $\dot{U}_o$ (t = 0 ஆக உள்ளபோது) எனப்பயன்படுத்தினால்,

$$\dot{U}_o = Z\, V\, k_n\, D_n\, J_o\,(k_n r)$$

r J_o (k_mr) – ஆல் பெருக்கி, 0 விலிருந்து 9 வரை, தொகையிடல் காண, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\int_o^a u_o\, r\, j_o\,(k_m r)\, dr = \sum_n v\, k_n\, D_n \int_o^a r\, j_o\,(k_n r)\, j_o(k_m\, r)\, dr$$

$$= v\, k_m\, D_m \int_o^a r\, J_o^{\,2}\,(k_m r)\, dr$$

$$= v\, k_m\, D_m\, \frac{a^2}{2} J_1^{\,2}\,(k_m a)$$

$$D_m = \frac{2}{v\, k_m\, a^2\, J_1^{\,2}\,(k_m a)} \int_o^a U_o\, r\, j_o\,(k_m\, r)\, dr$$

m = n எனில்,

$$D_n = \frac{2}{v\, k_n\, a^2\, J_1^{\,2}\,(k_n a)} \int_o^a u_o\, r\, J_o\,(k_n\, r)\, dr \qquad \text{--- (22)}$$

C_n மற்றும் D_n ன் இந்த மதிப்புகளைக் கொண்டு, சமன்பாடு 17a ல் தேவையான தீர்வைக் காணலாம்.

3.19 வெப்பப் பரவலின் பரவல் சமன்பாடு அல்லது ஃபூரியர் சமன்பாடு

அதிக வெப்பமுள்ள பகுதிகளிலிருந்து, குறை வெப்பப்பகுதிகளுக்கு வெப்பப்பரவல் நிகழும் என்பதனை நாம் அறிவோம்.

சில பரிசோதனைகளும், வெப்பப்பரவலின் வீதமானது, வெப்ப சரிவிற்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும் என்பதைப் புலப்படுத்துகின்றன. எனவே, வெப்பப்பரவலின் திசை வேகமானது,

$$v = - K \text{ grad } u \qquad \text{--- (1)}$$

இங்கு K என்பது, ஒரு பொருளின் வெப்பக்கடத்தி மாறிலியாகும்.

u(x,y,z,t) என்பது (x,y,z) எனும் நிலையிலும், நேரம் 't' யிலும் உள்ள வெப்பமாகும். அப்பொருளின் 's' எனும் மேற்பரப்பில், 'V' எனும் ஒரு சிறு கனஅளவுப் பகுதியைக் கருதுவோம். இந்த 's' எனும் மேற்பரப்பில் 'ds' எனும் சிறு உறுப்பினை நாம் கருதுவோம். அதன் திசையானது, செங்குத்துக்கு வெளிநோக்கி இருக்கட்டும். இதன் ஓரலகு வெக்டார் '$\hat{n}$' எனில், ஓரலகு நேரத்தில்

's' எனும் மேற்பரப்பில் வெளிப்படும் வெப்பத்தின் அளவானது,

$$H = \iint_S v \cdot ds = \iint_S v \cdot \hat{n} \, ds \qquad \text{--- (2)}$$

காஸ் விரிவுத் தேற்றத்தின்படி,

$$\iint_S A \cdot ds = \iiint_S \text{div } A \, dv$$

$$H = \iint_{s} V.\hat{n}\, ds = \iiint_{v} div\,(v)\, dv$$

$$= \iiint_{v} div\,(-K grad u)\, dv$$

$$= -K \iiint_{v} div\ grad\ u\ dv$$

$$= -K \iiint_{v} \nabla .\ \nabla u\ dv$$

$$= -K \iiint_{v} \nabla^{2} .\ u\ dv \qquad \text{--- (3)}$$

'ρ' என்பது அப்பொருளின் அடர்த்தி; மற்றும் 'C' என்பது அப்பொருளின் தன்வெப்பம் எனில்,

'V' எனும் கன அளவில் உள்ளிழுக்கப்படும் வெப்பத்தின் மொத்த அளவானது,

$$Q = \iiint_{v} (\rho dv)\, Cu = \iiint_{v} \rho Cudv \qquad \text{--- (4)}$$

எனவே, வெப்பக்குறைவு வீதமானது,

$$H = \frac{\partial Q}{\partial t} = -\iiint_{v} \rho C \frac{\partial u}{\partial t} .dv \qquad \text{--- (5)}$$

இந்த வெப்பக்குறைவு வீதமானது, 'V' எனும் கன அளவில் ஓரலகு நேரத்தில் வெளிப்படும் வெப்பத்தின் மொத்த அளவிற்கு சமம் எனக் கருதலாம். எனவே,

$$-K \iiint_v \nabla^2 . u \, dv = -\iiint_v \rho C \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

அல்லது,

$$\iiint_v \left(K\nabla^2 u - \rho C \frac{\partial u}{\partial t} \right) dv = 0 \qquad \text{--- (6)}$$

'dv' என்பது யாதாமொரு கன அளவு கொண்ட ஒரு மூலகம் எனில், சமன்பாடு (6) ஆனது, அதன் தொகையிடல் பகுதி சுழியமாக இருந்தால் மட்டுமே, தீர்வு காண இயலும்.

அதாவது,

$$K\nabla^2 u - \rho C \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

அல்லது,

$$\nabla^2 u = \frac{\rho C}{K} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h^2} \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{--- (7)}$$

இங்கு,

$h^2 = \frac{K}{\rho C}$ ஒரு மாறிலி.

இம்மாறிலியானது, அப்பொருளின் பரவுதிறன் எனப்படுகிறது. சமன்பாடு (7) ஆனது, வெப்பப்பரவலின் மூவளவையில் பரவல் சமன்பாடு அல்லது, ∴பூரியர் சமன்பாடு என அழைக்கப்படுகிறது.

கார்ட்டீசியன் ஆயக்கூறுகளினால், சமன்பாடு (7)-ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{--- (8)}$$

தீர்வு: 1

அப்பொருளின் வெப்பமானது, சாராநிலையில் இருந்தால், (அதாவது) '2' திசையில் வெப்பப்பரவல் இருக்காது. எனவே,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

எனவே சமன்பாடு (8) ஆனது,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{--- (9)}$$

அதாவது,

x-y தளத்திற்கு இணையாக, இருபரிமாண (Two dimensional) வெப்பப்பரவல் சமன்பாட்டினைக் குறிக்கிறது.

