412

தொடக்கநிலைக் கல்வி இயக்ககம்

க
ணி
த
ம்

தொடக்க நிலை

பகுதி – III

கணிதம்

பாடங்கள் : 1 – 16

மதுரை காமராசர் பல்கலைக்கழகம்,
மதுரை – 625 021.

ACL-MKU
01065

Reprint at SUN - Year 2010 - 2011 - Copies 1000

OPEN UNIVERSITY SYSTEM

PRE-FOUNDATION COURSE EXAMINATION, MAY 1986

Part III

MATHEMATICS

(New Syllabus)

Time : Three hours   Maximum : 100 marks

பிரிவு அ—(20 × 2 = 40 மதிப்பெண்கள்)

எவையேனும் இருபது வினாக்களுக்கு விடை தருக.

1) $\{1, 3, x, 4, 10\} = \{4, 3, 3, 10, 1, 5, 1, 3\}$
எனில் x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

2) $A \subset \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; $A \cap \{4, 6, 8\} = \{6\}$

$$A \cap \{2, 4, 8, 10\} = \{2, 10\}$$

எனில் A என்ற கணத்தைக் காண்க.

3) $U = \{1, 2, 4, 8, 10, 12, 15, 23\}$; $A = \{2, 10, 12, 15\}$
எனில் A-இன் நிரப்பு கணம் காண்க.

4) $20 - 4x = 6$ எனில் x ன் மதிப்பைக் காண்க.

5) $A = \{2, 3, 4,\}$; $B = \{5, 6\}$ எனில் $A \times B$ காண்க.

6) A என்பது B ஐ விட 15% அதிகம், B என்பது C ஐ விட 10% குறைவு எனில் A என்பது C ஐ விட எவ்வளவு சதவீதம் அதிகம்?

7) $a : b : c ; = 2 : 3 : 4$ எனில், மேலும் $4a - 3b + 5c = 38$ எனில், c இன் மதிப்பு என்ன?

8) 1764-ன் வர்க்க மூலத்தை காரணி முறையில் காண்க.

9) 4 மனிதர்கள் 15நாட்களில் ஒரு வேலையை முடித்தால், 6 மனிதர்கள் அதே வேலையை எவ்வளவு நாட்களில் முடிப்பார்கள்?

10) ஆரம் r உள்ள கோளத்தின் புறப்பரப்பளவு காண சூத்திரம் யாது?

11) ஒரு மூடியுள்ள கனச்சதுரப் பெட்டியின் ஒரு பக்க நீளம் 15செ.மீ ஒரு சதுர டெசிமீட்டருக்கு வர்ணம் பூச ரூ. 3 வீதம் அப்பெட்டியின் உட்புறமும், வெளிப்புறமும் வர்ணம் பூச என்ன செலவாகும்?

12) காரணிப்படுத்துக : $x^2 - x - 12$.

13) $(x^2-2x+2)^2$ இன் மதிப்பை காண்க.

14) $289\, x^6\, y^{10}$ இன் வர்க்க மூலம் என்ன?

15) அடிப்பக்க ஆரம் 3 செ.மீ., உயரம் 4 செ. மீ. உடைய ஒரு நேர் வட்ட கூம்பின் கொள்ளளவு என்ன?

16) மூன்று அடுத்தடுத்த ஒற்றைப்படை எண்களின் கூட்டுத்தொகை 51எனில் அவைகளில் மிகச் சிறிய எண் யாது?

17) $3y=15-5x$ என்ற சமன்பாடு உடைய நேர்கோடு x– அச்சு y– அச்சுகளை சந்திக்கும் புள்ளிகளை காண்க.

18) $4x+3y=6$, $x=3$ எனில், yஇன் மதிப்பை காண்க.

19) $2x+y=3$, $x+y=1$ என்ற கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியை காண்க.

20) கீழ்காணும் எண்களின் சராசரி என்ன?

10, 18, 21, 14, 17, 16

21. 82, 10, 27, 16, 42, 22
என்ற எண்களின் இடைநிலை அளவை காண்க.

22. கீழ்க்கண்ட எண்களின் முகடு காண்க :
40, 17, 29, 23, 14, 25, 10

23. ரூ. 4,000க்கு ஆண்டுக்கு 5% தொடர் வட்டி வீதம் இரண்டு ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் தொடர் வட்டி எவ்வளவு?

பிரிவு ஆ — (10×6=60 மதிப்பெண்கள்)

எவையேனும் பத்து வினாக்களுக்கு விடை தருக.

24. ஒரு தேர்வில் 77% மாணவர்கள் ஆங்கிலத்திலும், 80% கணிதத்திலும், 65% இரண்டிலும் தேறி இருந்தனர். எத்தனை சதவிகித மாணவர்கள் இரண்டிலும் தோல்வி அடைந்தனர்?

25. $f(x) = 3x$; $g(x) = 4x$; $h(x) = 2x - 5$ எனில் $f_\circ(g_\circ h)$ − ஐ காண்க.

26. $x - \frac{1}{x} = 5$ எனில் $x^2 + \frac{2}{x^2}$ ன் மதிப்பையும்,

$x^3 - \frac{1}{x^3}$ ன் மதிப்பையும் காண்க.

27. $x^3 - 13x - 12$ஐ காரணிப்படுத்துக.

28. $(2-3x)(x-3)(4x+3)$—ன் மதிப்பை காண்க.

29. ஒரு கூம்பின் சாய்வு உயரம் 35செ.மீ, அதன் புறப்பரப்பளவு 2,420 சதுர செ.மீ. எனில் அதன் கொள்ளளவு என்ன?

30. $x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 16$-ன் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க.

31. $(2x+y-z)(2x-y+z)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

32. ஒரு தந்தை, மகன் இருவருடைய மொத்தவயது 89; தந்தை மகனை விட 25 வயது பெரியவராவார், அவர்களுடைய வயதை தனித்தனியே காண்க.

33. ஒரு கிரிக்கெட் ஆட்டக்காரர் 5 பந்தயங்களில் எடுத்த ஓட்டங்கள் முறையே 24, 36, 48, 40, 52 எனில், அவர் ஓட்டங்களின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

34. $(4p+3q-5r)^2$-ஐ விரித்து எழுதுக.

35. ஒரு குழுவில் உள்ள 100 நபர்களின் வயது பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரத்தின் முகட்டெண்ணைக் கண்டுபிடி.

வயது (ஆண்டுகளில்) :	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
அதிர்வெண் :	16	20	28	23	13

OPEN UNIVERSITY SYSTEM

PRE–FOUNDATION COURSE EXAMINATION, MAY 1984.

Part III

MATHEMATICS

(For those who joined in July 1984 and (after)

Time : Three hours. Maximum : 100 marks.

பிரிவு அ—(20 × 2 = 40 மதிப்பெண்கள்)

எவையேனும் இருபது வினாக்களுக்கு விடை தருக.

1. $\{3, 4, 5, 1\} = \{4, x, 3, 4, 5\}$ எனில், x ன் மதிப்பைக் காண்க.

2. $A = \{3, 6, 9, 2, 8\}$; $B = \{4, 10, 2, 7\}$ எனில், $A \cap B$ ஐக் காண்க.

3. $A \subset \{3, 5, 7, 8, 9\}$. $A \cap \{3, 7, 8\} = \{3\}$, $A \cap \{3, 5, 9\} = \{3\}$ எனில், A என்ற கணத்தைக் காண்க.

4. $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$, என்ற கோவையை. $(x - 2)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி என்ன?

5. $| 1 - 8 | - 13 | = x$ எனில், x இன் மதிப்பைக் காண்க.

6. $4a^2 + + 20a + 19$ உடன் எதைக்கூட்ட, அது ஒரு முழு வர்க்கமாகும்?

7. சுருக்குக : $\dfrac{(x^3)^5 + x^5 x^4}{x^2 (x^{13} + 1)}$

8. $\dfrac{578^2 - 570^2}{1148}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

9. 5, a, 13 என்ற எண்கள் கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன என்றால் a இன் மதிப்பைக் காண்க.

10. மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டைப்படை எண்களின் கூட்டுப் பலன் 24 எனில், அவைகளின் மிகப்பெரிய [illegible]

11. $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$ எனில், $(4a - 6b - 3c)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

12. காரணிப்படுத்துக: x^2+3x+2.

13. x மிகை எண்ணாக உள்ளவாறு; $3x, 2x, 4x^2$ என்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடரில் இருந்தால், x இன் மதிப்பைக் காண்க.

14. ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பு 616 ச.செ.மீ. எனில், அதன் விட்டத்தின் நீளம் என்ன?

15. ABCD என்ற நாற்கரத்தில், $AB=AD$; $BC=CD$

$\angle BAD = 20°$, $\angle BCD = 40°$ எனில் $\angle ABC$ ஐக் காண்க.

16. 10 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டத்தில் [illegible] 6 [illegible] தூரத்தில் உள்ள நாணின் நீளம் என்ன?

17. ஒரு மூடியில்லாத மரச் செவ்வகப் பெட்டியின் கொள்ளளவு 4,800 க.செ.மீ. அதன் உட்பக்கத்தின் நீள, அகலங்கள் முறையே 20 செ.மீ., 15 செ.மீ. பலகையின் தடிமன் 1 செ.மீ. எனில் பெட்டியின் உயரம் என்ன?

18. ஒரு வட்ட நாற்கரம் ABCD இல், $\angle ABC = 99°$ எனில், கோணங்கள் $\angle ABC$, $\angle ADC$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்தைக் காண்க.

19) ABC, PQR என்ற இரு முக்கோணங்களில், ∠A = ∠Q = 80°; ∠B = ∠P = 70°. AB = 10 செ.மீ, BC = 9.5 செ.மீ, CA = 15 செ.மீ PQ = 2 செ.மீ எனில், PR நீளம் என்ன?

20) கீழ்க்காணும் எண்களின் கூட்டுச் சராசரி காண்க:

15, 17, 18, 22, 25, 23.

21) கீழ்வரும் எண்களின் இடைநிலை அளவைக் காண்க:

27, 15, 29, 22, 20, 18.

22) ஒருவர் ரூ. 10,000ம் கடனாக r% தொடர் வட்டிக்கு வாங்கி, இரண்டு வருட முடிவில் ரூ. 4,884ஐ கடனுக்கும், வட்டிக்குமாகச் செலுத்தி கடனைத் தீர்த்தார். rஇன் மதிப்பு என்ன?

23) $3x = 6 - 2y$ என்ற சமன்பாட்டுடைய நேர்கோடு x அச்சு, y அச்சுக்களை சந்திக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க:

பிரிவு ஆ — ($10 \times 6 = 60$ மதிப்பெண்கள்)

எவையேனும் பத்து வினாக்களுக்கு விடை தருக.

24) அழகர் வாங்கி வந்த முட்டைகளில், 14 மட்டுமே நன்றாக இருந்தன. அவற்றில் விரிசல் விட்டு இருந்தவை 8 அழுகி இருந்தவை 7. விரிசல் விட்டும், அழுகியும் இருந்தவை 5 எனில், அழகர் வாங்கி வந்த முட்டைகளின் மொத்த எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

25) ஒரு கோவையை $(x - 1)$ஆல் வகுத்துவரும் மீதி 7 கோவையை $(x - 2)$ ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி 9. அக்கோவையை $(x - 1)(x - 2)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

26) காரணிப்படுத்துக: $x^4 + 8x^2 + 36$.

27) ஒரு பெருக்குத் தொடரில், முதல், மூன்றாவது உறுப்புகளின் கூடுதல் 100 இரண்டாவது, நான்காவது உறுப்புகளின் கூடுதல் 700. முதல் உறுப்பையும் பொது விகிதத்தையும் காண்க.

28) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூட்டுப் பலன் $4n^2 - 2n$ அத்தொடரின் முதல் உறுப்பையும், பொதுவித்தியாசத்தையும் காண்க.

29) $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ எனில் $3S_2 + 3S_1 + (n+1) = (n+1)^3$ எனக்காட்டு.

30) $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 7x + 12)$ இன் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க.

31) எவர்சில்வர் பாத்திரம் ஒன்று உருளை வடிவில் உள்ளது. மூடியில்லாத இப்பாத்திரத்தின் விட்டம் 28 செ.மீ. இதைச் செய்வதற்கான தகட்டின் விலை 1 ச.செ.மீ க்கு 5 பைசா வீதம் ரூ. 167.20 ஆகும். பாத்திரத்தின் ஆழம் காண்க.

32) ABC என்ற முக்கோணத்தின் உள்வட்டம், BC, CA, AB என்ற பக்கங்களை முறையே D, E, F என்ற புள்ளிகளில் தொடுகிறது. AB = 7 செ.மீ, BC = 5 செ.மீ, CA = 6 செ.மீ. எனில், BD, CE ஐக் காண்க.

50 பேர்களின் வயது விபரம் பின்வருமாறு:

பிரிவுகள் (வயது)	20 — 25	25 — 30	30 — 35	35 — 40
எண்ணிக்கை	1	13	16	20

மேற்கண்ட நிகழ்வெண் பட்டியலிலிருந்து கூட்டு சராசரியைக் காண்க.

34) $a + \frac{1}{a} = 6$ எனில் $a^4 + \frac{1}{a^4}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

35) ஒரு ஆண்டில் நடந்த தேர்வுகளில் பாண்டியன் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு:

[illegible], 41½, 40, [illegible], [illegible]

இப்புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கத்தை ஒரு தசம இடத் திருத்தமாகக் காண்க.

பாடம்—1

கணங்கள் (Sets)

மணியின் பிறந்த நாள் கொண்டாட்டத்திற்கு அவனுடைய சித்தன்னை அவர்களின் இரு குழந்தைகள், மணியின் மாமா, மாமி, அவன் நண்பர்கள் வந்திருந்தனர். பிறந்த நாளுக்கு வந்த கூட்டத்தினர் இவர்கள் மணிக்குப் பிறந்தநாள் பரிசாக ஒரு பொம்மை, ஒரு மணி, சட்டை, புத்தகம் முதலியன கிடைத்தன. இவை பரிசுப் பொருட்களின் கூட்டம்.

மோகன் சந்தையிலிருந்து மாம்பழம், ஆரஞ்சுப்பழம், முந்திரிப் பழம், ஆப்பிள் இவைகள் வாங்கி வந்தான். இப்பழங்களின் கூட்டம் ஒரு கூடையில் உள்ளது.

பல சந்தர்ப்பங்களில் இது போன்ற கூட்டங்களைக் குறித்து நாம் கூற வேண்டியுள்ளது. வகுப்பு அறைகளில் பெஞ்சு, டெஸ்க் மேஜை, நாற்காலி போன்றவை தளவாடங்களின் கூட்டம் ஆகும்.

கூட்டம், சமுதாயம், சேனை, சங்கம், கொத்து போன்ற சொற்களை நாம் உபயோகிக்கின்றோம். ஆனால் கணிதத்தில் இவ்விதச் சொற்களைப் பொதுவாக கணம் (set) என்று கூறப்படுகிறது. நமது சிந்தையில் உதிக்கிற கருத்துக்களும் அதில் வரலாம்.

1,3,5,7, என்பன நான்கு ஒற்றை எண்கள் கணம். பழங்கள், பரிசுப் பொருட்கள் இவற்றைக் கூடையில் வைக்கிறோம். கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளை [ ] என்ற முறையிலுள்ள அடைப்புக் குறியினுள் எழுதிக் கணத்தைக் குறிக்கிறோம்.

குறிப்பு : { } என்ற அடைப்புக் குறிக்குப் பதிலாக [ ] என்ற அடைப்புக் குறி, இப்பாடத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

வரையறை :

ஒரு கணம் என்பது பொருட்களின் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொகுப்பு அல்லது சேர்க்கையாகும்.

எடுத்துக் காட்டுகள் i) பாரதத்தின் நாட்கள்

ii) ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள்.

ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருள் கொடுத்திருக்கிற கூட்டத்தில் உள்ளதா என்ற வினாவிற்கு 'ஆம்' அல்லது 'இல்லை' என்று தெளிவாக விடையளிக்க இயலுமானால் அக்கூட்டம் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட கணமாகும்.

i) உயர்ந்த மாணவர்கள்

ii) அழகான பெண்கள்

iii) சிறந்த புத்தகங்கள்

போன்றவை நன்கு வரையறுக்கப்படாத தொகுப்புக்களாகும். நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொகுப்பு கணம் எனச் சொல்லப்படும்.

கணங்களுக்கு எடுத்துக் காட்டுகள் ;

வடிவ கணிதக் கருவிகள் = [காம்பஸ, பாகைமானி, அடிகோல்]

பூக்கள் = [தாமரை, முல்லை ரோஜா]

A = [1,2,3,4,5]

E = [a,e,i,o,u)

இப்பிறை அடைப்புக்கள் இவ்வாறு கணத்தின் உறுப்புக்களையெழுதும் முறை பட்டியல் முறை எனப்படும்.

மாதிரி: 7ஐ விடக் குறைந்த மிகை ஒற்றை எண்களின் கணம் அமைக்க தேவையான கணம் = [1,3,5] ஆகும்.

மாதிரி : 2. 30க்கும் 40க்கும் இடையிலுள்ள பகா எண்களின் கணம் அமைக்கவும்.

= [31,37,]

குறிப்பு: கணங்களின் உறுப்புக்களை எண்ணும் செயல் முடிவு பெற்றால் அக்கணங்கள் முடிவுறு கணங்கள் எனப்படும்.