தீர்வு II:

ஒரு திசையில் மட்டும் வெப்பப் பரவல் நடைபெறுகிறது எனக் கருதினால், அதாவது x – அச்சில்.

இங்கு,

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ எனக் கருதலாம். எனவே, சமன்பாடு (8) ஆனது,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{--- (10)}$$

இது ஒருபரிமாண வெப்பப்பரவல் சமன்பாடு எனக் கருதப்படுகிறது.

தீர்வு III:

வெப்பப்பரவல், ஒரே சீராக இருக்குமானால்,

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$; எனவே சமன்பாடு (7) ஆனது, லாப்லாஸ் சமன்பாடாக மாற்றம் கொள்கிறது.

அதாவது, $\nabla^2 u = 0$ --- (11)

3.20 வெப்பப் பரவல் சமன்பாட்டின் தீர்வு: மாறிலிகளை பிரித்தெடுக்கும் முறை (Solution of heat flow equation: Method of Separation of variables)

முப்பரிமாண வெளியில், வெப்பப்பரவல் சமன்பாடானது,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{--- (1)}$$

இச்சமன்பாட்டின் தீர்வானது,

$$u(x, y, z, t) = \varphi(x,y,z)\,\tau(t) \quad \text{--- (2)}$$

இங்கு 'φ' யானது (x,y,z)-ன் சார்பாகவும், Δ ஆனது 't'-ன் சார்பாகவும் உள்ளன. சமன்பாடு (2)-ஐ (1)-ல் பிரதியிட்டு, 'φτ'ஆல் வகுக்கும்போது நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\frac{1}{\varphi}\nabla^2\varphi = \frac{1}{h^2}\ \frac{1}{\tau}\ \frac{\partial\tau}{\partial t} \qquad \text{--- (3)}$$

இங்கு இடப்புறமானது (x., y, z) எனும் மாறிகளின் சார்பாகவும், வலப்புறம் 't'-ன் சார்பாகவும் உள்ளன. ஆகையால் இருபுறமும் ஒரே மாறிலியான $(-k^2)$க்கு சமமாக இருக்கும். அதாவது,

$$\frac{1}{\varphi}\nabla^2\varphi = -k^2\ ;\ \nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \qquad \text{--- (4)}$$

மற்றும்

$$\frac{1}{h^2\tau}\ \frac{\partial\tau}{\partial t} = -k^2\ :\ \frac{\partial\tau}{\partial t} = -k^2h^2\tau \qquad \text{--- (5)}$$

சமன்பாடு (4) ஆனது 'ஹெல்மோல்ட்ஸ்' சமன்பாடாகும். இதனையே மீண்டும், மாறிகளால் பிரித்தெடுக்கும் முறையின்படி தீர்வு காணலாம்.

சமன்பாடு (8)-ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{\partial\tau}{\tau} = -k^2h^2t \qquad \text{--- (6)}$$

தொகையிடல் காண,

$$\log\tau = -k^2h^2t + \log A.$$

இங்கு 'log A' என்பது, தொயையிடலின் மாறிலி. சமன்பாடு (6)லிருந்து

$$\tau = Ae^{-k^2h^2t} \qquad \text{--- (7)}$$

சமன்பாடு (1)ன் முழுமையான தீர்வானது,

$$u = \phi(r,y,z)\tau(t) = \phi(x,y,z)e^{-k^2h^2t}$$

இங்கு மாறிலியாக '$-k^2$' என எதிர்மறையாக குறிப்பிடக்காரணம், நேரம் கூடக்கூட அப்பொருளின் வெப்பம் குறையும் எனக் குறிப்பிடுவதற்காக.

3.21 ஒருபரிமாணவெளியில் வெப்பப் பரவல் சமன்பாடு

(Heat flow equation in one dimension)

'l' எனும் ஒரு திட்டமான நீளமும், ஒரே சீரான பகுதியும் உடைய ஒரு கம்பியை நாம் கருதுவோம். அதன் விட்டமானது, அதன் வளைவரையின் ஆரத்தை விட சிறியதாகும். அக்கம்பியின் ஆரம்ப வெப்பநிலை கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கருதுவோம். மற்றும் அதன் முனைகள் இரண்டிலும் வெப்பநிலையானது சுழியாக இருக்கட்டும். அக்கம்பியின் ஒரு முனையானது ஆதியிலும் மற்றும் அதன் தூரங்களை 'x' எனவும் குறிப்பிட்டால், ஓரளவை வெளியில், இவ்வெப்பப் பரவலின் சமன்பாடானது.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \ldots.1$$

அதன் எல்லைக்குரிய நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு,

$u = 0 \quad ; x = 0$ எனில்
$\Big\}$ 't' ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் 2
$u = 0 \quad ; x = l$ எனில்

$u = f(x) \; ; \; t = 0$ ஆக இருக்கும் போது

மற்றும்

$u \neq \infty ; \; t = \infty$ ஆக இருக்கும் போது 3

சமன்பாடு (1)ன் தீர்வானது பின் வருமாறு வெளிப்படுத்தப்படுகிறது.

$u(x, t) = \phi(x)\, \tau(t)$ 4

இரு சமன்பாட்டினை (1)-ல் பிரதியிட்டு, φτஆல் அனைத்தையும் வகுக்கும் போது நமக்குக் கிடைப்பது.

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2 \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} \qquad .....5$$

இங்கு இடப்புறமானது 'x' ன் சார்பாகவும், வலப்புறமானது 't'-ன் சார்பாகவும் உள்ளது. எனவே இருபுறமும் ஒரே மாறிலியான $(-\alpha^2)$ க்குச் சமமாக இருக்கும். அதாவது,

$$\frac{1}{\varphi} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = = -\alpha^2$$

அல்லது $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha^2 \phi = 0$ 6

மற்றும் $\dfrac{1}{h^2 \tau} \quad \dfrac{\partial \tau}{\partial t} = -\alpha^2$

அல்லது $\dfrac{\partial \tau}{\tau} = -\alpha^2 h^2 \partial t$ 7

தொகையிடல் காண,

$$\log \tau = -\alpha^2 h^2 t + \log C$$

$$\tau = C e^{-\alpha^2 h^2 t} \qquad \ldots\ldots 8$$

சமன்பாடு (6)-ன் பொதுவான தீர்வானது,

$$\phi\, A \sin \alpha x + \quad B \cos \alpha x \qquad \ldots\ldots 9$$

இங்கு 'ϕ'யானது, சமன்பாடு 2-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளுக்கு கட்டுப்படல் வேண்டும்.

முதல் நிபந்தனையானது,

$\phi = 0$; $x = 0$ எனில்

எனவே $B = 0$

மற்றும் $\phi = 0$; $x = l$ எனில்,

$$A \sin \alpha \; l = 0$$

அல்லது $\alpha l = r\pi \; (r = 0,1,2,3 \ldots\ldots)$.

எனவே,

$$\alpha = \frac{r\pi}{l} \qquad \ldots\ldots 10$$

γ-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் சமன்பாடு 6-ன் தீர்வானது.

$$\phi_r = A_r \sin \frac{r \; \pi \; x}{l} \qquad \ldots . 11$$

இங்கு 'A_r என்பது யாதாமொரு மாறிலி. சமன்பாடு 10 லிருந்து α-ன் மதிப்பை, சமன்பாடு 8 ல் பிரதியிடும்போது, நமக்கு கிடைப்பது,

$$\tau = C e^{-(r\pi h/l)^2 t}$$

சமன்பாடுகள் (4), (11) மற்றும் (12)களிலிருந்து சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வை, r-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் பின் வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$u_r = A_r C e^{-(r\pi h/l)^2 t} \sin\frac{r\pi x}{l}\alpha$$

$$= N_r e^{-(r\pi h/l)^2 t} \sin\frac{r\pi x}{l} \qquad \text{.........} 13$$

இங்கு

$N_r = A_r\, C \rightarrow$ ஒரு புதிய யாதாமொரு மாறிலி.

'r' – ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், கூட்டுத் தொகை காண, சமன்பாடு (1)ன் பொதுவான தீர்வை பின்வருமாறு வெளிப்படுத்தலாம்.

$$u_r = \sum_{r=1}^{\infty} N_r e^{-(r\pi h/l)^2 t} \sin\frac{r\pi x}{l} \qquad \text{..........(14)}$$

(இங்கு 'r = 0' எனும் மதிப்பால் வரும் சார்பானது நீக்கப்படுகின்றது).

'N_r' எனும் இந்த மாறிலியின் மதிப்பானது, சமன்பாடு (3)ல் உள்ள நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி, தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

அதாவது,

$u = f(x),\ t = 0$ எனில்,

எனவே சமன்பாடு (14) ஆனது,

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} N_r \sin\frac{r\pi x}{l} \qquad \text{----------(15)}$$

இச்சமன்பாடு ∴பூரியரின் சைன் தொடர்களாகும்.

'A_r' – ன் மதிப்பைக் காண, இருபுறங்களிலும் $(\sin\frac{ns\pi x}{l})$ - ஆல் பெருக்கி, 0லிருந்து 'l' வரையிலான எல்லைவரை தொகையிட,

$$\int_0^l f(x)\sin\frac{M\pi x}{l}dx = \sum_{r=1}^{\infty} N_r \int_0^l \sin\frac{r\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{1}{2}\delta_{m1r} = N_m \cdot {}^{l}\!/_{2}$$

$$N_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx.$$

'M' – ஐ 'r' ஆக மாற்றி எழுத, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$N_r = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{r\pi x}{l}dx \qquad \text{----------(16)}$$

இந்த 'N_r' – ன் மதிப்பை, சமன்பாடு (14) – ல் நாம் பிரதியிட, நமக்கு வகைக் கெழு சமன்பாடு (1)ன் தேவையான தீர்வு கிடைக்கும்.

அக்கம்பியின் முனைகளை, சுழிய வெப்பநிலையில் வைத்திருப்பதற்குப் பதிலாக, வெப்பமே உட்புக முடியாத நிலையில் இருந்தால், இதன் எல்லை நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \ ; \ x=0 \text{ எனில்}\\ \frac{\partial u}{\partial x}=0 \ ; \ x=l \text{ எனில்}\end{array}\right\} \text{அனைத்து 't' ன் மதிப்புகளுக்கும்} \qquad \text{--------(17)}$$

$$\left.\begin{array}{l}u = f(x) \ ; t=0 \text{ ஆக இருக்கும்போது}\\ u \neq \infty \ ; t=\infty \text{ ஆக இருக்கும்போது}\end{array}\right\} \text{அனைத்து 't' ன் மதிப்புகளுக்கு} \qquad \text{--------(18)}$$

எனவே,

$$u = C e^{-\alpha^2 h^2 t}\phi(x).$$

இங்கு

$$\phi = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x.$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x \qquad \text{---------(19)}$$

முதல் நிபந்தனையான,

x = 0 எனில், $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

இதிலிருந்து, A=0 எனத் தீர்வு கிடைக்கிறது.

இரண்டாவது நிபந்தனையான

x = l எனில், $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ இதிலிருந்து,

$\beta \sin \alpha l = 0$

$\Rightarrow B \neq 0$; எனவே, $\sin \alpha l = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \alpha l = r\pi \\ \text{அதாவது } \alpha = \frac{r\pi}{l} \\ r = 0,1,2,3,\ldots \end{array}\right\} \quad \text{----------(20)}$$

எனவே, பொதுவான ஒரு தீர்வானது,

$$u = N_0 + \sum_{r=1}^{\infty} N_r e^{-(r\pi h/l)^2 t} \cos \frac{r\pi x}{l} \quad \text{---------(21)}$$

என்னும் நிபந்தனையால்

t =0 எனில், u = f(x) எனும் நிபந்தனையால்

$$f(x) = N_0 \sum_{r=1}^{\infty} N_r \cos \frac{r\pi x}{l} \quad \text{----------(22)}$$

மேலுள்ள தொடரானது. அரைப்பகுதி கொசைன் தொடராகும். சமன்பாடு (22) –ஐ, 0விலிருந்து 'l' வரையிலான எல்லையில் தொகையிட

No – ன் மதிப்பு வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது,

$$\int_0^l f(x)dx = N_0 \int_0^l dx$$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx \qquad \text{-------(23)}$$

மாறிலி N_rன் மதிப்பை, சமன்பாடு (22) – ஐ இருபுறமும் $\cos\frac{r\pi x}{l}$ - ஆல் பெருக்கி, (1)லிருந்து l – வரையிலான எல்லையில் தொகையிட, அறியலாம்.