என்னும் செயல் முடிவுறாதவாறு உறுப்புக்களைக் கொண்டுள்ள கணங்கள் முடிவுறாக் கணங்கள் ஆகும்.

(எ.கா) N = [1,2,3,4 ....]

W = [0,1,2,3,4...] போன்றவை

கணத்தை எழுதும் முறை: மூன்று முறைகளில் எழுதலாம். ஆங்கில உயிரெழுத்துக்களின் கணத்தை மூன்று முறைகளில் இங்கு எழுதுவோம்.

i) பட்டியல் முறை (Tabular form):

A = [a,e,i,o,u] உறுப்புகள் அனைத்தும் எழுதப்பட்டுள்ளன

ii) விதி அல்லது விவரண முறை (Descriptive form):

A = [ஆங்கில உயிரெழுத்துகள்]

உறுப்புகளிடையேயுள்ள பொதுவான பண்பைக் கூறுவதே போதுமானது.

iii) கண அமைப்பு முறை (Set builder form)

A=[x:x ஒரு ஆங்கில உயிரெழுத்து]

:(Such that) என்ற சொற்றால் என்பதைக் குறிக்கும் பொதுவாக, கணங்களை A,B,C — என்னும் ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துக்களாலும், உறுப்புக்களை a,b,c என்னும் ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துக்களாலும் குறிப்பது வழக்கம்.

x என்னும் உறுப்பு A என்ற கணத்தில் உள்ளது என்பதை $x \in A$ என்றும் x என்பது A-ல் இல்லையென்பதை $x \notin A$ என்றும் குறிப்போம்.

பயிற்சி: 1) முதல் 5 வரையிலுள்ள எண்களைக் கணமாக எழுதுக.

2) B = [1,2,3,4,5,6,7] எனில்

a) $3 \notin B$ b) $7 \notin B$ c) $5 \notin B$ d) $9 \notin B$ இவற்றில் மெய்யானவற்றை எழுதுக.

3) A = [1,2,3,4,5...16] முடிவுறு கணமா? முடிவுறாக் கணமா?

4) [E = 0,2,4,6 ...] முடிவுறு கணமா? முடிவுறாக் கணமா?

5) A = [x:x ஆறை விடக் குறைந்த மிகைமுழு] இதனைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.

6) B = [மோகன், கோபால், நாம்] இது பட்டியல் முறையில் எழுதப்பட்டுள்ளது. சரியா?

ஓர் உறுப்பு கணத்தில் மீண்டும் வருவது:

[a,b,a,b,b] இக்கணத்தில் உள்ள உறுப்புக்கள் யாவை? a,b இவைகளன்றோ, உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை a,b என்ற இரண்டு ஆகும். a என்ற உறுப்பு இருமுறையும், b மூன்று முறையும் வந்துள்ளன. இவ்விதமாக மீண்டும் வருகிற உறுப்புக்களை நாம் கணத்தில் கணக்கில் எடுப்பதில்லை. [0,1,2,3,2,1,0] இக்கணத்திலுள்ள உறுப்புக்கள் யாவை? 0,1,2,3 என்ற நான்கு தானே.

[0,1,2,3,2,1,0] என்பது [0,1,2,3] என்ற கணம் தான். இக்கணத்திலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை 4.

A = [0,1,2,3] n(A) = 4. அதாவது A என்ற கணத்திலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை 4.

A = [தாமரை, அல்லி] எனில் n(A) = 2

அதுபோல ஒரு கணத்திலுள்ள உறுப்புக்களை எந்த வரிசையிலும் எழுதலாம்.

[1,2] என்பதும் [3, 1, 2] ஒரே கணம்.

ஒருறுப்புக் கணம். (Singleton set):

31 நாட்களையுடைய மாதங்களின் கணத்தில் எத்தனை உறுப்புக்கள் இருக்கின்றன.

A = [J, M, M, J, A, O, D] n (A) = 7

30 நாட்களையுடைய மாதங்கள் கணம் B = [A, J, S, N] n (B) = 4

30 நாட்களை விடக் குறைவாகவுள்ள மாதங்கள் யாவை? ஒரு மாதம் மாத்திரமே உள்ளது. பிப்ரவரி 30 நாட்களை விடக் குறைவாகவுள்ள மாதங்களின் கணத்தில் எத்தனை உறுப்புக்கள் உண்டு ஒன்று மாத்திரம்.

C = {பிப்ரவரி}

4 க்கும் 6 க்கும் இடையிலுள்ள நிறை எண்களின் கணம், {5}

பள்ளித் தலைமையாசிரியர் கணத்தில் ஒரு உறுப்பு உண்டு. ஒரு உறுப்பு மாத்திரம் உள்ள கணம் ஒருறுப்புக்கணம் எனப்படும்.

A = 5 என்று எழுதலாமா?

கூடாது. இங்கு A ஒரு கணத்தைக் குறிக்காது. ஒரு கணம் எழுதும் பொழுது அதில் ஒரு உறுப்பு மாத்திரம் இருந்தாலும் அந்த உறுப்பை அடைப்பு கோடுகளில் தான் எழுத வேண்டும்.

வெற்றுக் கணம் : (Null set or empty set)

25 நாட்கள் மட்டும் கொண்ட மாதங்களின் கணம் என்ன? ஜனவரி தொடங்கி டிசம்பர் ஈறாகவுள்ள மாதங்களை ஒவ்வொன்றாக நாட்கள் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் சோதிக்கும் பொழுது எல்லா மாதங்களிலும் 25 நாட்களுக்கு மேல் உள்ளன என்பது தெளிவு. S என்ற கணம் 25 நாட்கள் கொண்ட மாதத்தின் கணம் எனில் Sல் ஒரு உறுப்புமில்லை! n(S) = 0. அப்பொழுது உறுப்புகளே இல்லாத கணம் உண்டு. அத்தகைய கணம் வெற்றுக் கணம் எனப்படும். உறுப்புகளில்லாத கணத்தை { } எனக் குறிக்கிறோம். φ (phi) என்பது வெற்றுக்கணத்தின் குறியீடு ஆகும்.

φ = { }

φ என்பது ஸ்காண்டிநேவியன் எழுத்து 'பை' என வழங்கலாம்.

{0}, { } இரண்டிற்கும் வேறுபாடு உண்டா?

{0} என்பது, '0' உறுப்பாகவுள்ள ஒற்றை உறுப்புக்கணம்.

{ } என்பது உறுப்பேயில்லாத வெற்றுக்கணம்.

வெற்றுக்கணத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்

1) சிறகுள்ள பூனைகளின் கணம்
2) 2-ஆல் மீதியின்றி வகுக்கத் தகுந்த ஒற்றை எண்களின் கணம்
3) 4-க்கும் 5-க்கும் இடையிலுள்ள ஒரு முழு எண்

பாடம்—2

கணங்கள் (தொடர்ச்சி)

அனைத்துக் கணம் (Universal set): எந்த கணத்திலிருந்து நாம் உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்து நமக்குத் தேவையான கணங்களை அமைத்துக் கொள்கின்றோமோ அந்தக் கணத்திற்கு அனைத்துக் கணம் என்று பெயர். அனைத்துக்கணம் எடுத்துக்கொண்ட பிரச்சினையைப் பொறுத்து அவ்வப் பொழுது மாறும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பள்ளியில் படிப்பவர்களைப் பற்றிப் பேசும் பொழுது பள்ளியில் படிக்கும் அனைவரையும் கொண்ட கணம், அனைத்துக் கணமாகக் கொள்ளப்படுகிறது. ஒரு வகுப்பில் படிப்பவர்களைப் பற்றி பேசும்பொழுது அவ்வகுப்பில் உள்ள அனைவரையும் கொண்ட கணம் அனைத்துக்கணம். அனைத்துக்கணம் என்பது வரையறுக்கும் கணமாகும்.

உட்கணம் (Subset): A = [1, 2, 3, 4, 5]

B = [3, 4]

என்ற இரு கணங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

A-யில் உள்ள உறுப்புகள் B-யில் உள்ளன.

B-யில் உள்ள உறுப்புகள் Aல் உள்ளன இவற்றில் எது மெய் எனப் பார்க்கையில் இரண்டாவது கூற்று மெய்.

B-ன் உறுப்புகள் Aல் அமைவதால் Bஐ Aயின் உட்கணம் என்போம். குறியீட்டில் $B \subset A$ என எழுதலாம்.

A = [2, 4, 6] B = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] என்றால்

$A \subset B$ அன்றோ.

A = [மோகன், ராம், கோபால்]

B = [சீதா, ராம், கோபால், மோகன், கமல்]

A, என்பது Bன் உட்கணம்

X = [a, b, c, d, e] எனக. X உட்கணங்களாக [a, c, e], [a, c, d] [b, c] போன்ற கணங்கள் கிடைக்கும் அல்லவா!

[3, 2, 1,] என்பது எதன் உட்கணம் என்றால் 3, 2, 1 உறுப்புக்கள் மேலும் எவ்வளவு உறுப்புக்களும் கொண்ட உட்கணம் ஆகும்.

[3, 2, 1] $\subset$ [1, 2, 3, 4]

[3, 2. 4] $\cap$ [1, 5, 7, 8, 2, 3]

[2, 3, 4] என்பது [1, 2, 3, 5, 7] ன் உட்கணமா? இல்லை. ஏனெனில் முதல் கணத்தில் உறுப்பு 4 என்பது இரண்டாவதில் இல்லை.

A = [2, 3, 4] B = [1, 2, 3, 5, 7]

4 $\in$ A ஆனால் 4 $\notin$ B அல்லவா?

P என்பது Qன் உட்கணம் என்றால் Pன் உறுப்புக்கள் அனைத்தும் Qல் உள்ளன.

a என்பது A என்ற கணத்தின் உறுப்பு என்பதை a$\in$A என்றும் B என்பது A என்ற கணத்தின் உட்கணம் என்பதை B$\subset$A என்றும் குறிக்கிறோம்.

மெய் அல்லது மெய்யல்ல (F) என்று குறிக்க:

i) A = [1,2,3,7]

a) [1, 2] $\subset$ A

b) [1, 5] $\subset$ A

c) ϕ $\subset$ A

d) 7 $\in$ A

e) 5 $\notin$ A

விடைகள் : a, d, e, மெய் b, c மெய்யல்ல

குறிப்பு : வெற்றுக்கணம் எல்லா கணங்களுக்கும் உட்கணமாகும்.

$\phi \subset$ [a, e, i,]

$\phi \subset$ [1, 2, 3, 4]

$A = \{2,4,6\}$ $B = \{6,4,2\}$ என்க.

Aன் உறுப்புக்கள் Bல் உள்ளன. $\therefore A \subset B$

Bன் உறுப்புக்கள் Aல் உள்ளன. $\therefore B \subset A$

இவ்வாறு அமைந்தால் A,B சமகணங்கள் (Equal set) எனப்படும்.

$A \subset B, B \subset A$ எனில் $A = B$

$\{2\}$ என்பது $\{2,3\}$ன் தகு உட்கணம் எனப்படும்.
$\{a\}$ என்பது $\{a, e, o\}$ன் தகு உட்கணம்.

தகு உட்கணத்திற்கு $\subset$ என்ற குறியீடும் தகா உட்கணங்கள் $\subseteq$ என்ற குறியீடும் வழங்கப்படுகின்றன; தகா உட்கணங்கள் சமகணங்கள் ஆகின்றன.

(உ-ம்) $\{2,3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

$\{a, b, c\} \subseteq \{c, b, a\}$

$\{5\} \subset \{5, 7, 8\}$

X = {ராம், மோகன், கலா} என்றால் ஒருறுப்புள்ள உட்கணங்கள் {ராம்}, {மோகன்}, {கலா}

ஈருறுப்புள்ள உட்கணங்கள் {ராம், மோகன்}, {ராம், கலா}
{மோகன், கலா}

உறுப்பேயில்லா உட்கணம் { } அல்லது ϕ

தகா உட்கணம் அல்லது அதுவே அதற்கு உட்கணம் {ராம், மோகன், கலா}

Xல் மூன்று உறுப்புக்கள் உள்ளன, அதன் உட்கணங்கள் மொத்தம் 8 அல்லது 2^3 ஆகும். உட்கணங்களையெல்லாம் உறுப்பாகக் கொண்ட கணம் அடுக்குக் கணம் (power set) எனப்படும்.

X = {ராம், மோகன், கலா}

P(X) = Xன் அடுக்குக் கணம் அமைக்க

P (X) = [[ராம்], [மோகன்], [கலா], [ராம், மோகன்] [மோகன், கலா] [கலா, ராம்], [ராம், மோகன், கலா] [ ]]

$n [P (X) = 2^3 = 8$

A = (a, b) எனில் P (A) காண்க.

P (A) = [[a, b], [a] [b], [φ]

$n [P (A)] = 2^2 = 4$

பொதுவாக ஒரு கணத்தில் 'n' உறுப்புகள் இருந்தால் அதன் அடுக்கு கணத்தில் 2^n உறுப்புகள் அமையும்.

சமான கணங்கள் (Equivalent sets) :

A = [2, 3, 4] B = [2, 3, 5] என்ற இரு கணங்களை நோக்குக. இவை சம கணங்களா? Aல் உள்ள உறுப்புக்கள் அனைத்தும் Bயிலும் Bயில் உள்ள உறுப்புக்கள் அனைத்தும் A யிலும் அமைந்துள்ளனவா? இல்லை ஆனால் A யில் மூன்று உறுப்புக்கள் B யிலும் மூன்று உறுப்புக்கள் உள்ளன. இரு கணங்கள் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகள் பெற்றால் அவை சமான கணங்கள் ஆகும்.

A = [a, b, c] B = [1, 2, 3] என்பன சமான கணங்கள்.

X = [2, 8, 16, 24] Y = [1, 2, 3] x, y சமான கணங்கள் அன்றோ

சம கணங்கள் உறுப்புக்கள் எண்ணிக்கை சமமாகப் பெற்றிருப்பதால் அவையும் சமான கணங்கள் ஆகும்.

சம கணங்கள் எல்லாம் சமான கணங்கள் : ஆனால் சமான கணங்கள் எல்லாம் சம கணங்கள் அல்ல.

[a, b, c, d] [ராம், லக்ஷ்மண், பரத்] என்ற கணங்கள் சமான கணங்களா? இல்லை, உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை சமமல்ல.

[1, 2, 3, 4] [4, 3, 2, 1] என்பன சமான கணங்களா? ஆம், சமகணங்கள் மட்டுமல்ல, சமமான கணங்களுமாகும்.

பயிற்சி :

1) A = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,] எனில்

a) பகா எண்களை உறுப்புக்களாகக் கொண்ட உட்கணம்.

b) இரட்டை எண்களை உறுப்புக்களாகக் கொண்ட உட்கணம்

c) ஒற்றை எண்களை உறுப்புக்களாகக் கொண்ட உட்கணம் இவற்றை எழுதுக.

2) x = [h, n, k] இதன் எல்லா உட்கணங்களையும் எழுதுக.

3) i) [p] ii) [p, q] iii) [p, q, r, s]

என்ற கணங்கள் ஒவ்வொன்றும் எத்தனை உட்கணங்களைப் பெற்றிருக்கும்.

4) [p, q, r, s] என்ற கணத்தில் மூன்று உறுப்புக்கள் கொண்ட உட்கணங்களை எழுதுக.

5) i) [p, q, r] என்பது [p, q, r]ன் உட்கணம்

ii) [p, q, r] என்பது [p, q, r]ன் உட்கணம்

இவற்றை குறியீட்டில் எழுதுக.

குறிப்பு: உட்கணம் அல்ல என்பதனை ⊄ என்று குறிப்போம்.

6) A = {x, y, z} இதற்கு ஒரு சமகணம், சமான கணம் இவற்றை எழுதுக.

7) x = (பூரி, வடை) இதன் அடுக்கு கணம் அமை.

8) x n(A) = 3 எனில் n [P(A)] = ?

விடைகள்: a) [1, 3, 5, 7] b) [2, 4, 6, 8] c] [1, 3, 5, 7, 9]

2) [h, n, k] [h] [n] {k} [h, n] [n, k] [h, k] φ 3) i) 2 ii) 4 iii) 16

3) [p, q, r] [q, r, s] [r, s, p] [s, p, q]

4) i) [p,q] ⊂ [p, q, r] ii) [p, q, r] ⊇ [p, q, r]

6) (y, z, x) தாமரை, முல்லை, ரோஜா

7) P(x) = [பூரி, வடை] [பூரி] [வடை] [φ]

8) n [p(A)] = 2^3 = 8

கணச் செயல் (Set Operation)

உட்கணங்களைப் பற்றி முன் பாடத்தில் பார்த்தோம். அனைத்துக் கணம் (universal set) எடுத்துக் கொண்ட எல்லா கணங்களையும் உட்கணங்களாகக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

A = [1, 3, 5, 7] B = [2, 4, 6] எனில் அனைத்துக் கணம் U = [1,2,3,4,5,6,7] ஆகும்.

$A \subset U$ $B \subset U$ அல்லவா?

A = [2,3] B = [1,3] எனில் U = [1,2,3] ஆகும்.

[3,c,5], [6, c] என்ற இரு கணங்களைக் கொண்டு அவற்றின் எல்லா உறுப்புக்களையும் கொண்டு ஒரு புதிய கணம் அமைக்கலாம்.

[3, 5, 6, c] புதிய கணமாகும். c இருமுறை வந்துள்ளதால் ஒரு முறை எடுத்துக் கொண்டோம். இரண்டு கணங்களின் உறுப்புக்களை அமைக்கும் கணம் சேர்ப்புக் கணம் (union of sets) எனப்படும். சேர்ப்பு என்பதை 'U' என்ற குறியால் குறிக்கலாம்.

A = [3, c, 5] B = [6,c]

A U B = [3,5,6,c]

X = [o,p,e,n] Y = [e,l,o,s]

எனில் X U Y = [o,p,e,n,c,l,s]

சேர்ப்புக் கணம் அமைப்பதைப் போல மற்றொரு கணச் செயலையும் காணலாம்.

இரு கணங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் அவற்றிற்குப் பொதுவாக உள்ள உறுப்புக்களைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் கணம் வெட்டுக்கணம் (Intersection of sets) எனப்படும். '∩' என்பது வெட்டைக் குறிக்கும்.

(உ-ம்) A = [1,2,3,4,5]

B = [3,5,7,9] எனில்

A ∩ B = [3,5]

x = {பாலு, கோபால், ரவி}   y = {கோபால், ராமு}

எனில் x ∩ y = {கோபால்}

A = [3,6,9,12] B = [3,4,6,16] எனில் இவற்றின் சேர்ப்புகளையும் வெட்டுகளையும் அமைக்க.

A ∪ B = [3,4,6,9,12,16]

A ∩ B = [3,6]

குறிப்பு : கண அமைப்பு முறையில் சேர்ப்புகளையும், வெட்டுகளையும் இவ்வாறு

A ∪ B = [x: X ∈ A அல்லது x ∈ B]

A ∩ B = [x : x ∈ A மேலும் x ∈ B]

x = [1,3,5,7] y = [7,6,3,1]

எனில் [1,3,5,7,6] என்பது X ∩ Y ஆகும்.

[1,3,7] என்பது x ∩ y.

பயிற்சி :

1. A = [2,3,5] B = [1,5,7] எனில் AUB, A∩B காண்க.

2. [1,2,3,5], [1,5,7] இவற்றின் சேர்ப்பைக் குறியீட்டின் மூலம் எழுதுக.

3. சரியானவற்றை (√) மூலம் குறிக்க :-

a) [1,3,9,27] ∪ [1,2,3,4] = [1,3]

b) [1,3,9,27] ∩ [1,2,3,4] = [1,3]

c) [1,3,9,27] ∪ [1,2,3,4] = [1,2,3,4,9,27]

d) [1,3,9,27] ∩ [1,2,3,4] = [1,2,3,4,9,27]

4) பூர்த்தி செய்க :

a) [ராம், மோகன், சீதா] U [சீதா, ராம், ஷியாம்] =

b) [ராம், மோகன், சீதா] ∩ [சீதா, ராம், ஷியாம்] =

5) A = [1, 2, 3, 4] B = [1, 2, 3, 4, 5, 6] எனில் கீழ்க்கண்டவற்றில் மெய்யானவை யாவை?

a) A⊂B b) B⊂A c) AUB = B d) A∩B = B

e) A⊂B = A f) AUB = A.

6) A⊂B எனில் AUB = B என்பது மெய்யான கூற்றா?

குறிப்பு : இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புக்கள் இல்லையெனில் அவை சேராக்கணங்கள் அல்லது ஒவ்வாக் கணங்கள் எனப்படும் (disjoint sets).

A = [1, 2, 3] B = [4, 5] என்பன சேராக் கணங்கள்
A∩B = [ ]

சேராக் கணங்களின் வெட்டுக்கணம் வெற்றுக் கணமாகும்.
U — அனைத்துக் கணம் φ வெற்றுக்கணம்.

U U φ = U மேலும் U U φ — φ

[1, 2, 3,], [2, 4, 6] என்ற கணங்கள் சேராக்கணங்களா? இல்லை, ஏனெனில் : '2' என்ற பொதுவான உறுப்பு உள்ளது.

கணநிரப்பி : [Complement of a set] :

அனைத்துக் கணம் U = [1, 2, 3, 4, 5, 6] என்று கொள்வோம்.

A = [1, 3, 5, 6] என்றால் அனைத்துக் கணத்தில் Aயில் உள்ள உறுப்புக்கள் நீங்கலாக உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் கொண்ட கணம் Aன் நிரப்புக் கணம் எனப்படும். இதனை A' (A Complement) Aன் நிரப்பி என்போம்.

A' = [2, 4].

U = [x : x ஒரு பள்ளியின் மாணவன்]

A [x : x 9ம் வகுப்பு மாணவன்] எனில்

A = [x : x ... ஆடவராக மற்ற வகுப்பு மாணவன்]

AUA' = U ... எனவும் A∩A' = φ என்பதையும் நோக்குக.

பயிற்சி : 1) ... [1, 2 ... A' = [2] எனில் காண்க.

2) ... என்ன?

3) A = ...] ... கீழ்க்கண்டவற்றில் எவை மெய்

a) φCA ... [1]C ... c) [2]CA d) [1, 2]CA e) [1, 2, 3]CA

4) U ... c, ... A = [a, b] எனில் A' காண்க.

B = [... எனில் A' B' காண்க, AUB காண்க. (AUB)' காண்க

6) ... அமைக்க.

a) A ... 7, ... B = [1, 2, 3, 9]

b) A = [a, o, c] B = [cdef]

c) x = [தாமரை] y = [முல்லை, மல்லிகை]

7) கீழ்க்கண்டவற்றின் வெட்டுக்கணம் அமைக்க.

a) A = [1, 2, 3, 4] B = [3, 4, 5]

b) A = [a, e, i, o, u] B = [a, b, c, d, e]

c) X = [நாய், கோபால், பாலன்] Y = [கோபால், மாதவன்]

கார்டீசியன் பெருக்கல் பலன் : (Cartesian product) :

A, B என்ற இரு கணங்களின் Aன் உறுப்புக்களை முன்னிருப்புக்களாகவும், Bன் உறுப்புக்களை பின்னிருப்புக்களாகவும் கொண்டு அமைக்கக் கூடிய எல்லா வரிசைச் சோடிகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணம் A, Bன் கார்டீசியன் பெருக்கல் கணம் ஆகும். இதனை A×B என்று குறிப்போம்.

A = [1, 2, 3] B = [a, b] என்க.

A × B = [(1, a), (2, a), (3, a), (1, b) (2, b), (3, b)]

$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 3 \times 2 = 6$

கார்டீசியன் பெருக்கல் கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு வரிசைச் சோடியாகும்.

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b\}$ எனில்

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

$(1, a) \neq (a, 1)$ ஆகையால் $A \times B \neq B \times A$

$A \times B$ லிலும் $B \times A$ லிலும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமமாகும். அதாவது $n(A \times B) = n(B \times A)$.

குறிப்பு : $\{a, b\}$ என்பது ஒரு கணம். (a, b) என்பது ஒரு வரிசைச் சோடி கணமல்ல.

(3,2) என்ற வரிசைச் சோடியில் 3 முன்னுறுப்பு 2 என்பது பின்னுறுப்பு.

$(x, y) = (2, 3)$ எனில் $x = 2$, $y = 3$ ஆகும்.

$A = \{$இட்லி, வடை$\}$ $B = \{$காபி, டீ$\}$ எனில்

$A \times B = \{$(இட்லி, காபி), (இட்லி, டீ), (வடை, காபி) (வடை, டீ)$\}$

$A = \{1, 0\}$ எனில் $A \times A$ என்ன

$A = \{1, 2\}$ $A = \{1, 2\}$ என மீண்டும் எழுதி

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ எனக் காணலாம்.

பயிற்சி :

1) $A = \{x, y, z\}$ $B = \{p, q\}$ எனில்

a) $A \times B$ b) $B \times A$ காண்க.

2) கீழ்க்கண்ட கார்டீசியன் பெருக்கல்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை காண்க.

a) $\{a, b, c\} \times \{d\}$

b) $\{a, b, c\} \times \{d, e\}$

c) $\{a, b, c\} \times \{d, e, f\}$

3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{10, 20\}$ எனில் $A \times B$ காண்க.

4) $A = \{r, s, t\}$ $B = \{u, v\}$ எனில்

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $n(A \times B)$ காண்க.

விடைகள் : 1) a) $A \times B = \{(x, q) (y, q) (x, p), (y, p) (z, q) (z, q)\}$

b) $B \times A = \{(q, x), (q, y) (q, z), (p, x), (p, y), (p, z)\}$

2) a) 3 b) 6 c) 9 3) $A \times B = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10), (1, 10), (2, 20), (3, 20) (4, 20)\}$

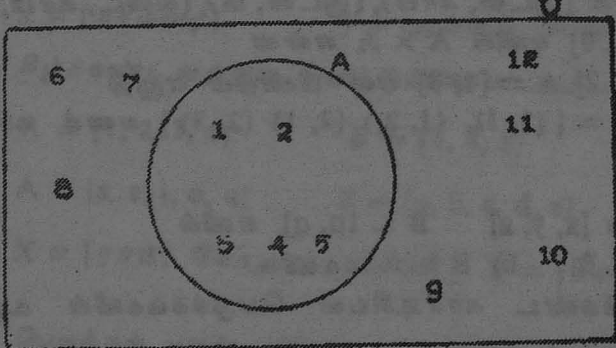
பாடம்—4

கணங்கள் (Sets)

வென்படங்கள் (Venn Diagrams)

முன்பாடங்களில் கணங்களைப் பற்றியும் கணச் செயல்கள் பற்றியும் படித்தீர்கள். இப்பாடத்தில் கணத்தை வடிவ கணித முறையில் அணுக இருக்கிறோம் ஜான் வென் என்ற தர்க்கவியல் பேராசிரியர் இம்முறையைக் கண்டார். ஆகையால் படங்களை வென் படங்கள் என்கிறோம். படங்கள் மூலம் கணங்களை நன்கு அறிந்து கொள்ளவும் அதனைப் பயன்படுத்தி கணக்குகள் செய்யவும் கற்கலாம்.

கணங்கள் வட்டங்களாலும், அனைத்துக் கணம் செவ்வகத்தாலும் குறிக்கப்படுகின்றன.



பாடம் 10. படம்.1

படத்தை நோக்குக : அனைத்துக்கணம் U-ல் உள்ள உறுப்புகள்

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

A-ல் உறுப்புகள் 1, 2, 3, 4, 5

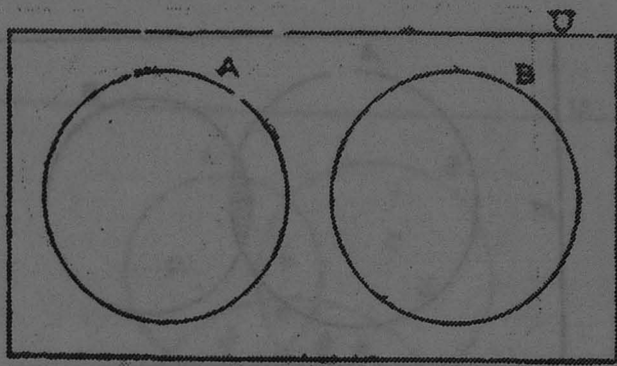
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

A-ன் நிரப்பியிலுள்ள உறுப்புகள்

$A' = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

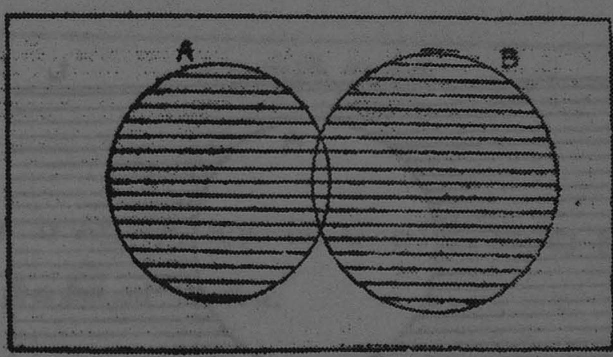
$A \cup A' = U$, $A \cup A' = \phi$ என்பது விளங்கும்.

கணங்கள் உறுப்புகள் எழுதப்படாமல் வட்டங்கள் குறிக்கப்படலாம்.



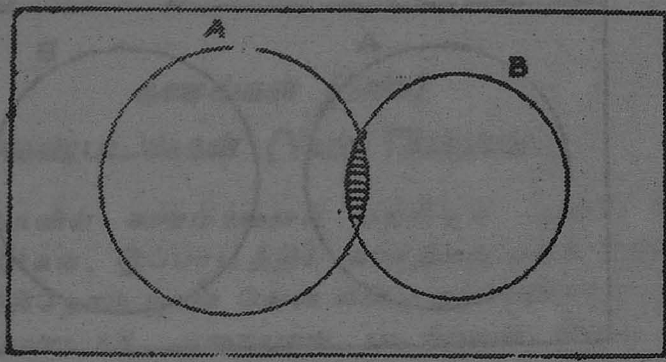
பாடம்.18. படம்.2.

A, B என்பன ஒவ்வாக் கணங்கள் என்பதனை படம் விளக்குகிறது. $A \cap B = \varphi$ ஆகும்.



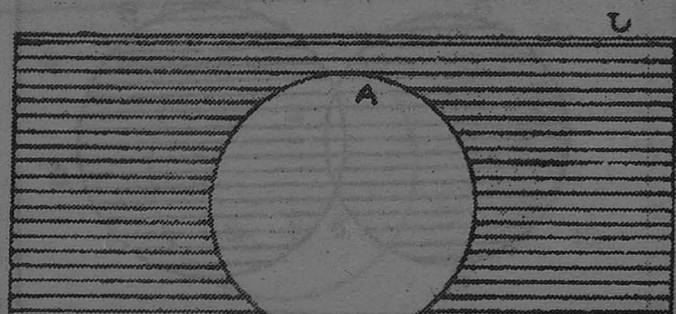
பாடம்.18. படம்.3.

நிழலிட்ட பகுதி $A \cup B$ ஆகும். படத்திலிருந்து $A \cup B \subset \cup$ என அறிகிறோம்.



பாடம் 1ஆ. படம் 4.

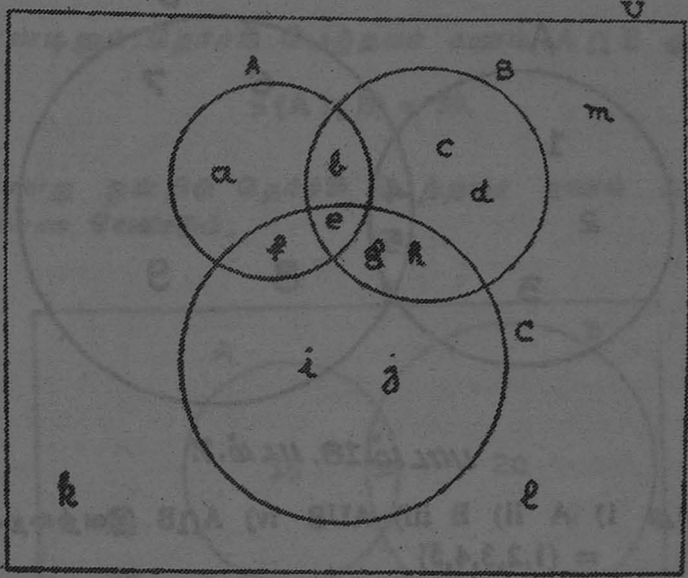
படத்தில் நிழலிடப்பட்ட பகுதி A∩B ஆகும்.



பாடம் 2ஆ. படம் 5.

படத்தில் நிழலிடப்பட்ட பகுதி A' [A-ன் நிரப்பி] யைக் குறிக்கும்.

பயிற்சி 1 :-



பாடம். 18. படம் 6.

படத்திலிருந்து i) $A \cap B$ ii) $B \cap C$ iii) C' iv) $(A \cup B \cup C)$ (v) $(A \cup B \cup C)$ இவற்றைக் காண்க.

i) $A \cap B = \{b, e\}$,

ii) $B \cap C = \{e, g, h\}$,

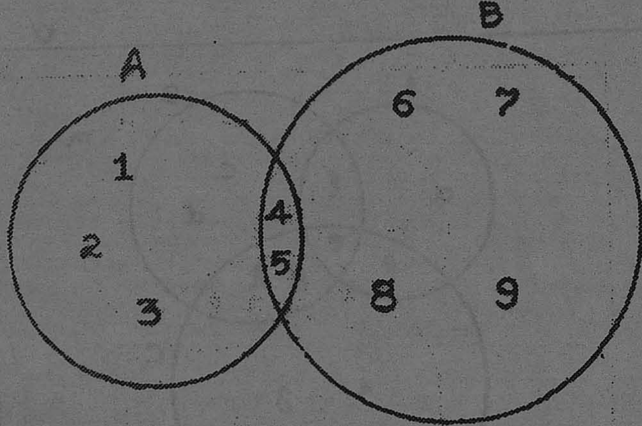
iii) $C' = \{a, b, c, d, k, l, m\}$,

vi) $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$,

v) $(A \cup B \cup C) = \{k, i, m$

vi) $A \cap B \cap C = \{e\}$

மாதிரி 2 :-



படம்.18. படம்.7.