எனவே,

$$N_r = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{r\pi x}{l}dx \qquad \text{-------(24)}$$

'N_0' மற்றும் 'N_r 'ன் மதிப்புகளை, சமன்பாடு (21) – ல் பிரதியிட, நமக்குத் தேவையான தீர்வை நாம் பெறலாம்.

3.22 இருபரிமாண வெளியில் வெப்பப்பரவல் சமன்பாடு

(Two dimensional Heat – flow equation)

இரண்டளவை வெளியில், வெப்பப்பரவல் சமன்பாட்டின் தீர்வை விளக்க, கீழ்க்கொடுக்கப்பட்டுள்ள உதாரணத்தை நாம் கருதுவோம்.

உதாரணம் :

வெப்பம் உட்புக முடியாத மேற்பரப்பினை உடைய ஒரு மெல்லிய செவ்வகத் தகடானது, t = 0 ஆக உள்ள போது, f(x,y) எனும் யாதாமொரு வெப்பப்பரவலைக் கொண்டுள்ளது. அதன் நான்கு (x=0, x=a, y=0, y=b) முனைகளும் சுழிய வெப்பநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. 't' எனும் நேரத்திற்குப் பிறகு, அத்தகட்டின் வெப்பநிலையைக் காண்க.

தீர்வு :

இரண்டளவை வெளியில், கார்ட்டீசியன் ஆயக்கூறுகளின் படி, அலையியக்க சமன்பாடானது,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad \ldots\ldots(1)$$

இதன் எல்லை நிபந்தனைகளாவன

(i) $x = 0$ எனில் ; $y=0$; $0 \le y \le b$.

(ii) $x=a$ எனில் $u=0$; $0 \le y \le b$

(iii) $y = 0$ எனில் $u=0$; $0 \le x \le a$.

(iv) $y = b$ எனில் $u=0$; $0 \le x \le a$.

} 't' ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்

முதல் நிபந்தனைகளாவன

$$u = \begin{cases} f(x,y)\ ;\ 0 \le x \le a,\quad 0 \le y \le a,\quad 0 \le y \le b\ ; t = 0 \\ 0 \qquad t = 0 \end{cases}$$ எனில் ......(3)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளின்படி, சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வுகளைக் காண, மாறிகளால் பிரித்தெடுக்கும் முறையினைப் பின்பற்றலாம்.

அதாவது $u = X(x)\ \ Y(y)\ \tau(t)$ .... (4)

இங்கு

X என்பது x ன் சார்பு மட்டுமே ;

Y என்பது y-ன் சார்பு மட்டுமே ;

τ என்பது t- ன் சார்பு மட்டுமே ;

சமன்பாடு (4)ஐ (1)ல் பிரதியிட்டு, 'x,y, τ'-ஆல் இருபுறமும் வகுத்திட, நமக்குக் கிடைப்பது.

$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2\tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}$ இங்கு இடது புறமானது, (x,y)-ன் சார்பாகவும், வலது புறம் 't' - ன் சார்பாகவும் உள்ளன. எனவே, இருபுறமும், ஒரே மாறிலிக்குச் சமமாக இருக்கும். அதாவது, அம்மாறிலியானது.

$$\frac{-\theta}{h^2}$$

எனவே,

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-\frac{\theta}{h^2} \qquad \ldots\ldots.(5)$$

$\frac{1}{h^2\tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\theta}{h^2}$ அல்லது

$$\frac{1}{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}=-\theta \qquad \ldots\ldots.(6)$$

சமன்பாடு (6)-ஐ பின்வருமாறு வெளிப்படுத்தலாம்.

$$\frac{\partial \tau}{\tau} = -\theta\, \partial t$$

இச்சமன்பாட்டினை தொகையிட, நமக்குக் கிடைப்பது

$$\log_e \tau = -\theta\, t + \log A \qquad \ldots\ldots\ldots.(7)$$

இங்கு 'log A' தொகையிடலின் மாறிலியாகும். சமன்பாடு (7)-லிருந்து

$$\tau = Ae^{-\theta t} \qquad \ldots\ldots\ldots(8)$$

சமன்பாடு (6) ஆனது

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\theta}{h^2}=-\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \qquad \ldots\ldots\ (9)$$

மேற்கூறிய அதே காரணங்களைப் பயன்படுத்தி, இருபுறமும் ஒரே மாறிலிக்கு சமமாகக் கருத, அதாவது k^2-எனும் மாறிலிக்கு சமம் எனக் கருதினால்,

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\theta}{h^2}=k^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\left(\frac{\theta}{h^2}-k^2\right)x=0 \qquad \ldots\ldots(10)$$

மற்றும்,

$$\frac{-1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+k^2 y=0 \qquad \ldots\ldots.(11)$$

இங்கு,

$$\frac{\theta}{h^2} - k^2 = q^2 \qquad \ldots\ldots\ldots.(12)$$

எனப் பிரதியிட,

சமன்பாடு (10) ஆனது,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + q^2 X = 0 \qquad \ldots\ldots.(13)$$

சமன்பாடுகள் (11) மற்றும் (13)-ன் தீர்வுகளை பின்வருமாறு வெளிப்படுத்தலாம்.

$$X = A_1 \sin q\,x + B_1 \cos q\,x \qquad \ldots\ldots\ldots (14)$$

$$Y = A_2 \text{ Sin } ky + B_2 \cos k\,y \qquad \ldots\ldots\ldots.(15)$$

இங்கு 'A' மற்றும் 'B' யாதொரு மாறிலியாகும். சமன்பாடுகள் 2(i), 2(iii)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளை நாம் பயன்படுத்தும் போது,

$$A_1 \text{ Sin } q\,a = 0$$
$$\Rightarrow q\,a = m\,\pi \quad (\therefore A_1 \neq 0)$$
$$\Rightarrow q = \frac{m\pi}{a} (m, 0, 1, 2........)$$

மற்றும்

$$A_2 \text{ Sin } k\,b = 0$$

$$\Rightarrow k\,b = n\,\pi\,(\because A_2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{b} (n = 0, 1, 2, ...)$$

சமன்பாடு 12-ல் இம்மதிப்புகளைப் பிரதியாக்கும் போது, நமக்குக் கிடைப்பது.