படத்திலிருந்து i) A ii) B iii) AUB iv) A∩B இவற்றைக் காண்க.

i) A = {1,2,3,4,5}

ii) B = {4,5,6,7,8,9}

iii) AUB = {1,2,3,4,5,6,7,8}

iv) AUB = {4,5}

பயிற்சி :-

வெண் படங்கள் வரைந்து மேற்கண்ட கூற்றுகள் மெய் என அறிந்து கொள்.

i) AUB = BUA

ii) A∩B' = B∩A

iii) AUA' = U

iv) A∩A' = φ

பயன் :-

சில வகையான புதிர்க் கணக்குகளை வெண் படங்கள் மூலம் எளிதில் தீர்க்கலாம்.

மாதிரி 1 :

100 மாணவர்கள் உள்ள வகுப்பில் 45 பேர் ஆங்கிலத்திலும் 50 பேர் கணக்கிலும் தேர்ச்சி பெற்றனர். 30 மாணவர்கள் இரண்டிலும் தேர்ச்சி பெற்றனர் என்றால் இரண்டிலும் தேர்ச்சி பெறாதவர்கள் எத்தனை பேர்?

ஆங்கிலத்தில் தேர்ச்சி பெற்றவர் கணம் என்க,

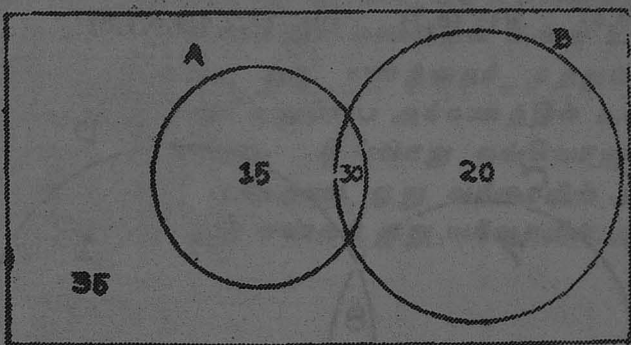
கணிதத்தில் தேர்ச்சி பெற்றவர் கணம் B என்க.

$n(A) = 45$ $\qquad\qquad$ $n(B) = 50$

இரண்டிலும் தேர்ச்சி பெற்றவர் கணம் $A \cap B$ ஆகும்.

$$n(A \cap B) = 30.$$

ஏதாவது ஒன்றில் தேர்ச்சி பெற்றவர் கணம் $A \cup B$ எனில் $n(A \cup B)$ காண வேண்டும்.



படம் [illegible]

முதலில் இரு கணங்களின் வெட்டுப் பகுதியில் இரண்டிலும் தேர்ச்சி பெற்றவர் எண்ணிக்கையான 30ஐ எழுத வேண்டும்.

Aல் மொத்தம் 45பேர் $\qquad$ மீதி 15ஐ Aயில் எழுதவேண்டும்.

Bல் மொத்தம் 50பேர் $\qquad$ மீதி 20ஐ Bயில் எழுதவேண்டும்.

மொத்தம் தேர்ச்சி பெற்றவர் $= 15 + 30 + 20 = 65$

தேர்ச்சி பெறாதவர் $= 100 - 6 = 35$

கணக்கு-2 :

500 பேர்கள் வசிக்கும் ஒரு பகுதியில் 300 பேர் ஆங்கிலம் பேசுகிறார்கள். 220 பேர் தமிழ் பேசுகிறார்கள். ஆங்கிலம் தமிழ் இரண்டும் பேசுபவர்கள் எத்தனை பேர்?

படம் வரைக)

குறிப்பு :-

இரண்டும் பேசுபவர்கள் x என்க.

ஆங்கிலம் மட்டும் பேசுபவர்கள் 300 — x

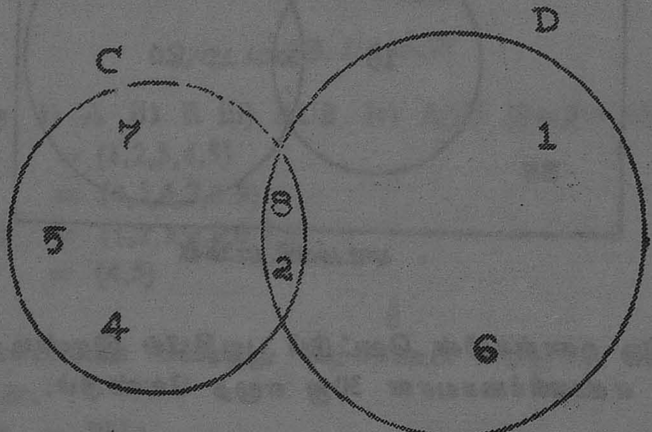
தமிழ் மட்டும் பேசுபவர்கள் 220 — x.

மொத்தம் 500 இதிலிருந்து x = 20 எனக் காணலாம்.

பயிற்சி :- 1.

1) C, D என்ற கணங்களைக் கொண்டு பின்வரும் கணங்களைப் பெயரிடுக.

i) {1,2,6,8} ii) {8,2} iii) {1,2,4,5,6,7,8}



பாடம்.18. படம்.8.

2) 44 பேர்கள் உள்ள பகுதியில் பாடத் தெரிந்தவர்கள் 20 பேர் ஆடத் தெரிந்தவர்கள் 12 பேர் பாடவும் ஆடவும் தெரிந்தவர்கள் 5 பேர் என்றால் பாடவோ அன்றி ஆடவோ தெரியாதவர்கள் எத்தனை பேர்? [17]

3) ஒரு வருடம் S.S.L.C தேர்வுக்குச் சென்ற மாணவர்கள் 70 % ஆங்கிலத்திலும் 82 % கணிதத்திலும் தேறினர் இரண்டிலும் தேறியவர்கள் 60% எனில் இரண்டிலும் தவறியவர்கள் எத்தனை சதவீதம்? [8%]

இயல் எண்கள் - முழு எண்கள்

பகுதி—1

கணம் என்பது பொருட்களின் தொகுப்பு என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். கணத்தில் உள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்க 'ஆதிஎண்' என்ற சொற்றொடர் பயன்படுகின்றது. A = {a} என்றால் n(A) என்பது A என்னும் கணத்தில் உள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். ஒரு கணத்தைச் சற்றுப் பெரிதாக்க வேண்டுமானால் இன்னும் ஓர் உறுப்பை அக்கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளோடு சேர்க்க வேண்டும். இவ்வாறு ஒவ்வொரு உறுப்பாகச் சேர்த்துக் கொண்டேவர, கணங்கள் ஏறு வரிசையில் அமைகின்றன அதாவது இக்கணங்களின் ஆதி எண்கள் ஏறு வரிசையில் அமைகின்றன.

A = {a}   n(A) = 1

B = {a, b}   n(B) = 2

C = {a, b, c}   n(C) = 3

இவ்வாறு கணத்தில் ஒவ்வொரு உறுப்பை சேர்ப்பதன் மூலம் அடுத்த எண்ணைப் பெறலாம். அடுத்து வரும் ஒவ்வொரு எண்ணும் முந்தைய எண்ணை விடப் பெரியதாக அமையும்.

$$n(A) < n(B) < n(C) < \ldots\ldots$$

அதாவது $1 < 2 < 3 \ldots\ldots$

< என்னும் குறி விடச் சிறியது என்ற பொருளில் பயன்படுத்தப்படும். இதேபோல் > என்ற குறி "விடப் பெரியது" என் பொருள் படும். இவ்வெண்களால் அமைக்கப்படும் கணமே இயல் எண்களின் கணம் எனப்படும். இதை 'N' என்று குறிக்கின்றோம்.

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$$

முன்னி : எந்த ஒரு (இயல்) எண்ணிலிருந்தும் 1ஐக் கழிக்க கிடைக்கும் எண் அதன் முன்னி (predecessor) ஆகும்

2ன் முன்னி 1

4ன் முன்னி 3

இயல் எண்களின் கணத்தில் 1க்கு முன்னி கிடையாது.

தொடரி : எந்த ஒரு (இயல்) எண்ணுடனும் 1ஐக் கூட்டக் கிடைக்கும் எண் அதன் தொடரி எனப்படும்.

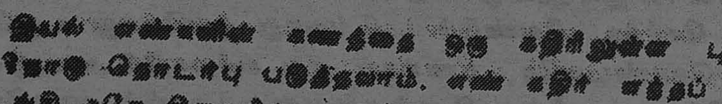
5ன் தொடரி 6

19ன் தொடரி 20

இயல் எண்களின் கணத்தில் எல்லா எண்களுக்கும் தொடரி (Successor) உண்டு.

இயல் எண்களின் கணத்தை ஒரு கதிரிலுள்ள புள்ளிகளின் கணத்தோடு தொடர்பு படுத்தலாம். எண் கதிர் எந்தப் புள்ளியில் தொடங்கி ஒரே திசையில் முடிவில்லாமல் செல்லும். கதிர் எந்தப் புள்ளியில் தொடங்குகிறதோ அப்புள்ளி "தொடக்கப்புள்ளி" எனப்படும். இயல் எண்களின் கணம் 1 என்னும் எண்ணில் தொடங்குகிறது. மற்ற எண்களான 2, 3, 4 ......ஆகிய எண்கள் 1 என்ற எண்ணிலிருந்து ஆரம்பித்துச் சம அளவு இடைவெளியில் அமையும். ஒரு இயல் எண்ணுக்கும் அதன் அடுத்த இயல் எண்ணுக்கும் இடையில் வேறொரு இயல் எண்ணும் அமையாது. அதாவது 1,2ஆகிய இரண்டு இயல் எண்களுக்கு இடையில் மற்றொரு இயல் எண் கிடையாது.

இயல் எண் கதிர் :



இவ்வாறு இயல் எண்களை எண்கதிரில் குறித்துப் பார்ப்பதின் மூலம் எண்களின் தன்மைகளைப் பற்றி எளிதாக அறிந்து கொள்ள முடியும். ஒரு எண்ணை விடச் சிறிய எண்கள் எல்லாம் எண்கதிரில் அந்த எண்ணிற்கு இடதுபுறமே அமைகின்றன. ஒரு எண்ணை விடப் பெரிய எண்கள் எல்லாம் எண்கதிரில் அந்த எண்ணிற்கு வலது புறமே அமைகின்றன.

பண்புகள் :-

அடைவுப் பண்பு :— ஒரு கணத்தில் உள்ள ஏதேனும் இரு உறுப்புக்களை எடுத்துக்கொண்டு அதன்மீது நான்கு அடிப்படைச் செயல்களான "கூட்டல்" "கழித்தல்" "பெருக்கல்" "வகுத்தல்" ஆகிய நான்கு செயல்களில் ஏதேனும் ஒன்றைச் செய்யும்போது கிடைக்கும் விடையானது அக்கணத்தில் ஓர் உறுப்பாக அமைந்தால், அக்கணம் அச்செயலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளது என்கிறோம்.

$N = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$

கூட்டல் :

i) $2 \in N \; 3 \in N$

$2 + 3 = 5 \in N$

ii) $8 \in N \; 10 \in N$

$8 + 10 = 18 \in N$

பொதுவாக $a \in N,\ b \in N \Rightarrow a + b \in N$ ஆகவே N என்னும் கணம் கூட்டல் என்னும் செயலுக்கு அடைவு பெற்றுள்ளது.

கழித்தல் :

i) $7 \in N \; 12 \in N$

$7 - 12 = -5 \in N$

ஆகவே N என்னும் கணம் கழித்தல் என்னும் செயலுக்கு அடைவு பெறவில்லை.

பெருக்கல் :-

i) $6 \in N \; 7 \in N$

$6 \times 7 = 42 \in N$

ii) $9 \in N \; 10 \in N$

$9 \times 10 = 90 \in N$

பொதுவாக $a \in N,\ b \in N \Rightarrow a \times b \in N$, ஆகவே N என்னும் கணம் பெருக்கல் என்னும் செயலுக்கு அடைவு பெற்றுள்ளது.

வகுத்தல் :

i) $6 \in N, 11 \in N$

$6+2=11 \in N$

எனவே N என்னும் கணம் வகுத்தல் என்னும் செயலுக்கு அடைவு பெறவில்லை.

இந்த பண்புகளைக் கீழ்வரும் அட்டவணையின் மூலம் எளிதில் அறிந்து கொள்ளலாம்.

N	+	−	×	÷
	✓	×	✓	×

✓ என்ற குறியீடு உள்ள செயலுக்கு அடைவுப்பண்பு உண்டு × என்ற குறியீடு உள்ள செயலுக்கு அடைவுப்பண்பு கிடையாது.

றுப்பண்பு :-

i) $8 \in N, 6 \in N$

$8+6=6+8$

துவில் $a \in N,\ b \in N \Rightarrow a+b = b+a$, இப்பண்பிற்குக் கூட்டலின் றுப்பண்பு என்று பெயர்.

ii) $6 \in N\ 7 \in N$

$6 \times 7 = 7 \times 6$

பொதுவாகவே $a \in N, b \in N \Rightarrow a \times b = b \times a$, இப்பண்பிற்குப் பெருக்கலின் றுப்பண்பு என்று பெயர்.

தொடர்புப் பண்பு :

i) $10 \in N \quad 12 \in N \quad 22 \in N$

$$(10 + 12) + 22 = 10 + (12 + 22)$$

பொதுவில் $a, b, c \in N$ எனில்,

$(a + b) + c = a + (b + c)$ எனக் கூறுவோம்.

இதைக் கூட்டலின் தொடர்புப் பண்பு என்று கூறுகிறோம்.

ii) $2 \in N \quad 3 \in N \quad 4 \in N$

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

பொதுவில் $a, b, c, \in N$ எனில்

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ எனக் கூறுவோம். இதைப் பெருக்கலின் தொடர்புப் பண்பு என்று கூறுகிறோம்.

பங்கீட்டுப் பண்பு

$3 \in N, \quad 4 \in N, \quad 5 \in N$

$$3 \times (4 + 5) = (3 \times 4) + (3 \times 5)$$

பொதுவில் $a, b, c, \in N$ எனில்

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ எனக் கூறுவோம். இதைப் பங்கீட்டுப் பண்பு எனக் கூறுகிறோம்.

பகுதி-2

முழு எண்கள்

நாம் இதற்கு முன் இயல் எண்களை கணங்களின் ஆதி எண்களுடன் ஒப்பிட்டு அவற்றின் பண்புகளைப் பற்றிப் படித்தோம். வெற்றுக் கணத்தின் ஆதி எண் 0. வெற்றுக்கணம் { } எனக் குறிக்கப்படுகின்றது. வெற்றுக்கணத்தை $x + 2 = 0, x \in N$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் குறிக்கலாம். ஏனெனில் $x + 2 = 0$ என்னும் சமன்-

பாட்டின் தீர்வு—2. இது இயல் எண்களின் கணத்தில் உறுப்பன்று. ஆகவே $x + 2 = 0$, $x \in N$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு { } பூச்சியமும், இயல் எண்களும் சேர்ந்து முழு எண்களின் கணம் அமைகின்றது. முழு எண்களின் கணம், W எனக் குறிக்கப்படுகின்றது. முழு எண்களின் கணமும் இயல் எண்களின் கணத்தைப் போல முடிவுறாக் கணமாகும். முழு எண்களின் கணத்தில் 1 என்னும் எண்ணுக்கு முன்னி 0 ஆகும். (இயல் எண்களின் கணத்தில் 1 என்ற எண்ணுக்கு முன்னி இல்லை என்பதை நினைவில் கொள்க) ஆனால் முழு எண்கள் கணத்தில் 0க்கு முன்னி கிடையாது. இயல் எண்களின் கணத்தைப் போலவே முழு எண்கள் கணத்திலும் ஒவ்வொரு எண்ணுக்கும் தொடரி உண்டு.

முழு எண்களின் கணத்தையும் ஒரு கதிரிலுள்ள புள்ளிகளின் கணத்தோடு தொடர்புபடுத்தலாம். முழு எண்களின் கணம் 0 என்னும் எண்ணில் தொடங்குகிறது. மற்ற எண்களான 1, 2, 3, 4.. ... ஆகியவை 0 என்ற எண்ணிலிருந்து ஆரம்பித்துச் சம அளவு இடைவெளியில் அமைகின்றன.

முழு எண் கதிர் :

பண்புகள் :

Nஐப் போலவே Wயும் கூட்டல், பெருக்கல், ஆகிய செயல்களுக்கு அடைவு பெற்றுள்ளது. எந்த இரண்டு முழு எண்களை எடுத்துக் கூட்டினாலும் வரும் விடையானது முழு எண்ணாக அமைகின்றது. இதேபோல எந்த இரண்டு முழு எண்களை எடுத்துப் பெருக்கினாலும் வரும் விடையானது ஒரு முழு எண்ணாகவே அமைகின்றது. மேலும் முழு எண்களும் கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களுக்கு மாற்றுப் பண்பு உடையதாக உள்ளன. மேலும் பங்கீட்டு விதியையும் இவற்றிற்குப் பயன்படுத்தலாம்.

கூட்டல் சமனி :

இயல் எண்களின் கணத்தில் இல்லாத ஒரு சிறப்பு முழு எண்கள் கணத்தில் உள்ளது. எந்தவொரு முழு எண்ணையும் எடுத்து 0 வுடன் கூட்ட அவ்வெண்ணே திரும்பக் கிடைக்கிறது.

(உ. ம்.)

$8 + 0 = 8$

$0 + 8 = 8$

ஆகவே, $8 + 0 = 8 = 0 + 8$ இது W இல் உள்ள எல்லா எண்களுக்கும் பொருந்துகின்றது. பொதுவில் $a + 0 = a = 0 + a \ \forall \ a \in W$ ($\forall$ என்ற குறியீடு "ஒவ்வொரு" என்ற பொருளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது) இங்கு 0வை "கூட்டல் சமனி" என்கிறோம்.

பயிற்சி - மெய், மெய்யல்ல எனக் கூறுக.

1) (a) இயல் எண்களின் கணம் கூட்டலைப் பொறுத்து அடைவு பெறவில்லை.

(b) இயல் எண்களின் கணம் பெருக்கலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளது.

(c) முழு எண்களின் கணத்தில் 0க்கு முன்னி உண்டு.

(d) இயல் எண்களின் கணத்தின் மிகச் சிறிய எண் 1.

(e) இயல் எண்களின் ஒரு எண்ணை விடப்பெரிய எண் அதன் இடதுபுறத்தில் அமைகின்றது.

(f) 18ன் தொடரி 17

(g) முழு எண்களின் கணத்தில் 14கு முன்னி உண்டு.

2) கீழ்வரும் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றிலும் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள பண்பினைக் கூறுக.

(a) $6 + 4 = 4 + 6$

(b) $(7 + 4) + 5 = 7 + (4 + 5)$

(c) $0 + 9 = 9$

(d) $6 \times (4 + 3) = (6 \times 4) + (6 \times 3)$

3) 6க்கும் 12க்கும் இடையே எத்தனை முழு எண்கள் உள்ளன.

4) 6க்கும் 7க்கும் இடையே இயல் எண் ஒன்று கூறுக.

5) இயல் எண்களின் கணத்தில் கூட்டல் சமனி உண்டா?

விடைகள்:

1) a) மெய்யல்ல b) மெய் c) மெய்யல்ல d) மெய் e) மெய்யல்ல
   f) மெய்யல்ல g) மெய்.

2) (a) கூட்டலின் மாற்றுப் பண்பு

   (b) கூட்டலின் சேர்ப்புப் பண்பு

   (c) கூட்டல் சமனி

   (d) பங்கீட்டுப் பண்பு

3) 5 முழு எண்கள் உள்ளன 7, 8, 9, 10, 11

4) இயல் எண் எதுவும் இல்லை.

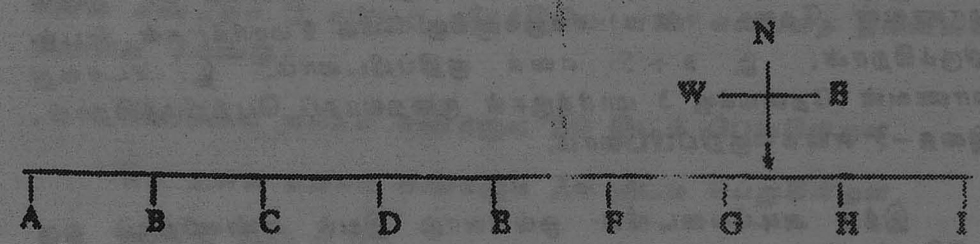
5) கிடையாது.

பாடம்—6

முழுக்கள் விகிதமுறு எண்கள்

பகுதி 1

இயல் எண்கள், முழு எண்கள் ஆகிய கணங்கள் கழித்தல் என்னும் செயலுக்கு அடைவு பெறவில்லை என்பதை முந்தைய பாடத்தில் கண்டோம். இக்குறையைப் போக்கும் பொருட்டே முழுக்கள் கணம் அமைக்கப்பட்டது.



மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் ஒரு சாலையைக் குறிக்கிறது. சாலை கிழக்கு மேற்காக செல்கிறது. A,B,C,D, —என்பன 10கி.மீ இடைவெளியில் அமைந்துள்ள கிராமங்கள் என்போம். E என்னும் ஊரிலிருந்து இராமன், கிருஷ்ணன் என்னும் இருவர் 10கி.மீ தூரம் பயணம் செய்தனர் என வைத்துக் கொள்வோம். அவர்கள் எந்த இடத்தில் பயணத்திற்குப் பிறகு உள்ளார்கள் என்பதைத் திட்டமாகக் கூற முடியாது. ஏனெனில் அவர்கள் எந்த திசையில் பயணம் செய்தனர் என்பது நமக்குத் தெரியாது. அவர்கள் இருவரும் கிழக்கு நோக்கியே பயணம் செய்திருந்தால் F என்னும் கிராமத்தில் இருப்பார்கள். ஆனால் இராமன் கிழக்குத் திசையிலும், கிருஷ்ணன் மேற்குத் திசையிலும் பயணம் செய்தனர் எனக் கொண்டால் இராமன் F என்னும் கிராமத்திலும், கிருஷ்ணன் D என்னும் கிராமத்திலும் இருப்பார்கள். பயணத்திற்குப் பிறகு அவர்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் 20கி.மீ. ஆக இருக்கும். ஆகவே அவர்கள் சேர்ந்த இடத்தைப் பற்றி நாம் முழுமையாக அறிய வேண்டுமானால்

நமக்குத் திசையைப் பற்றிய விவரம் தேவை. ஆகவே தனி எண்களால் முழுமையான விவரத்தைப் பெற நம்மால் முடிவதில்லை. எண்களுடன் திசையையும் இணைத்துக் கூற வேண்டிய அவசியம் உண்டாகின்றது. இவ்வாறு இணைக்கப்பட்ட எண்களுக்கு 'திசை எண்கள்' என்று பெயர். திசை எண்களைப் பயன்படுத்துவதால் தொடக்கநிலைக்கும் இறுதிநிலைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டினை எளிதில் காணமுடியும். ஒன்றுக்கொன்று எதிர்ப்பொருளைக் கொடுக்கும் எல்லா இடங்களிலும் திசை எண்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணமாக ஒரு மாணவன் ஒரு தேர்வில் தேர்ச்சி பெறுவதற்கு 100க்கு 35 மார்க்குகள் தேவை என்பது நமக்குத் தெரியும். ஒரு மாணவன் 40 மார்க்குகளும், மற்றொரு மாணவன் 32 மார்க்குகளும் பெற்றிருக்கிறான் என வைத்துக் கொள்வோம். முதல் மாணவன் தேவையான மார்க்குகளுக்கு மேல் 5 மார்க்குகள் பெற்றிருக்கிறான். இதை +5 எனக் குறிப்பிடலாம். இரண்டாவது மாணவன் தேவைக்கு 3 மார்க்குகள் குறைவாகப் பெற்றிருக்கிறான். இதை −3 எனக் குறிப்பிடலாம்.

இந்த அடிப்படையில் ஒவ்வொரு இயல் எண்ணிற்கும் ஒரு எதிரெண் தோற்றுவிக்கப்பட்டது.

(உ-ம்) 1ன் எதிரெண் −1

2ன் எதிரெண் −2

பொதுவில் a என்பது இயல் எண் என்றால்

aன் எதிரெண் −a

ஒரு எண்ணையும் அதன் எதிரெண்ணையும் கூட்ட கூட்டல் சமனியான 0 கிடைக்கின்றது.

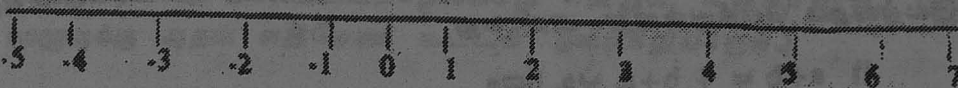
$$1 + (-1) = 0$$

$$2 + (-2) = 0$$

பொதுவில் $a + (-a) = 0$

இயல் எண்களின் கணம், அவற்றின் எதிர் எண்களின் கணம், 0 ஆகியவை மூன்றையும் சேர்க்கப்பட்ட கணம் முழுக்களின் கணம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. முழுக்களின் கணத்தை Z என்று குறிக்கிறோம்.

முழுக்கள்—கோடு



இக்கோட்டில் 0 வை மையமாகக் கொண்டால் 1,2,3...... ஆகிய எண்கள் 0க்கு வலப்புறம் −1, −2, −3− ஆகிய எண்கள் 0க்கு இடப்புறமும் அமைகின்றன. −2 என்னும் எண் 1க்கு இடப்புறமாக அமைவதால் $-2 < -1$ என்பது தெளிவு. 0க்கு வலப்புறம் அமையும் முழுக்களை $Z+$ எனக் குறிக்கலாம். இதுபோல் 0க்கு இடப்புறம் அமையும் எண்களை $Z-$ எனக் குறிக்கலாம். ஆகவே $Z = N - \cup \{0\} \cup Z+$ எனக்குறியீட்டு முறையில் எழுதலாம். முழுக்களின் கணத்தில் மிகச்சிறிய எண் என்பதோ, மிகப்பெரிய எண் என்பதோ கிடையாது (இயல் எண்களின் கணத்தில் 1 என்பது மிகச்சிறிய எண், முழு எண்களின் கணத்தில் 0 என்பது மிகச்சிறிய எண் என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

Nல் உள்ள எல்லா எண்களும் Zல் இடம் பெறுகின்றன.

Wல் உள்ள எல்லா எண்களும் Zல் இடம் பெறுகின்றன.

ஆகவே $Z \cap N = N$

$Z \cup N = Z$

இதுபோல் $Z \cap W = W$

$Z \cup W = Z$

+ என்னும் குறியை "மிகை" என்ற சொல்லாலும் − என்னும் குறியை "குறை" என்ற சொல்லாலும் குறிப்பது வழக்கம். ஆகவே $Z+$ என்பது மிகை முழுக்கள் கணம் என்றும் $Z-$ என்பது குறை முழுக்கள் கணம் என்றும் வழங்கப்படுகின்றன. அதாவது

I) முழுக்களின் கணம் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களுக்கு அடைவு பெற்றுள்ளது.

i) $a,b \in z \Rightarrow a+b \in z$

ii) $a,b \in z \Rightarrow a-b \in z$

iii) $a,b \in z \Rightarrow a \times b \in z$

2) முழுக்களின் கணம் மாற்றுப்பண்பு, தொடர்ப்பண்பு, இவற்றைப் பெற்றுள்ளது. அதாவது

i) $a+b = + b+a, \forall a, b \in z$

(கூட்டலின் மாற்றும் பண்பு)

$a \times b = b \times a \; \forall a, b \in z$

(பெருக்கலின் மாற்றும் பண்பு)

ii) $(a+b) + c = a + (b+c) \; \forall a,b,c \in z$

(கூட்டலின் தொடர்பும் பண்பு)

$(a \times b) \times c = a + (b \times c) \; \forall a,b,c \in z$

(பெருக்கலின் தொடர்பும் பண்பு)

3) முழுக்களின் கணத்தில் 0 என்பது கூட்டல் சமனி

$a + 0 = a + 0 + a \forall a \in z$

4) முழுக்களின் கணத்தில் 1 என்பது பெருக்கல் சமனி

$a \times 1 = a = 1 + a \forall a \in z$

5) ஒரு முழு எண்ணுடன் 1ஐக் கூட்ட அவ்வெண்ணின் தொடர் கிடைக்கும். இதே போல ஒரு முழு எண்ணிலிருந்து 1ஐக் கழிக்க அவ்வெண்ணின் முன்னி கிடைக்கிறது.

0ன் தொடரி $0 = 1 = 1$

0ன் முன்னி $0 - 1 = -1$

-4ன் தொடரி $(-4) + (1) = -3$

-4ன் முன்னி $(-4) - (1) = -4-1 = -5$

முழுக்களின் கணத்தில் எல்லா எண்களுக்கு முன்னி, தொடரி உண்டு.

6) ஒவ்வொரு முழுவுக்கும் ஒரு எதிரெண் உண்டு, இதை $a \in z$ எனில் $-a \in z$ என [illegible] ஒரு முழுவையும் அதன் எதிரெண்ணையும் கூட்ட 0 [illegible] கிடைக்கிறது ஆகவே

$a + b \in z$ மற்றும் [illegible] போது

a+b=0 என்பது உண்மையானால் aயை b-ன் கூட்டல் தலைகீழி என்றும், bயை a-ன் கூட்டல் தலைகீழி என்றும், கூறுகிறோம். (ஒரு முழுவுக்கு அதன் எதிரெண் கூட்டல் தலைகீழியாகும்.)

முழுக்களுக்கு "பாஸ்கரர் எண்கள்" என்ற பெயருண்டு. கணித மேதையான பாஸ்கரர் அவ்வெண்களை தன எண்கள், ரிண எண்கள் எனப் பெயரிட்டு அழைத்தார்.

7) முழுக்களின் கணம் பங்கீட்டுப் பண்பைப் பெற்றுள்ளது. அதாவது $a \times (b+c) = (a+b)(a \times c) \ \forall\ a,b,c \in Z$

8) ஒரு முழுவைப் பூச்சியத்தால் பெருக்கினாலும் அல்லது பூச்சியத்தை ஒரு முழுவால் பெருக்கினாலும் கிடைக்கும் விடை பூச்சியமாகும் அதாவது

$$a \times 0 = 0 = 0 \times \ \forall a, \in Z$$

பகுதி-2

விகிதமுறு எண்கள்:

முழுக்களின் கணம் "வகுத்தல்" என்னும் செயலைப் பொறுத்த அடைவு பெறவில்லை. இயல் எண்கள், முழுஎண்கள் ஆகிய கணங்களில் இல்லாத "கழித்தல்" என்ற செயலைப் பொறுத்த அடைவுப் பண்பு முழுக்களின் கணத்தில் உள்ளது அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் நிறையும் பொருட்களை அளவை முறையைப் பயன்படுத்தி வாங்குகிறோம். நீளம், எடை, ஆகியவை எப்போதும் முழு எண்ணாக இருப்பதில்லை. ஒரு சிறுவனுக்குச் சட்டை தைக்க துணி எடுக்கவேண்டுமானால் $1\frac{1}{2}$ மீட்டர் துணி தேவைப்படுகிறது. இந்த எண் முழு எண் அல்ல ஆக நாம் அன்றாட வாழ்க்கையில் முழு எண்கள் முழுக்கள் ஆகியவற்றைத் தவிரமற்ற எண்களையும் பயன்படுத்த வேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகின்றது.

ஒரு முழுவை மற்றொரு முழுவால் வகுத்தால் கிடைக்கும் எண்ணானது மற்றொரு முழுவாக இருக்க வேண்டும் என்ற கட்டாயமில்லை, $6 \in z$ $3 \in z$ $\frac{6}{3} = 2 \in z$ ஆனால் இச்செயலை மாற்றிச் செய்யும் போது $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \in Z$ இக்குறை விகிதமுறு எண்களின் கணத்தில் நிவர்த்தி செய்யப்படுகின்றது

ஒரு முழுவை மற்றொரு பூச்சியமில்லாத முழுவால் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் எண், விகிதமுறு எண் எனப்படும். வகுக்கும் முழு 0 ஆக இருக்கக் கூடாது என்பது மிக அவசியமான நிபந்தனை ஆகும் ஏனெனில் 0 ஆல் வகுப்பது பொருளற்றது என்பது நமக்குத் தெரியும்

ஆகவே ஒரு விகிதமுறு எண்ணை $\frac{p}{q}$ என்ற பின்ன வடிவில் குறிக்க முடியும் $p \in Z$, $q \in Z$,

மேலும் $q \neq 0$ என்பது வெளிப்படை, விகிதமுறு எண்களின் கணம் 'Q' என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \; p \in Z, q \in Z, \text{மேலும் } q \neq 0 \right\}$$ என்ற குறியீட்டு

முறையில் எழுதலாம்.

இம் முறையைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு முழுவையும் விகித முறு எண்ணாக எழுதலாம்,

5 என்பது $\frac{5}{1}$ என்றும

0 என்பதை $\frac{0}{1}$ என்றும் கருதலாமல்லவா!

ஆகவே ஒவ்வொரு முழுவும் விகிதமுறு எண்ணே.

முழுக்களின் கணத்தில் இடம் பெறும் எல்லா எண்களும் விகிதமுறு எண்களின் கணத்தில் இடம் பெறுகின்றன. ஆகவே

$Q \cap Z = Z$

$Q \cup Z = Q$ என்பதை வெளிப்படையாக நாம் அறியலாம்.

0வை மையமாகக் கொண்டு எண் கோட்டில் விகிதமுறு எண்களைக் குறித்தால் மிகை விகிதமுறு எண்கள் 0க்கு வலப்புறத்திலும், குறை விகிதமுறு எண்கள் 0க்கு இடப்புறத்திலும் அமையும்.

மிகை விகிதமுறு எண்களின் கணத்தை Q^+ என்றும், குறை விகிதமுறு எண்களின் கணத்தை Q^- என்பது குறிக்கிறோம். ஆகவே

$Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$ என்பதும் வெளிப்படை.

1) விகிதமுறு எண்களின் கணம் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் வகுத்தல் (பூச்சியத்தாலன்றி) ஆகிய நான்கு செயல்களுக்கும் அடைவு பெற்றுள்ளது.

i) $a, b \in Q \Rightarrow a+b \in Q$

ii) $a, b \in Q \Rightarrow a-b \in Q$

iii) $a, b \in Q \Rightarrow a \times b \in Q$

iv) $a, b \in Q$ மேலும் $b \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} \in Q$.

2) விகிதமுறு எண்களின் கணம் மாற்றுப்பண்பு, தொடர்புப் பண்பு இவற்றைப் பெற்றுள்ளது.