$$\theta = h^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] = \theta_{mn} \qquad \ldots\ldots\ldots.(16)$$

'm' மற்றும் 'n' ன் ஒவ்வொரு மதிப்புகளுக்கும், சமன்பாடு (1)-ந்கான, குறிப்பிட்ட தீர்வை நம்மால் காண இயலும். அதாவது,

$$u_{mn} = yx\tau\left(A_1 \sin \frac{m\pi x}{a}\right)\left(A_2 \sin \frac{n\pi y}{b}\right)Ae^{-\theta_{mn}t}$$

$$= N_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi y}{b} e^{-\theta_{mn}t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

இங்கு,

N_{mn} = யாதாமொரு மாறிலி. சமன்பாடு (1)-ன் பொதுவான தீர்வானது, 'm' மற்றும் 'n'-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் சமன்பாடு (1)ல் கிடைக்கும் தீர்வுகளை கூட்டுத்தொகைக்கு உட்படுத்துவதால் கிடைக்கும்.

அதாவது,

$$u = \sum_{m=1}^{\alpha} \sum_{n=1}^{\alpha} N_{mn} e^{-\theta_{mn}t} \quad \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi y}{b} \qquad \ldots\ldots\ldots(18)$$

t = 0 எனில் u = f (x,y) எனும் நிபந்தனையைப் பயன்படுத்தி 'N_{mn}' எனும் மாறிலியின் மதிப்பை வெளிக் கொணர இயலும். எனவே சமன்பாடு
18-லிருந்து

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\alpha} \sum_{n=1}^{\alpha} N_{mn} \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi y}{b} \qquad \ldots\ldots\ldots(19)$$

இருபுறமும் '$\operatorname{Sin} \frac{r\pi x}{a} \operatorname{Sin} \frac{s\pi y}{b}$ (r மற்றும் S-என்பது முழுஎண்கள்)-யால் பெருக்கலுக்கு உட்படுத்தி, கீழ்க்கண்டவாறு தொகையிடல் காண,

அதாவது,

$$\int_0^a \int_0^b f(x,y) \,\text{Sin}\frac{r\pi x}{a}\text{Sin}\frac{s\pi y}{a}\,dxdy$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\alpha} N_{mn}\int_0^a \text{Sin}\frac{m\pi x}{a}\sin r\pi x\,dx\int_0^b \text{Sin}\frac{n\pi y}{b}\text{Sin}\frac{s\pi y}{b}\,dy$$

$$=\sum_{m=1}^{\alpha}\sum_{n=1}^{\alpha} N_{mn}\left(\frac{a}{2}\delta_{m,r}\right)\left(\frac{b}{2}\delta_{n,s}\right)=N_{rs}\left(\frac{ab}{4}\right)$$

$$\Rightarrow N_{r,s}=\frac{4}{ab}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} f(x,y)\,\text{Sin}\frac{r\pi x}{a}\,\text{Sin}\frac{s\pi y}{b}\,dx\,dy$$

r – ஐ 'm'-ஆலும்; 'S'-ஐ 'n'-ஆலும் மாற்றி எழுத நமக்குக் கிடைப்பது.

$$N_{mn}=\frac{4}{ab}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} f(x,y)\,\text{Sin}\frac{m\pi x}{a}\text{Sin}\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy \qquad \ldots\ldots\ldots..(20)$$

இச்சமன்பாட்டினை, சமன்பாடு (18)ல் பிரதியிட சமன்பாடு (1)க்கான முழுமையான தீர்வினை நாம் காணலாம்.

கலைச்சொற்கள்

Abscissa	-	மட்டாயம், கிடைத்தூரம், X-ஆயக்கூறு.
Absolute Convergence	-	அறக்குவிதல்
Absolute value	-	எண் மதிப்பு, எண்ணளவு.
Accuracy	-	துல்லியம்
Actual value	-	உண்மையான மதிப்பு
Aggregate ·	-	மொத்தம்
Algebra	-	இயற்கணிதம்
Alternatively	-	மாறாக
Amplitude	-	வீச்சம்
Analysis of variance	-	மாறுபாட்டின் பகுப்பாய்வு
Analysis	-	பகுவியல்
Apparent	-	வெளிப்படையான
Approximate value	-	தோராய மதிப்பு
Argument of a function	-	சார்பின் மாறி
Argument	-	கோணம் வீச்சு
Array	-	வரிசை
Associative law	-	சேர்ப்பு விதி
Assumption	-	தற்கோள்
Asymmetry	-	சமச் சீரின்மை
Attribute	-	பண்பு
Axis of coordinates	-	கிடை,நிலை அச்சுகள் X.Y–அச்சுகள்
Base	-	அடிஎண், அடிப்பக்கம்
Behaviour	-	பண்பு
Best error	-	உத்தமப் பிழை
Binary operation	-	ஈரிணைச் செய்கை
Binomial coefficient	-	ஈருறுப்புக் குணகம்
Binomial series	-	ஈருறுப்புத் தொடர்
Binomial theorem	-	ஈருறுப்புத்தேற்றம்
Binomial	-	ஈருறுப்பு
Bound	-	வரம்பு
Boundary Point	-	வரம்புப் புள்ளி
Bounded Region	-	வரம்புள்ள பகுதி
Bounded	-	வரம்புள்ள

Calculus	-	நுண் கணிதம்
Centre	-	மையம்
Characteristic equation	-	சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு
Chord	-	நாண்
Circle	-	வட்டம்
Circles-Concentric	-	பொதுமைய வட்டங்கள்
Closed region	-	அடைத்த பகுதி
Coefficient	-	குணகம், கெழு
Cofactor	-	இணைக்காரணி
Collinear points	-	ஒரு கோட்டமைப்புள்ளிகள்
Column matrix	-	நிரல் அணி
Column vector	-	நிரல் வெக்டர்
Column	-	நிரல்
Combination	-	சேர்வு
Common difference	-	பொது வேறுபாடு
Common ratio	-	பொது விகிதம்
Common root	-	பொது மூலம்
Common term	-	பொது உறுப்பு
Commutative law	-	பரிமாற்று விதி (மாற்று விதி)
Comparison test	-	ஒப்பீட்டுச் சோதனை
Complex conjugate number	-	பரிமாற்று சிக்கல் எண்
Complex number conjugate	-	துணையிய சிக்கலெண்
Complex numbers	-	சிக்கல் எண்கள்
Compound expression	-	கலப்பினக் கோவை
Compound number	-	கலப்பின எண்
Computation	-	கணக்கிடுதல்
Conditions	-	நிபந்தனைகள்
Conjugate chord	-	இணை நாண்
Conjugate diameters	-	துணையிய விட்டங்கள்
Conjugate roots	-	இணை மூலங்கள்
Conjugate	-	துணையிய, இணையிய (இணை)
Consec utive numbers	-	அடுத்தடுத்துவரும் எண்கள்
Conservative field	-	காப்பு நிலைப்புலம் அல்லது காப்பு நிலைக்களம்
Consistancy	-	பொருத்தமுடைமை
Constancy of integration	-	தொகை காண் மாறிலி
Constant function	-	மாறாச் சார்பு