3) விகிதமுறு எண்களின் கணத்தில் 0 என்பது கூட்டல் சமனி.

4) விகிதமுறு எண்களின் கணத்தில் 1 என்பது பெருக்கல் சமனி

5) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணிற்கும் ஒரு கூட்டல் நேர்மாறு (எதிரெண்) உண்டு.

6) விகிதமுறு எண்களின் கணம் பங்கீட்டுப் பண்பைப் பெற்றுள்ளது

7) ஒரு விகிதமுறு எண்ணை பூச்சியத்தால் பெருக்கினாலும் அல்லது பூச்சியத்தை ஒரு விகிதமுறு எண்ணால் பெருக்கினாலும் கிடைக்கும் விடை பூச்சியமாகும்.

மேலும் பூச்சியமல்லாத ஒரு விகிதமுறு எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். அந்த விகிதமுறு எண் $\dfrac{p}{q}$ என்ற வடிவத்தில் இருக்கும்.

இந்த எண் பூச்சியமில்லை என்பதால் $p \neq 0$ மேலும் $q \neq 0$, எனவே நாம் $\frac{p}{q}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணை அமைக்கலாம்.

$$\frac{p}{q} \times \frac{q}{p} = 1$$ என்று அமைகின்றது. அதாவது

இரு விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கற் பலன் 1 என வருகின்றது (1 என்பது பெருக்கல் சமனி என்பது நமக்குத் தெரிந்ததே)

$\frac{q}{p}$ என்னும் விகிதமுறு எண்ணானது $\frac{p}{q}$ என்னும் விகிதமுறு எண்ணின் பெருக்கல் தலைகீழி எனப்படும்.

இதேபோல $\frac{q}{p}$-ன் பெருக்கல் தலைகீழி $\frac{p}{q}$ ஆகும்.

விகிதமுறு எண்களின் கணத்தில் 0க்குப் பெருக்கல் தலைகீழி கிடையாது

0 வை $\frac{0}{1}$ என்று எழுத முடியுமாதலால் 0 ஒரு விகிதமுறு எண் 0க்குப் பெருக்கல் தலைகீழி எழுத வேண்டுமென்றால் அந்த எண் $\frac{1}{0}$ என இருக்கவேண்டும். ஆனால் 0 ஆல் வகுப்பது பொருளற்றது என்பதால் 0க்குப் பெருக்கல் தலைகீழி கிடையாது. அதாவது 0ஐ எந்த எண்ணால் பெருக்கினாலும் 1 என்ற எண் கிடையாது.

அடர்த்திப் பண்பு

எந்த இரு இயல் எண்களுக்கும் இடையில் மற்றொரு இயல் எண் உள்ளது என்று நம்மால் கூற இயலாது. இந்த நிலைமை முழு எண்கள் கணத்திற்கும் முழுக்கள் கணத்திற்கும் பொருந்தும். ஆனால், எந்த இரு விகிதமுறு எண்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் அவற்றிற்கு இடையில் மற்றொரு விகிதமுறு எண் காண முடியும். இதற்கு விகிதமுறு எண்களின் அடர்த்திப் பண்பு என்று பெயர்.

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ஆகிய இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே $\frac{3}{8}$ என்ற விகிதமுறு எண் கிடைக்கும்.

சமமான விகிதமுறு எண்: ஒரு பூச்சியமில்லாத விகிதமுறு எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். அதன் பகுதி, தொகுதி இரண்டையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கும் ஒன்றின் மதிப்பும், எடுத்துக் கொண்ட விகிதமுறு எண்ணின் மதிப்பும் சமம் ஆகும். இந்த எண்ணே சமமான விகிதமுறு எண்.

உதாரணம்: $\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{2}{6}$

$\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}=\frac{3}{9}$

$\frac{1}{3}\times\frac{4}{4}=\frac{4}{12}$

$\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$ ஆகியவை $\frac{1}{3}$ என்னும் விகிதமுறு எண்ணிற்கு சம மதிப்புள்ள விகிதமுறு எண்களாகும்.

பயிற்சி:

1) +8 என்பது வடக்கில் 8மீ தூரம் செல்லுதல் என்பதைக் குறித்தால் —4 என்பது எதைக் குறிக்கும்?

2) Zல் பெருக்கல் சமனி எது?

3) பின் வருவனவற்றின் எதிரெண்களை எழுதுக.

i) 6 ii) —7 iii) —5 iv) —y.

4) Z+ என்பது எந்தக் கணத்தைக் குறிக்கும்?

5) மிகை முழுக்களையும், குறை முழுக்களையும் சேர்க்கக் கிடைக்கும் கணம் முழுக்களின் கணம் வாக்கியம் மெய்யா? அல்லவென்றால் காரணம் கூறுக.

6) விகிதமுறு எண்களின் கணத்தில் எந்த எண்ணிற்கும் பெருக்கல் தலைகீழி கிடையாது?

7) Zல் எந்த எண் அதன் எதிரெண்ணிற்குச் சமம்?

II மெய், மெய்யல்ல எனக் கூறுக:

1) முழுக்களின் கணம் வகுத்தலைப் பொறுத்து அடைவு பெற்றுள்ளது.

2) $a\times(b+c) = (a\times b) + (a\times c) \ \forall\ a,b,c \in Z$

3) Zல் எல்லா எண்களுக்கும் முன்னி உண்டு.

4) Qல் எல்லா எண்களுக்கும் பெருக்கல் தலைகீழி உண்டு.

5) Zல் மிகச்சிறிய எண் 0

6) எந்த இரு விகிதமுறு எண்களுக்கும் இடையில் மற்றொரு விகிதமுறு எண் அமையும்?

III பின்வரும் கணக்குகளைச் செய்க:-

i) சுருக்குக [illegible] + [illegible] + [illegible]

ii) சுருக்குக [illegible] + (−[illegible])

I. விடைகள்

1) 4ம், ஒற்றைச் செயலிகள் (2) F

3) i) −6 ii) 7 iii) 8 iv) y

4) மிகை முழுக்களின் கணம்

5) மெய்யல்ல, 0 என்ற உறுப்பு இல்லை.

6) 0வுக்கும் பெருக்கல் தலைகீழி இல்லை.

7) 0

I. 1) மெய்யல்ல

2) மெய்

3) மெய்

4) மெய்யல்ல

5) மெய்யல்ல

6) மெய்

III. (1) [illegible] (2) [illegible]

நேரம் 2½ மணி மதிப்பெண்கள்

1) i) முடிவுறு கணம், முடிவுறாக்கணம் உதாரணங்களுடன் விளக்குக.

ii) A = [1, 2, 3, 3, 4, 2, 5] n (A) என்னவாகு?

2) i) φ = [o] இது சரியா, தவறா ஏன்?

ii) A = [1, 2, 3]; B = [3, 1, 2]

ACB இது மெய்யான வாக்கியமா?

3) A = [a, b, c] இதன் எல்லா உட்கணங்களையும் அமைக்கவும் A ன் n உறுப்புக்கள் உள்ளன என்றால் A ன் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை என்னவாகு?

4) சமான கணங்கள், சம கணங்கள் இவற்றிற்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டை விளக்கவும்.

5) [a, b, c, d] என்ற கணத்தின் இரு உறுப்புக்கள் கொண்ட உட்கணங்களை மட்டும் எழுதுக.

6) i) A = [1, 2, 3, 4, 5, 6]

B = [3, 5, 6, 7, 9, 11]

எனில் i) AUB, AUB, AUA இவற்றைக் காண்க.

7) ACB என்றால் AUB = B என்பது மெய்யான கூற்றா?

8) ∈ = [ஆங்கில எழுத்துக்கள்]

A = [a, e, i, o, u]

A' = [இதைக் காண்க].

9) A = [a, b, c] B = [1, 2] எனில்

i) A × B ii) B × A iii) B × B இவற்றை அமைக்கவும்.

10) i) $n(A \times B) = (B \times A)$ இது மெய்யான வாக்கியமா? ஒரு உதாரணத்துடன் விளக்குக.

ii) $A \times B$ எப்பொழுதும் $B \times A$க்குச் சமமாக இருக்கும்

iii) $n(A) = 4$ $n(B), = 3$ என்றால்

$n(A \times B)$ இல் உள்ள உறுப்புக்கள் எத்தனை?

11) ஒரு கணம் A, அதன் நிரப்பி A' இவற்றை வென்படம் மூலம் விளக்குக.

12) வென்படம் வரைந்து சரிபார்க்க

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B)(A \cup C)$

13) 90 மாணவர்கள் உள்ள வகுப்பில் 60பேர் கணிதத்திலும், 50 பேர் ஆங்கிலத்திலும் தேர்ச்சி பெற்றனர் என்றால் இரண்டு பாடங்களிலும் தேர்ச்சி பெற்றவர் எத்தனை பேர்?

பாடம்—7

விகிதமுறு எண்

பகுதி 1

நாம் சென்ற பாடத்தில் விகிதமுறு எண்களைப் பற்றிப் படிக்கும் போது அவற்றை $\frac{b}{q}$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம் [p∈z, q∈z, q≠o] என்று படித்தோம். ஆகவே ஒரு விகிதமுறு எண்ணை தசம பின்னமாக மாற்றலாமல்லவா? அவ்வாறு மாற்றி எழுதும்போது சில பின்னங்களின் தசமகரு முடிவடையும் தசம உருவாக அமையும். சில வேளைகளில் தசமகரு முடிவடையாமல் வளர்ந்து கொண்டே செல்லும் அவற்றின் வகைகளை இப்போது பார்ப்போம்.

எ. கா) முடிவடையும் தசம பின்னங்கள்

1) $\frac{1}{2} = 0.5$

2) $\frac{1}{4} = 0.25$

3) $\frac{1}{8} = 0.125$

4) $\frac{1}{16} = 0.0625$

மேற்கண்ட விகிதமுறு எண்களைத் தசம பின்னங்களாக மாற்றும் போது தசமகரு முடிவடைந்து விடுகின்றது. இங் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள சில விகிதமுறு எண்களைத் தசம உருவிற்கு மாற்றுவோம்.

முடிவடையா தசம பின்னங்கள்

1) $\frac{1}{3} = 0.3333 \ldots\ldots$

2) $\frac{1}{6} = 0.16666 \ldots\ldots$

3) $\frac{1}{7} = 0.142857\ 142857 \ldots\ldots$

8) $\frac{1}{9} = 0.11111 \ldots\ldots$

இந்த விகிதமுறு எண்களைத் தசம பின்னங்களாக மாற்றும்போது தசம உரு முடிவடைவதில்லை. ஆனால் சில குறிப்பிட்ட எண்கள் திரும்பத் திரும்ப வருகின்றன அல்லவா! இத்தகைய தசம பின்னங்கள் சுழல் தன்மை பெற்ற தசம பின்னங்கள் எனப்படும். ஆகவே தசம பின்னங்களாக மாற்றப்படும் விகிதமுறு எண்கள் இரு பிரிவுகளாகப் பிரிகின்றன.

1) முடிவடையும் தசமபின்னங்கள்
2) முடிவடையாத ஆனால் சுழல் தன்மை பெற்ற தசம பின்னங்கள்.

ஆகவே மேற்கூறிய இரு பிரிவுகளும் விகிதமுறு எண்களையே குறிக்கின்றன. முடிவடையும் தசம பின்னங்களையும், முடிவடையாத சுழல் தசம பின்னங்களையும் விகிதமுறு எண்களாக மாற்றமுடியும்.

உ.ம் 1) 0.252 என்ற தசமபின்னத்தை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக

$$0.252 = \frac{252}{1000}$$

$$= \frac{63}{250}$$

முடிவடையும் தசம பின்னங்களை சுலபமாக விகிதமுறு எண்களாக மாற்றிவிட முடிகின்றது; ஆனால் முடிவடையாத சுழல் தன்மை பெற்ற தசமபின்னங்களை விகிதமுறு எண்களாக மாற்ற மேற்கொள்ளும் முறை வேறுபடுகிறது.

உ.ம். 2) 0.33 2) 0.1212 ஆகிய சுழல் பின்னங்களை விகிதமுறு எண்களாக மாற்றுக.

1) 0.33 என்பது 0.3333.ஐக் குறிக்கும்.

$x = 0.3333 \ldots\ldots$ என்க (1)

10 ஆல் பெருக்குக

$\therefore 10x = 3.3333 \ldots\ldots$ —(2)

$(2) - (1) = 9x = 3.$

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

சரிபார்த்தல் $\frac{1}{3} = 0.333\ ......$

$$\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$$

(2) 0.1212 என்பது 0.121212 ...... ஐக் குறிக்கும்.

$x = 0.121212\ ......$ என்க —(1)

100 ஆல் பெருக்குக.

$100x = 12.121212\ ......$ —(2)

$(2) - (1)\ 99x = 12$

$$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

சரிபார்த்தல் $\frac{4}{33} = 0.121212\ ......$

$$\frac{4}{33} = 0.\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}$$

முதல் எடுத்துக்காட்டில் x, 10 ஆல் பெருக்கப்பட்டது. ஆனால் இரண்டாம் எடுத்துக்காட்டில் x, 100 ஆல் பெருக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் காரணத்தை நாம் நன்கு புரிந்து கொண்டால் தவிர இக்கணக்குகளை எளிதில் செய்ய இயலாது. முதல் எடுத்துக்காட்டில் சுழல் தன்மை அடுத்தடுத்து வருவதால் 10 ஆல் பெருக்கினால் சுழல் தன்மை மறைகின்றது. ஆனால் இரண்டாம் எடுத்துக்காட்டில் சுழல் தன்மை அடுத்தடுத்து வரவில்லை. ஒரு இடம் விட்டு விட்டு வருகின்றது. ஆகையால் 100ஆல் பெருக்குவது அவசியமாகிறது. ஆகவே சுழலும் தன்மையைப் பொறுத்துப் பெருக்க வேண்டிய எண்ணை நிர்ணயிக்க வேண்டும். இதை இன்னொரு எடுத்துக்காட்டின் மூலம் புரிந்து கொள்ளலாம்.

எ.டு : 3

0.121 121 121 ஐ விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

0.121 121 121 என்பது 0.121 121 121 121 ... ஐக் குறிக்கும்.

x = 0.121 121 121 ... என்க.

அம்புக்குறி சுழல் தன்மை எந்த இடத்தில் திரும்புகிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. இங்கு x ஐ 1000 ஆல் பெருக்குவது அவசியமாகிறது.

1000 ஆல் பெருக்கவும்.

1000x = 121 . 121 121 121 ... .. (2)

(2)—(1) 999x = 121

$$x = \frac{121}{999}$$

எனவே சுழலும் தன்மை நிகழும் இடத்தை நிர்ணயித்துக் கொண்டால் இத்தகைய எண்களை விகிதமுறு எண்களாக மாற்றுவது எளிது.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து முடிவடையும் தசமபின்னங்கள் முடிவடையாத சுழல் தன்மை பெற்ற தசமபின்னங்கள், விகிதமுறு எண்களைக் குறிக்கும் என்பது தெளிவாகத் தெரிகின்றது.

சுழல் தன்மையற்ற முடிவுறா தசமபின்னங்கள் எத்தகைய எண்கள் என்ற கேள்வி இப்போது எழுகிறது. இவை நிச்சயமாக விகிதமுறு எண்களைக் குறிக்கவில்லை. ஆகவே இவை புதுவகை எண்களாக இருக்கவேண்டும். இவ்வகை எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன. கணிதத்தில் விகிதமுறா எண்கள் மிகவும் அதிக அளவில் தேவைப்படுகின்றன. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $(5)^{\frac{1}{3}}$ ஆகியவை விகிதமுறா எண்களுக்கு உதாரணங்களாகும். 1 செ.மீ. பக்க அளவுடைய சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தின் அளவைத் துல்லியமாகக் கணக்கிட முடியாது. தோராயமாகத்தான் கணக்கிடலாம். இதே

போல 2.ச.செமீ. பரப்பளவுடைய சதுரத்தின் பக்க அளவைத் துல்லியமாகக் கணக்கிட முடியாது. தோராயமாகத்தான் கணக்கிட முடியும். ஏனெனில் சதுரத்தின் பக்க அளவு a செ.மீ எனக் கொண்டோமானால் அதன் பரப்பளவு a^2 ச.செ.மீ ஆகிறது. ஆகவே $a^2=2$ என அமையுமாறு a என்ற எண்ணைக் காணுதல் வேண்டும்.

$$1.4 \times 1.4 = 1.96$$

$$1.41 \times 1.41 = 1.9881$$

$$1.414 \times 1.414 = 1.999396$$

$$1.4142 \times 1.4142 = 1.99996164$$

இவ்வாறு நம்மால் 1க்கு மிக நெருங்கிய எண்ணைத்தான் அடைய முடிகிறதே தவிர சரியாக 2 என்னும் எண்ணை அடைய முடிவதில்லை.

ஆகவே a^2 என்றால் $a = \sqrt{2}$ எனக் குறிப்பதுதான் சரியான முறையாகும் $\sqrt{2}$ன் தோராய மதிப்பு (7 தசமத் திருத்தமாக) 1.4142133. இந்த தசம பின்னம் முடிவடையவில்லை. மேலும் சுழல் தன்மையும் பெற்றிருக்கவில்லை. ஆகவே $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் என்று தெரிகின்றது. $\sqrt{2}$ ஐ விகிதமுறா எண் என்று பின்வரும் முறையில் நிருபிக்கலாம். 1) $\sqrt{2}$ விகிதமுறா எண் என நிருபிக்கவும்.

நிருபணம் :-

$\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் அல்ல என்று கொள்வோம்.

எனவே $\sqrt{2}$ விகிதமுறா எண்ணாகத் தான் இருக்கவேண்டும்.

விகிதமுறு எண் $\sqrt{2}$ஐ $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம் என்பது தெரியும். $(p, q \in z\ q \neq 0)$.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [தொகுதி, பகுதிக்குப் பொதுக் காரணிகள் இருந்தால் அவற்றை நீக்கிவிட முடியும். ஆகவே பொதுக் காரணிகளை

[நீக்கிய வடிவம் $\frac{p}{q}$ என்க. அதாவது p, q-க்குப் பொதுக் காரணிகள் இல்லை என்க.]

$$(\sqrt{2}) = \left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow 2q^2 = p^2$$

p^2 என்பது வர்க்க எண், $2q^2$ என்பது இரட்டை எண்; $p^2 = 2q^2$ என்பதால் $2q^2$ என்பது ஒரு இரட்டை வர்க்க எண். ஒரு இரட்டை வர்க்க எண்ணின் வர்க்க மூலம் இரட்டை எண் ஆகும். அதாவது ஒரு இரட்டை வர்க்க எண் 4-ஆல் வகுபடும். ஆகவே

$p^2 = 2q^2 = 4k^2$ என்க (k இயல் எண்)

$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$

$\Rightarrow q^2 = 2k^2$ (இருபுறமும் 2ஆல் வகுக்கவும்)

$p^2 = 2q^2$ என்பதால் இரட்டை எண். ஆகவே P என்பது இரட்டை எண். மேலும் $q^2 = 2k^2$ என்பதால் q^2 என்பது இரட்டை எண். ஆகவே q என்பது இரட்டை எண். மேற்கூறிய விளக்கங்களில் இருந்து p-யும் இரட்டை எண், q-யும் இரட்டை எண் என்பது தெளிவாகிறது. p,q என்ற முழுக்களுக்கு 2 பொது காரணியாக அமைகின்றது. இது எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு முரணானது (ஏனெனில் p,q க்குப் பொதுக்காரணிகள் இல்லை என்பது நமது ஆரம்பநிலை).

ஆகவே $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் என எடுத்துக்கொண்டது தவறாகும். ஆகவே $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண்.

இதைப் போலவே $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ஆகிய எண்களும் விகிதமுறா எண்கள் என நிரூபிக்கலாம்.

பொதுவில் k என்னும் எண் ஒரு முழுவர்க்க எண் இல்லை என்றால் $\sqrt{k}$ என்பது விகிதமுறா எண்ணாகும்.

குறிப்பு :- π என்பது விகிதமுறா எண்ணேயாகும், அதன் தோராய மதிப்பு $\frac{22}{7}$

பயிற்சி :

I. மெய், பொய்யா எனக் கூறுக.

1) சுழல் தன்மை பெறா முடிவுறா தசமபின்னங்கள் விகிதமுறா எண்களாகும்.
2) $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவத்தில் உள்ள எல்லா விகிதமுறு எண்களையும் சுழல் தன்மை பெற்ற முடிவுறா தசம பின்னங்களாக மாற்றலாம்.
3) $\sqrt{7}$ என்பது விகிதமுறா எண்
4) $\sqrt{16}$ என்பது விகிதமுறு எண்
5) ஒவ்வொரு முடிவுறு தசமபின்னமும் விகிதமுறு எண்ணாகும்
6) விகிதமுறா எண்களை இரு முழுக்களின் விகிதமாகக் கூறலாம்
7) 127.65 என்பது விகிதமுறு எண்.
8) 0.12321432... என்பது விகிதமுறா எண்
9) 0.124156... விகிதமுறா எண்.
10) ½ என்பது விகிதமுறா எண்

II. கீழ்க்காணும் சுழல் தன்மை பெற்ற முடிவுறாத் தசமபின்னங்களை $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவத்திற்கு மாற்றுக.

1) $0.23\dot{8}\dot{3}$

2) 0. 142857 142857

3) 0. 213 213

III $\sqrt{3}$ விகிதமுறா எண் என நிரூபிக்கவும்.

விடைகள் :-

I 1) மெய்யல்ல 2) மெய்யல்ல 3) மெய் 4) மெய் 5) மெய்
6) மெய்யல்ல 7) மெய் 8) மெய் 9) மெய்யல்ல 10) மெய்

II) 1) $\frac{23}{90}$ (2) $\frac{1}{7}$ (3) $\frac{71}{333}$

பாடம்—8

மெய்யெண்கள் — தனிமதிப்பு

நாம் சென்ற பாடத்தில் விகிதமுறு எண்கள், விகிதமுறா எண்கள் ஆகியவற்றை பற்றிப் படித்தோம். எண் கோட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணுடன் பொருத்தம் செய்ய முடியாது. ஆனால் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணையும் ஒரு புள்ளியுடன் பொருத்தம் செய்யலாம். பொருத்தம் செய்யமுடியாத புள்ளிகள் விகிதமுறா எண்களைக் குறிக்கின்றன. ஆகவே எண்கோட்டில் அமையும் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒரு எண்ணைப் பொருத்தம் செய்ய வேண்டுமெனில் விகிதமுறு எண்கள், விகிதமுறா எண்கள் ஆகிய கணங்களின் சேர்ப்புக் கணத்தை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இவ்விரண்டு கணங்களின் சேர்ப்புக்கணம் "மெய்யெண்களின் கணம் "R" எனப்படும். மெய்யெண்களின் கணத்திற்கும், எண் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளின் கணத்திற்கும் ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தம் உண்டு அதாவது எண்கோட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் இசைந்த ஒரு மெய்யெண் உண்டு அதே போல் மெய்யெண் கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும் இசைந்த ஒரு புள்ளி எண் கோட்டில் உண்டு.

மெய்யெண்களின் கணம், அடிப்படைச் செயல்களான கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகிய நான்கு செயல்களுக்கும் அடைவுப் பண்பு பெற்றுள்ளது. மேலும் தொடர்ப்பண்பு, மாற்றுப்பண்பு, பங்கீட்டுப் பண்பு இவற்றையும் மெய்யெண்கள் பெற்றுள்ளன. மெய்யெண் கணத்தில் கூட்டல் சமனி, பெருக்கல் சமனி உள்ளன. எல்லா மெய்யெண்களுக்கு கூட்டல் தலைகீழி (Additive inverse) உள்ளன. 0 வைத்தவிர எல்லா எண்களுக்கு பெருக்கல் தலைகீழி உள்ளன. அடைவுப்பண்பை கீழ்வரும் அட்டவணையின் மூலம் எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம்.

	கூட்டல்	கழித்தல்	பெருக்கல்	வகுத்தல்
N	√	×	√	×
W	√	×	√	×
Z	√	√	√	×
Q	√	√	√	√
	√	√	√	√

N இயல் எண்கள்

W முழு எண்கள்

Z முழுக்கள்

Q விகிதமுறு எண்கள்

R மெய்யெண்கள்

√ குறி அடைவுப் பண்பு பெற்றுள்ளதைக் குறிக்கின்றது.

× குறி அடைவுப் பண்பு பெறவில்லை என்பதைக் குறிக்கின்றது

ஒரு மிகை விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்கமூலம் ஒரு மிகை விகித முறு அல்லது குறை விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க வேண்டிய அவசிய மில்லை.

2-ம் $4 \in Q$ $\sqrt{4} = +2$ or -2

$+2 \in Q$ $-2 \in Q$

ஆனால் $5 \in Q$, $\sqrt{5} \in R$

இக்குறை மெய்யெண்களின் கணத்தில் நிவர்த்தி செய்யப்படுகிறது ஒரு மிகை மெய்யெண்ணின் வர்க்க மூலம் மெய்யெண்ணாகவே அமைகிறது.

$$a > 0,\ a \in R \Rightarrow \sqrt{a} \in R$$

[illegible]மை :

a, b என்பன இரு மெய்யெண்கள் என்க. அப்போது கீழ் வரும் நிபந்தனைகளில் ஒன்று பூர்த்தி செய்யப்படுகின்றது.

i) $a > b$

ii) $a = b$

iii) $a > b$

இதை மெய்யெண்களின் வரிசைப் பண்பு என்று கூறுகிறோம்.

2) மெய்யெண்களின் கணத்திலும் பின்வரும் கூற்றுகள் மெய்யானவை $a, b, c, d, \in R$ என்க.

i) $a > b$ $b > c$ எனின் $a > c$

ii) $a > b$ என்றால் $a + c > b + c$

iii) $a > b$ $c > d$ எனின் $ac > bc$

$a > b$ $c > d$ எனின் $ac > bc$

iv) $a > b$ $c > d$ எனின் $a + c > b + d$

3) $a, b \in R$ என்க.

$a \times b = 0$ என்றால் $a = 0$ அல்லது $b = 0$

ii) $a^2 + b^2 = 0$ என்றால் $a = 0$ மேலும் $b = 0$

iii) $(-a) \times (-b) = ab$

4) கூட்டலின் நீக்கல் விதி : $a, b \in R$

$(a + b) = \quad (b + c)$ என்க.

இருபுறமும் $(-c)$ யைக் கூட்ட

$a + c + (-c) = b + c + (-c)$

$a + (c - c) = b + (c - c)$

$a + 0 = b + 0$

$a = b$

[அதாவது $a + c = b + c > = ab$

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள தொடர்புப் பண்பு, கூட்டல் தலைகீழி கூட்டல் தலைகீழி கூட்டல் சமனி இவற்றின் பண்புகளை மாணவர்கள் நினைவு கூர வேண்டும்.]

5) பெருக்கலின் நீக்கல் விதி : $a, b, c, \in R$

$c \neq 0$

$a \times c = b \times c$ எனின்

இருபுறமும் $\frac{1}{c}$ ஆல் பெருக்கவும் (c பூச்சியமில்லையாதலால் $\frac{1}{c}$ என்பதும் ஒரு மெய்யெண் என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்)

$$(a \times c) \times \frac{1}{c} = (b \times c) \times \frac{1}{c}$$

$$a \times \left(c \times \frac{1}{c} \right) = b \times \left(c \times \frac{1}{c} \right)$$

$$a \times 1 = b \times 1$$

$$a = b$$

அதாவது

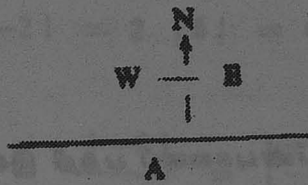
$a + c = b \times c$ மேலும் $c \neq 0 => a = b$

[மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில் தொடர்புப்பண்பு, பெருக்கல் தலைகீழி பெருக்கல் சமனி ஆகியவை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன].

6) மெய்யெண்களின் அடர்த்திப் பண்பு :

ஏதேனும் இரு மெய்யெண்களுக்கு இடையில் (அவற்றின் வித்தியாசம் எவ்வளவு சிறியதாக இருந்தாலும்) மற்றொரு மெய்யெண் உண்டு இதையே நாம் மெய்யெண்களின் அடர்த்திப்பண்பு என்று கூறுகிறோம். இதிலிருந்து இரு மெய்யெண்களுக்கு இடையில் எண்ணிக்கையிடங்காத பல மெய்யெண்கள் அமைந்துள்ளன என்பதை புரிந்து கொள்ளலாம்.

பகுதி-2



A என்னும் இடத்தில் இருந்து கிழக்காக 3½ கி.மீ தூரம் செல்கிறார் என்றும் மற்றொருவர் மேற்கில் 3½ கி.மீ. தூரம் செல்கிறார் என்றும் வைத்துக் கொள்வோம். கிழக்கே செல்வதை + என்னும் குறியால் குறித்தோமானால் மேற்கே செல்வதை — என்னும் குறியால் குறிக்கலாம். ஆகவே முதலில் சென்றவர் + 3½ கி. மீ. தூரம் சென்றார் என்றும் இரண்டாமவர் —3½ கி. மீ. தூரம் சென்றார் என்றும் கூறுகின்றோம். இங்கு +, — என்பன திசையைப்பற்றிய நாம் அறிந்து கொள்ள உதவுகின்றன. ஆனால் திசையைப் பற்றி கவலை கொள்ளாமல் அவர்கள் பயணம் செய்த தூரத்தை மட்டும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டுமானால் இருவருமே 3½ கி. மீ. தூரம் தான் பயணம் செய்திருக்கின்றனர். இம்மாதிரி சமயங்களில் பயன்படக்கூடிய ஓர் செயலைப் பற்றி நாம் இங்கு அறிந்து கொள்ளலாம்.

தனி மதிப்பு :

பூச்சியமல்லாத ஒரு மெய்யெண்ணின் தனிமதிப்பு அம்மெய்யெண், அம்மெய்யெண்ணின் எதிரெண் இவற்றுள் பெரியதற்குச் சமம்.

பூச்சியத்தின் தனிமதிப்பு பூச்சியம் ஆகும்.

1) + 3 என்பது ஒரு மெய்யெண். இதன் எதிரெண் —3 இந்த இரண்டு எண்களில் பெரியது + 3.

+ 3ன் தனிமதிப்பு 3.

2) — 4.21 என்பது ஒரு மெய்யெண். இதன் எதிரெண் + 4.21 இவற்றுள் பெரியது + 4. 21. ஆகவே —4.21ன் தனிமதிப்பு 4.21 தனி மதிப்பை | | என்ற குறியீட்டால் குறிக்கின்றோம்.

1) $|+3| = 3$

2) $|-4.21| = 4.21$

3) $|0| = 0$

தனி மதிப்பின் முக்கியமான சில பண்புகளைப் பற்றி இங்கு அறிந்து கொள்வோம்.

a) i) $3, 4 \in R$ $\qquad 3 \times 4 = 12 \in R$

$|3| = 3; \qquad |4| = 4;$

$|3 \times 4| = |12| = 12$

அதாவது $|3| \times |4| = |3 \times 4|$

ii) $-2, \ 7 \in R$ $\qquad -2 \times 7 = -14 \in R$

$|-2| = 2; \qquad |7| = 7$

$|-2 \times 7| = |-14| = 14$

அதாவது $|-2| \times |7| = |-2 \times 7|$

ஆகவே மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளில் இருந்து

$a, b \in R$ என்றால்

$|a| \times |b| = |a \times b|$ என்று தெரிகிறது.

iii) $4 \in R \quad 5 \in R \qquad \frac{4}{5} \in R$

$|4| = 4; \quad |5| = 5; \quad \left|\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5}$

அதாவது $\frac{|4|}{|5|} = \left|\frac{4}{5}\right|$

(iv) $|-2| = 2 \quad |6| = 6; \quad \left|\dfrac{-2}{6}\right| = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

அதாவது $\quad \dfrac{|-2|}{|6|} = \left|\dfrac{-2}{6}\right|$

ஆகவே பொதுவிய எடுத்துக்காட்டுகளில் இருந்து a∈R, b∈R என்றால்

$\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$ என்று தெரிகிறது.

b) i) 7∈R; $\quad$ 6∈R $\quad$ 7+6∈R

$|7| = 7; \quad |6| = 6; \quad |7+6| = |13|$

அதாவது $|7+6| = |7| + |6|$

ii) $-8 \in R; \quad 3 \in R \quad (-8+3) \in R.$

$|-8| = 8; \quad |3| = 3; \quad |-8+3| = |-5| = 5$

அதாவது $|-8+3| < |8| + |3|$

ஆகவே பொதுவிய எடுத்துக்காட்டுகளில் இருந்து a∈R, b∈R என்றால்

$|a+b| \leq |a| + |b|$ என்று தெரிகிறது.

அதாவது $|a+b|$ன் மதிப்பு $|a| + |b|$ன் மதிப்பைவிடக் குறைவாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்குமேயன்றி அதிகமாக இருக்காது.

iii) $7 \in R; \quad 6 \in R \quad (7-6) \in R$

$|7| = 7; \quad |6| = 6; \quad |7-6| = |1| = 1$

அதாவது $|7-6| = |7| - |6|$

iv) $10 \in R; -8 \in R$ 3; $\in \{10-(-8)\} \in R$

$|10| = 10;\ |-8|\, 8;\ |10-(-8)| = |18| = 18$

அதாவது $|10-(-8)| > |10| - |8|$

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளில் இருந்து

$a \in R;\ b \in R$ எனில்

$|a-b| \geq |a| - |b|$ என்று தெரிகிறது.

மேற்கூறிய பண்புகளை நினைவில் வைத்துக்கொள்ள வேண்டியது மிக அவசியமாகும். இவற்றைப் பின் வருமாறு தொகுத்துக் கூறலாம். $a, b \in R$

i) $|a \times b| = |a| \times |b$

ii) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \left|\dfrac{|a|}{|b|}\right.$

iii) $|a+b| < |a| + |b|$

iv) $|a-b| \geq |a| - |b|$

a என்பது ஒரு மெய்யெண் எனில், எண்களின் முக்கூற்றுப்பண்பின் படி

i) a மிகை மெய்யெண்ணாக இருக்கலாம்.

ii) a குறை மெய்யெண்ணாக இருக்கலாம்.

iii) a பூச்சியமாக இருக்கலாம்.

i) a மிகை மெய்யெண் எனில் $a > 0$

அப்போது $|a| = a$ ஆகும்

ii) a குறை மெய்யெண் எனில் $a < 0$

அப்போது $|a| = -a$ ஆகும் (ஏனெனில் $-a$ மிகை ஆகும்)

iii) $a = 0$ என்க.