Constant	-	மாறாத, மாறிலி
Continuity	-	தொடர்ச்சி
Continuous Function	-	தொடர்ச்சியான சார்பு
Convergence	-	குவிதல்
Co-ordinate -Curves	-	ஆயத்தொலை வளைகோடுகள்
Co-ordinate -Surfaces	-	ஆயத்தொலை மேற் பரப்புகள்
Coordinates -Cartesian	-	தேக்காட்டின் கூறுகள்
Coordinates	-	ஆயக்கூறுகள், அச்சுத்தூரங்கள்
Coordinates -Polar	-	கோணதூரக் கூறுகள்
Coordinates -Rectangular	-	செவ்வகக் கூறுகள்
Curl	-	சுழல்
Curvature Centre of	-	வளைவு மையம், கோட்ட மையம்
Curvature Circle of	-	வளைவு வட்டம்
Curvature Radius of	-	வளைவாரை, கோட்ட ஆரை
Curvature	-	வளைவு
Curve	-	வளைவரை, வளைகோடு
Curved surface	-	வளைபரப்பு
Curvilinear Co-ordinates	-	வளை வரைக் கூறுகள்
Data	-	விவரங்கள்
Decreasing function	-	குறையுஞ் சார்பு
Define	-	வரையறு
Definite integral	-	வரையறுத்தத் தொகை
Definition	-	வரையறை
Dependent variable	-	சார்ந்த மாறி, சார்புடை மாறி
Dependent	-	சார்ந்த
Derivative of a function	-	ஒரு சார்பின் வகைக்கெழு
Derived function	-	வழிச் சார்பு
Determinant of a matrix	-	ஓர் அணியின் அணிக்கோவை
Determinant	-	அணிக்கோவை
Diagonal matrix	-	மூலைவிட்ட அணி
Diagonal of a determinant	-	அணிக்கோவையின் மூலை விட்டம்
Diameter	-	விட்டம்
Difference – Common	-	பொது வேறுபாடு
Difference equation	-	வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு
Difference operator	-	வேறுபாட்டுச் செயலி
Difference	-	வேறுபாடு, வித்தியாசம்

Differentiable function	-	வகையிடத்தக்கச் சார்பு
Differential calculus	-	வகைநுண் கணிதம்
Differential equation	-	வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, வகையீட்டுச் சமன்பாடு
Differential partial	-	பகுதிவகையீட்டுச் சமன்பாடு,
Differential	-	வகைக்கெழு
Differential calculus	-	வகை நுண் கணிதம்
Differential co-efficient	-	வகைக்கெழு, வகையீட்டுக் குணகம்
Differentiation Partial	-	பகுதி வகைக்கெழு காணுதல்
Differentiation Successive	-	அடுத்தடுத்த வகைக்கெழு காணுதல்
Differentiation	-	வகையிடல்
Direction	-	திசை
Directional derivative	-	திசை வகைக்கெழு
Displacement	-	இடப்பெயர்ச்சி
Distribution Normal	-	இயல் நிலைப்பரவல்
Distribution	-	பரவல்
Distributive law	-	பரவு விதி, பங்கீட்டு விதி
Divergence of a vector	-	வெக்டாரின் பாய்வு
Divergence	-	விரிதல்
Divergent series	-	விரி தொடர்
Domain	-	அரங்கம்
Dynamics	-	இயக்கவியல்
Electrical circuit	-	மின்சுற்று
Electrical network	-	மின்வலை அமைப்பு
Element	-	மூலகம்
Elemental volume	-	மூலகப் பருமன்
Ellipse	-	நீள் வட்டம்
Equation Differential	-	வகையீட்டுச் சமன்பாடு
Equation Integral	-	தொகையீட்டுச் சமன்பாடு
Equation Linear	-	ஒருபடிச் சமன்பாடு
Equation Multinomial	-	பல்லுறுப்புச் சமன்பாடு
Equation	-	சமன்பாடு
Even function	-	இரட்டைச் சார்பு
Expansion	-	விரிவு

Exterior point - புறப்புள்ளி
Factor - காரணி
Factorization - காரணிப்படுத்துதல்
Finite differences - திட்டமான வேறுபாடுகள்
Finite set - முடிவுள்ள கணம்
Finite - முடிவுள்ள
Fluid - பாய்மம்
Force - விசை
Forced vibration - திணிப்பதிர்வு
Form - வடிவம், அமைப்பு
Function Analytic - பகுப்புச் சார்பு
Function Bounded - எல்லையுள்ள சார்பு
Function Circular - வட்டச் சார்பு
Function Decreasing - குறையுஞ் சார்பு
Function - சார்பு
General solution - பொதுத் தீர்வு
Generalisation - பொதுவிதி, பொதுமை
Generalise - பொதுவிதி காண்
Grade - தரம்
Gradient - சரிவு, வாட்டம்
Graph - வரைபடம்
Gravitational field - புவியீர்ப்புப் புலம்
Group - தொகுதி
Identical - சர்வசம, முழுவதும் ஒத்த
Identity - சர்வசமம், முற்றொருமை
Imaginary number - கற்பனை எண்
Independent variable - சாராத மாறி (சாராமாறி)
Inequality - சமனின்மை
Inference - அனுமானம், கருதுதல்
Infinite - முடிவிலா, கந்தழி
Infinity - முடிவிலி, கந்தழி
Integer - முழு எண்
Integral line - கோட்டு வழித் தொகை
Integral surface - பரப்பு வழித்தொகை
Integral tangential line - தொடுகோட்டு வழித்தொகை
Integral volume - கன வழித்தொகை
Integral - தொகை

Integrate	-	தொகைகாண்
Integrating factor	-	தொகையீட்டுக் காரணி
Integration by parts	-	பகுத்துத்துத் தொகையிடல்
Integration by substitution	-	பிரதியிட்டுத் தொகைகாணுதல்
Integration	-	தொகையிடல்
Intercept	-	வெட்டுத்துண்டு
Interior point	-	அகப்புள்ளி
Invariable	-	மாற, மாற்றமில்லாத
Invariance	-	மாற்றமின்மை
Invariant	-	மாற்றமிலி
Inverse function	-	நேர்மாறுச் சார்பு
Inverse matrix	-	நேர்மாற்று அணி
Inverse	-	நேர்மாறான
Irregular	-	ஒழுங்கற்ற
Irrotational	-	சுழற்சியில்லாத
Law	-	விதி
Limit point	-	எல்லைப் புள்ளி
Limit	-	எல்லை
Line segment	-	நேர்கோட்டுத் துண்டு
Linear difference equation	-	ஒருபடி வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு
Linear differential equation	-	ஒருபடி வகைகெழுச் சமன்பாடு
Linear equation	-	ஒருபடிச் சமன்பாடு
Linear factor	-	ஒருபடிக் காரணி
Linear	-	நேர்கோட்டுக்குரிய, ஒருபடிக்குரிய
Logarithm	-	மடக்கை
Logarithmic function	-	மடக்கைச் சார்பு
Logarithmic series	-	மடக்கைத் தொடர்
Magnitude	-	எண் மதிப்பு
Mass	-	பொருண்மை
Matrices similar	-	வடிவொத்த அணிகள்
Matrix Adjoint	-	சேர்ப்பு அணி, துணை அணி
Matrix Column	-	நிரல் அணி
Matrix Diagonal	-	சம மூலைவரை அணி
Matrix- Inverse	-	நேரெதிர் அணி
Matrix Non-singular	-	பூச்சியமில் கோவை அணி
Matrix Null	-	பூச்சிய அணி
Matrix Order	-	அணியின் தரம்

Matrix- orthogonal	-	செங்குத்து அணி
Matrix Reciprocal	-	நேரெதிர் அணி
Matrix Row	-	நிரை அணி
Matrix Scalar	-	மூலை வரை அணி
Matrix Skew-symmetric	-	எதிர்ச் சீர் அணி
Matrix Square	-	சதுர அணி
Matrix Symmetric	-	சமச்சீர் அணி
Matrix Transpose	-	நிரை, நிரல் மாற்று அணி
Matrix Unit	-	அலகு அணி
Matrix Zero	-	பூச்சிய அணி
Matrix	-	அணி
Matrix-column	-	நிரல் அணி
Matrix-complex	-	சிக்கல் அணி
Matrix-conjugate	-	இணை அணி
Matrix-diagonal	-	மூலை விட்ட அணி
Matrix-hermitian	-	ஹெர்மீஷியன் அணி
Matrix-inverse	-	நேர் எதிர் அணி
Matrix-minor of	-	அணியின் சிற்றணிக் கோவை
Matrix-skew symmetric	-	எதிர்ச்சீர் அணி
Matrix-square	-	சதுர அணி
Matrix-symmetric	-	சமச்சீர் அணி
Matrix-tranjugate	-	திருப்பு இணை அணி
Matrix-unitary	-	சிக்கல் செங்குத்தணி
Matrix-zero	-	சுழி அணி
Maximum rate of increase	-	மீப்பெரும் மாறு வீதம்
Maximum value	-	மீப்பெரு மதிப்பு, பெருமம்
Measure Common	-	பொது அளவை
Measure	-	அளவை, அளவு
Minimum value	-	மீச்சிறு மதிப்பு, சிறுமம்
Minimum	-	மீச்சிறு மதிப்பு
Minor	-	சிற்றணிக் கோவை
Modulus	-	எண்ணளவு, மட்டு
Moment	-	திருப்புதிறன்
Momentum	-	உந்தம்
Motion	-	இயக்கம்
Multiplication	-	பெருக்கல்
Natural number	-	இயற்கை எண்

Negative number	-	குறையெண்
Neighbourhood	-	அண்மை
Normal acceleration	-	செங்குத்து முடுக்கம்
Normal distribution	-	இயல்நிலைப் பரவல்
Normal error curve	-	இயல்நிலை பிழை வளைக்கோடு
Normal	-	நேர்குத்துக் கோடு
Notation	-	குயியீடு
Null matrix	-	பூச்சிய அணி
Null vector	-	பூச்சிய வெக்டர்
Number	-	எண்
Number Complex	-	சிக்கலெண்
Number Imaginary	-	கற்பனை எண்
Numerator	-	தொகுதி
Numerical	-	எண்ணுக்குரிய
Object	-	பொருள்
One to one correspondence	-	ஒன்றுக்கொன்றன ஒத்தியைபு
One to one mapping	-	ஒன்றுக்கொன்றன படவாக்கம்
One to one transformation	-	ஒன்றுக்கொன்றன உருமாற்றம்
Operation	-	செயல், செய்கை
Operator	-	செயலி
Opposite side	-	எதிர்ப்பக்கம்
Order of a differential equation	-	ஒரு வகையீட்டுச் சமன் பாட்டின் வரிசை
Order	-	வரிசை, ஒழுங்கு
Ordinary	-	பொதுவான
Origin	-	ஆதி
Orthocenter	-	செங்குத்து மையம்
Orthogonal matrix	-	செங்குத்தணி
Orthogonal transformation	-	செங்குத்தான மாற்றம்
Orthogonal	-	நேர்குத்தான, செங்குத்தான
Pair	-	இரட்டை
Parallel	-	ஒருபோகு, இணை
Parameter	-	சாராமாறி, துணையலகு
Part Imaginary	-	கற்பனைப் பகுதி
Part Real	-	மெய் பகுதி
Part	-	பகுதி

Partial derivative	-	பகுதி வகைக்கெழு
Partial differentiation	-	பகுதி வகைக்கெழு காணுதல்
Perpendicular plane	-	செங்குத்துத்தளம்
Perpendicular	-	செங்குத்தான
Point of intersection	-	வெட்டும் புள்ளி
Point	-	புள்ளி
Polar co-ordinates	-	கோண தூரக் கூறுகள்
Polynomial	-	பல்லுறுப்புக் கோவை
Positive number	-	மிகை எண்
Postulate	-	அடிகோள்
Principle	-	தத்துவம்
Quadrant	-	காற்பகுதி, நாற்கூறு
Quadratic equation	-	இருபடிச் சமன்பாடு
Quantity	-	கணியம்
Radius of curvature	-	வளைவாரை, வளையாரம்
Radius vector	-	ஆரைவெக்டர், ஆரைத் திசையி
Radius	-	ஆரம், ஆரை
Range	-	வீச்சு. நெடுக்கம்
Rank	-	தரம், மதிப்பிடம்
Rate	-	வீதம்
Real Part	-	மெய்ப்பகுதி
Rectangle	-	செவ்வகம்
Relation	-	தொடர்பு
Remainder	-	மீதி
Resultant	-	விளைவு
Rotation	-	சுழற்சி
Row matrix	-	நிரை அணி
Row	-	நிரை
Rule	-	விதி
Scalar matrix	-	எண்ணி அணி
Scalar	-	திசையிலி
Sequence	-	தொடர் முறை
Series	-	தொடர்
Set	-	கணம்
Significance	-	முக்கியத்துவம்
Similar	-	வடிவொத்த, ஒரேமாதிரியான
Similarity	-	வடிவொப்புமை

Simplification	-	சுருக்குதல்
Simultaneous equation	-	ஒருங்கமை சமன்பாடு
Singular matrix	-	பூச்சியக் கோவை அணி
Singular solution	-	சிறப்புத் தீர்வு
Skew symmetric matrix	-	எதிர்ச் சீர் அணி
Skew	-	சரிவான, சமச்சீரில்லா
Solution General	-	பொதுத் தீர்வு
Solution Particular	-	குறிப்பிட்ட தீர்வு, சிறப்புத் தீர்வு
Solution	-	தீர்வு
Space Sub	-	உள்வெளி
Space	-	இடம், வெளி
Speed	-	வேகம்
Sphere Hollow	-	உள்ளீடற்ற கோளம்
Sphere Solid	-	திண்மக் கோளம்
Sphere	-	கோளம்
Spherical co-ordinates	-	கோளக் கூறுகள்
Square	-	வர்க்கம், சதுரம்
Standard form	-	திட்ட அமைப்பு
Standard	-	திட்டமான, தரமான
Statement	-	கூற்று
Stationary points	-	கண் நிலைப் புள்ளிகள், திசைமாற நிலை
Straight line	-	நேர்க்கோடு
Subset	-	உட்கணம்
Substitute	-	பிரதியிடு
Substitution	-	பிரிதியிடல்
Successive differentiation	-	தொடர்ந்த வகைக்கெழு (அடுத்தடுத்த வகைக்கெழு)
Sum	-	கூட்டுத்தொகை, கணக்கு
Summation	-	கூட்டுத்தொகை காணுதல், கூட்டல்
Surface Curved	-	வளைபரப்பு
Surface Integral	-	புறப்பரப்பு வழித்தொகை
Surface	-	மேற்பரப்பு
Symbol	-	குறியீடு
Symmetrical	-	சமச்சீருள்ள, ஒரே சீரான
Symmetry	-	சமச்சீர்
System	-	தொகுதி

Tangent plane	-	தொடு தளம்
Tangent	-	தொடுகோடு
Tendency	-	இயல்பு
Tension	-	இழுவை, இழுவிசை
Term	-	உறுப்பு
Terminus	-	முடிவுப்புள்ளி
Theorem	-	தேற்றம்
Theory	-	கொள்கை, அறிமுறை
Three dimensional space	-	முவளவை வெளி
Total	-	மொத்தம்
Transformation	-	உருவமாற்றம், நிலைமாற்றம்
Transpose matrix	-	திருப்பு அணி
Triangular matrix	-	முக்கோண அணி
Uncertainty	-	உறுதியின்மை
Uniform	-	சீரான
Union	-	சேர்ப்பு, ஒன்றியம்
Unit Absolute	-	தனியலகு
Unit matrix	-	அலகு அணி, ஒன்றி அணி
Unit tangent Vector	-	அலகு தொடுகோட்டு வெக்டார்
Unit	-	அலகு
Unity	-	ஒருமை
Universal set	-	அகல கணம், பொது கணம்
Unlimited	-	எல்லையில்லாத
Value	-	மதிப்பு, பெறுமானம்
Variable complex	-	சிக்கல் மாறி
Variable Dependent	-	சார்ந்த மாறி
Variable Independent	-	சாரா மாறி
Variable Parameter	-	மாறுஞ் சாரா மாறி
Variable	-	மாறி
Variation	-	மாறல், மாறுபாடு
Vector	-	வெக்டார்
Vector-equal	-	சமவெக்டார்
Vector-free	-	கட்டிலா வெக்டார்
Vector-like	-	ஒத்த வெக்டார்
Vector-localised	-	அறுதியிட்ட வெக்டார்
Vector-negative	-	எதிர் மறை வெக்டார்
Vector-null	-	சுழி வெக்டார்

Vector-position	-	நிலை வெக்டார்
Vector-reciprocal	-	தலைகீழ் வெக்டார்
Vector-unit	-	ஓரலகு வெக்டார்
Velocity potential	-	திசை வேக அழுத்தம்
Velocity	-	திசை வேகம்
Volume element	-	மூலகப் பருமன்
Volume integral	-	கன அளவு வழித்தொகை
Volume	-	கன அளவு, பருமம்
Zero	-	பூச்சியம்

துணை நூல்பட்டியல்

DR. T.P.M. LIBRARY
MADURAI KAMARAJ UNIVERSITY
299055

Books for reference :

1. L.A. Pipes and L.R. Harwill, Applied Mathematics for Engineers and Physicists, Mc Graw Hill, Singapore, 1967.

2. P.K. Chattopadhyay, Mathematical physics, New Age International (P) Ltd., New Delhi, 1990.

3. A.K. Ghatak, T.C. Goyal and S.J. Chuhan, Mathematical Physics, MC Millan, New Delhi, 1995.

4. A.W. Joshi, Matrices and Tensors in Physics, Wiley Eastern, Ltd. New Delhi, 1975.

5. F.A. Cotton, Chemical Applications of Group Theory, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 1987.

6. B.D. Gupta, Mathematical Physics, Vikas Publishing House, New Delhi, 3rd Ed. 1995.