அப்போது $| a | = 0$ ஆகும்.

பயிற்சி :

I) சரியா பிழையா எனக் கூறுக :-

1) விகிதமுறு எண்கள் கணம், விகிதமுறா எண்கள் கணம் இவற்றின் சேர்ப்பு கணம் மெய்யெண்களின் கணம் ஆகும்.

2) எண் கோட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும் ஒரு மெய்யெண்ணுடன் பொருத்தம் செய்ய முடியாது.

3) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணையும் சுழல் தன்மை பெற்ற முடிவுறாத் தசமபின்னமாக மாற்றமுடியும்.

4) மெய்யெண்கள் கணம் விகிதமுறு எண்களின் கணத்தின் உட்கணமாகும்.

5) மெய்யெண்களின் கணம் பங்கீட்டுப் பண்பைப் பெற்றிருக்கவில்லை.

6) இரு மெய்யெண்களுக்கு இடையில் மற்றொரு மெய்யெண்ணை எப்போதும் காணலாம்.

7) $a > b$ என்றால் $-a < -b$

8) $a > b$; $b > c$ என்றால் $a + b < 2c$

9) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$

10) $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ மேலும் $b = 0$

II) கீழ்வருவனவற்றை மதிப்பு சுருக்கிக் கூறுக.

i) $| 3 | + | 5 |$

ii) $| 2 | - | 7 |$

iii) $-[\,|3| + |7|\,]$

iv) $-[\,|4| \times |2|\,]$

v) $[\,|-3| \times |-7|\,]$

III) 1) a என்பது குறை மெய்யெண் என்றால் $|a|$, a இவற்றில் எது பெரியது?

2) $|a| = -a$ என்றால் a மிகையா, குறையா

3) தீர்வுக் கணம் காண்க. $|2x + 5| = 21$

4) தீர்வுக் கணம் காண்க. $|7| + |a| = |14|$

விடைகள் :

1) மெய் 2) மெய்யல்ல 3) மெய்யல்ல 4) மெய்யல்ல

5) மெய்யல்ல 6) மெய் 7) மெய் 8) மெய் 9) மெய்யல்ல

10) மெய்

II) i) 8 ii) -3 iii) -10 iv) -8 v) -2

III) 1) $|a|$

2) a குறையெண்

3) 8 அல்லது -13

4) 7 அல்லது -7

கூட்டுத் தொடர் முறை

தொழிற்சாலையில் புதிதாக வேலைக்கு அமரும் ஒரு தொழிலாளியின் சம்பள விகிதம் 400 — 35 — 540 — 40 — 700 என்று வைத்துக் கொள்வோம். அவரது ஆரம்பச்சம்பளம் ரூ 400 ஆகும். ஒவ்வொரு ஆண்டு ஆரம்பத்திலும் அவரது சம்பளம் ரூ. 35 வீதம் கூடுகிறது. (ஒரு குறிப்பிட்ட காலம் வரை). பிறகு அவரது சம்பளம் ஆண்டுக்கு ரூ. 40 வீதம் அதிகரிக்கின்றது. அவரது சம்பளத்தை 400, 435, 470, 505, 540, 580, 620, 660, 700 என்று கூறலாம்).

கூட்டுத் தொடர் வரிசை

ஒரு தொடர் வரிசையை எடுத்துக் கொள்வோம் 2,7,12,17,22,— இது ஒரு முடிவில்லாத தொடர் வரிசை.

இதில் முதல் உறுப்பு 2

இரண்டாம் உறுப்பு 7

மூன்றாம் உறுப்பு 12

என்று கூறலாம்.

(இனி முதல் உறுப்பை t_1 எனவும், இரண்டாம் உறுப்பை t_2 எனவும் மூன்றாம் உறுப்பை t_3 எனவும் குறிப்பிடலாம்.

மேலே கூறப்பட்ட தொடர் வரிசையில்

$t_2 - t_1 = 5$

$t_3 - t_2 = 5$

$t_4 - t_3 = 5$

இரண்டு அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களின் வித்தியாசம் சமமாகவே அமைகின்றது. இந்த வித்தியாசம் பொது வித்தியாசம் (common difference) எனப்படும். இதை "d" என்று எழுதுவது வழக்கம்.

பொது வித்தியாசம் மிகை எண்ணாகவோ, குறை எண்ணாகவோ, அமையலாம். பொது வித்தியாசம் மிகை எண்ணாக அமைந்தால் தொடர் வரிசை ஏறு வரிசையில் அமையும்; குறை எண்ணாக அமைந்தால் தொடர் வரிசை இறங்கு வரிசையில் அமையும். இம்மாதிரி அமையும் தொடர் வரிசைகளுக்குக் கூட்டுத் தொடர் வரிசை என்று பெயர்.

கூட்டுத் தொடர் வரிசை :

கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் ஒரு உறுப்பு முந்தைய உறுப்புடன் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கூட்டுவதால் கிடைக்கும். அந்தக் குறிப்பிட்ட எண் பொது வித்தியாசம் எனப்படும்.

சுருக்கமாகக் கூறினால் ஒரு தொடர் வரிசையில் அடுத்தடுத்த இரண்டு உறுப்புக்களின் வித்தியாசம் சமமாக அமையுமாயின் அது கூட்டுத்தொடர் வரிசை எனப்படும். (Arithmetic Progression) இதை AP என்று குறிப்பிடுகின்றோம்.

ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையைப் பொதுவாகக் குறிப்பிட வேண்டுமென்றால்,

முதல் உறுப்பு "a" என்க.

பொது வித்தியாசம் "d" என்க.

$t_1 = a$

$t_2 = a + d$

$t_3 = a+d+d = a+2d$

$t_4 = a+2d+d = a+3d$

ஆகவே கூட்டுத்தொடர் வரிசை

$a+a+d, a+2d, a+3d, \ldots \ldots\ldots$

சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

1) ஒற்றை இயல் எண்கள்

2) இரட்டை இயல் எண்கள்

கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் "n" ஆவது உறுப்புக் காணும் முறை:

கூட்டுத்தொடர் முறையின் முதல் உறுப்பும், பொது வித்தியாசமும் தெரிந்தால் எந்த உறுப்பையும் சுலபமாகக் கணக்கிட்டு விடலாம்.

$t_1 = a$

$t_2 = a + d = a + (2 - 1)\,d$

$t_3 = a + 2d = a + (3 - 1)\,d$

$t_4 = a + 3d = a + (4 - 1)\,d$

இம்முறையில் எழுதிக் கொண்டே போனால் பொது உறுப்பானது

$t_n = a + (n - 1)\,d$ என்று எழுதலாம். ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பைக் காண இம்முறை பெரிதும் பயன்படுகின்றது.

உ. கா. 1

கொடுக்கப்பட்டுள்ள A.P யில்

t_5, t_{10}, t_{19} காண்க.

4, 7, 10, 13, ...

இந்தக் கூட்டுத்தொடர் வரிசையில்

$t_1 = a = 4$

$d = 7 - 4 = 3$

பொதுவில் $t_n = a + (n - 1)\,d$ என்று தெரியும்.

ஆகவே (i) $t_5 = a + 4d$

$= 4 + 4\,(3)$

$= 4 + 12$

$= 16$

ii) $t_{10} = a + 9d$

$= 4 + 9(3)$

$= 4 + 27$

$= 31$

iii) $t_{12} = a + 11d$

$= 4 + 11(3)$

$= 4 + 33$

$= 37$

எ. கா. 2 :

ஒரு A.Pயில் உள்ள மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் கூடுதல் 33 ; அவைகளின் பெருக்கற் பலன் 1287 என்றால் அவ்வெண்களைக் காண்க.

[இம்மாதிரிக் கணக்குகளில் மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகளைக் $(a-d)$; a, $(a+d)$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், கணக்கை எளிதாகச் செய்ய முடியும்]

அடுத்தடுத்த மூன்று எண்கள்

$a-d$, a, $a+d$ என்போம்.

கூடுதல் $= 33$

$a-d+a+a+d = 33$

$3a = 33$

$$a = \frac{33}{3} = 11$$

பெருக்கற்பலன் $= 1287$

$(a-d) \times a \times (a+d) = 1287$

$a = 11$ என்று பிரதியிட,

$$(11-d)\times 11\times(11+d) = 1287$$

$$(11-d)\times(11+d) = \frac{1287}{11}$$

$$121-d^2 = 117$$

$$d^2 = 4$$

$$d = \pm 2$$

$d = 2$ எனில்

i) எண்கள் 9, 11, 13

$d = -2$ எனில்

ii) எண்கள் 13, 11, 9

உ. கா. 3:

ஒரு A.P.யில் $t_n = 3n+5$ என்றால் முதல் உறுப்பையும், பொது வித்தியாசத்தையும் காண்க.

$$t_n = 3n+5$$

ஆகவே $t_1 = 3(1)+5$

$$= 3+5 = 8$$

$$t_2 = 3(2)+5$$

$$= 6+5 = 11$$

$$t_3 = 3(3)+5$$

$$= 9+5 = 14$$

ஆகவே தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 8

பொது வித்தியாசம் $11 - 8 = 3$

எ. கா. 4

ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 15ஆவது உறுப்பு 66; 21 ஆவது உறுப்பு 90 எனில் முதல் உறுப்பு, பொது வித்தியாசம் காண்க.

A. P யை

$a, a+d, a+2d, \ldots\ldots$ என்க.

$t_{15} = 66$

$a + 14d = 66 \quad \ldots\ldots (1)$

$t_{21} = 90$

$a + 20d = 90 \quad \ldots\ldots (2)$

$a + 20d = 90 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$a + 14d = 66 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

கழிக்க $6d = 24$

$$d = \frac{24}{6} = 4$$

$d = 4$ என்று சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட

$a + 14(4) = 66$

$a + 56 = 66$

$a = 66 - 36 = 10$

முதல் உறுப்பு 10, பொது வித்தியாசம் 4

ஃ வரிசை 10, 14, 18 ....

—×××—

உ. கா 5.

ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் 20 ஆவது உறுப்பு 63; 30 ஆவது உறுப்பு 33 என்றால் முதல் உறுப்பு, பொது வித்தியாசம் காண்.

A.P யை

$a, a + d, a + 2d, \ldots\ldots$ என்க.

$t_{20} = 63$

$a + 19d = 63 \ldots\ldots (1)$

$t_{30} = 33$

$a + 29d = 33 \ldots\ldots (2)$

$a + 29d = 33 \ldots\ldots (2)$

$a + 19 = 63 \ldots\ldots (1)$

கழிக்க $10d = -30$

$$d = \frac{-30}{10} = -3$$

$d = -3$ என்று சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட

$a + 19(-3) = 63$

$a - 57 = 63$

$a = 63 + 57 = 120$

முதல் உறுப்பு 120; பொது வித்தியாசம் — 3

வரிசை

120, 117, 114, 111, ...

எ.கா. 6

ஒரு A.P.யில் உள்ள அடுத்தடுத்த 3 எண்களின் கூடுதல் 24. அவ்வெண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 210. அவ்வெண்களைக் காண்க.

A.P.யில் உள்ள அடுத்தடுத்த எண்கள்

$a - d,\ a,\ a + d$ என்க.

கூடுதல் $= 24$

$a - d + a + a + d = 24$

$3a = 24$

$$a = \frac{24}{3} = 8$$

∴ ஆகவே எண்கள்

$8 - d;\ 8,\ 8 + d$ என ஆகும்.

வர்க்கங்களின் கூடுதல் $= 210$

$(8-d^2) + (8)^2 + (8 + d) = 210$

$64 + d^2 - 16d + 64 + 64 + d^2 + 16d = 210$

$2d^2 + 192 = 210$

$$2d^2 = 210 - 192 = 18$$

$$d^2 = \frac{18}{2} = 9$$

$$d = \pm 3$$

i) $d = 3$ எனில்,

எண்கள் 5, 8, 11

ii) $d = -3$ எனில்,

எண்கள் 11, 8, 5

———— × ————

எ. கா. 7

9. ஒரு A P யில் $t_4 : t_6 = 7 : 9$ எனில் $t_{10} : t_{15}$ காண்க.

A. P ஐ

$a, a + d, a + 2d, a + d, \ldots$ என்போம்

$$t_4 : t_6 = 7 : 9$$

$$(a + 3d) : (a + 5d) = 7 : 9$$

$$9(a + 3d) = 7(a + 5d)$$

$$9a + 27d = 7a + 35d$$

$$2a = 8d$$

$$a = 4d \text{ ——— } (1)$$

$$t_{10} : t_{15} = (a + 9d) : (a + 14d)$$

$$= (4d + d) : (4d + 14d)$$

$$= 13d : 18d$$

$$\therefore t_{10} : t_{15} = 13 : 18$$

———— × ————

பகுதி 2

ஒரு AP யின் "n" உறுப்புகளின் கூடுதல் :

ஒரு A.P யின் முதல் உறுப்பு "a" என்றும் பொது வித்தியாசம் "d" எனவும் குறிக்கப்படுகின்றன. A.P யின் முதல் "n" உறுப்புகளின் கூடுதலை S_n என இனிமேல் குறிப்போம். இம்முறையைப் பின்பற்றி ஒரு A.P யின் முதல் 10 உறுப்புகளின் கூடுதலை S_{10} எனவும், முதல் 25 உறுப்புகளின் கூடுதலை S_{25} எனவும் குறிக்க வேண்டும்.

A.P யை

a, a+d, a + 2d, ... எனக் குறிப்போம்

ஆகவே $t_n = a + (n-1)d$

$\therefore S_n = a + (a + d) + \ldots\ldots + a + (n-1)d$ .... (1)

இதையே திருப்பி

$S_n = a + (n-1)d + \ldots\ldots + (a + d) + a$ .... (2) என்று எழுதலாம்.

(1), (2) இவற்றைக் கூட்ட

$2S_n = [2a + (n-1)d] + 2a + (n - 1 d) + \ldots\ldots$ n தடவைகள்

$\therefore 2S_n = n[2a + (n-1)d]$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d$$

இச்சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி ஒரு A.P. யின் உறுப்புகளின் கூடுதலை எளிதில் கணக்கிடலாம்.

இதே சூத்திரத்தை வேறொரு முறையிலும் எழுதலாம்.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}\,[a+a+(n-1)\,d]$$

$$= \frac{n}{2}\,[t_1+t_n]$$

$$= \frac{n}{2}\,[\text{முதல் உறுப்பு} + \text{கடைசி உறுப்பு}]$$

[இந்த இரண்டு சூத்திரங்களையும் இடத்திற்குத் தக்க மாற்றிப் பயன்படுத்த வேண்டும்].

எ. கா. 1. கூடுதல் காண்க.

4+7+10+ .... 30 உறுப்புகள்

இங்கு $a = 4$

$d = 3$

$n = 30$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)\,d]$$

$$S_{30} = \frac{30}{2}\,[2\times4+(30-1)\,3]$$

$$= 15\,[8+87]$$

$$= 15 \times 95$$

$$S_{30} = 1425$$

எ. கா. 2

$2 + 7 + 12 + \ldots\ldots$ என்ற A. P.யில் எத்தனை உறுப்புக்களைக் கூட்டினால் கூடுதல் 1850 கிடைக்கும்?

உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை "n" என்க

$a = 6$

$d = 5$

$S_n = 1550$

$$S_n = 2\,\frac{n}{2}\,[2a+(n-1)\,d]$$

$$1550 = \frac{n}{2}\left[2 \times 2+(n-1)\;5\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[4+5n-5\right]$$

$$= \frac{n}{2}(5n-1)$$

$\therefore\;\; 3100 = 5n^2 - n$

அதாவது $5n^2 - n - 3100 = 0$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(5)(-3001)}}{10}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+62000}}{10}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{62001}}{10}$$

$$= \frac{1 \pm 249}{10}$$

$$= \frac{250}{10} \; ; \; \frac{-248}{10}$$

$\therefore n = 25; \; -24.8$

n என்பது குறை எண்ணாகவோ, பின்னமாகவோ இருக்க முடியாது

ஆகவே $n = 25$

கூட்டுத்தொடரின் 25 உறுப்புகளை எடுத்துக் கூட்டினால் கூடுதல் 1550 கிடைக்கும்.

எ.கா. 3 :

ஒரு A. P.யின் 15 வது உறுப்பு 32 முதல் 15 உறுப்புகளின் கூடுதல் 270, முதல் உறுப்பு, பொது வித்தியாசம் காண்க.

A. P. $a, a + d, a + 2d, \ldots$ என்க முதல் உறுப்பு a; பொது வித்தியாசம் d.

$$t_{15} = 32$$

$$a + 14d = 32 \ldots (1)$$

$$S_{15} = 270$$

$\frac{15}{2}$ [முதல் உறுப்பு + 15 வது உறுப்பு] = 270

$$\frac{15}{2} [a + 32] = 270$$

$$\therefore a + 32 = \frac{270 \times 2}{15}$$

$$a + 32 = 36$$

$$a = 36 - 32 = 4$$

$a = 4$ என்று (1)ல் பிரதியிட

$$a + 14d = 32$$

$$a + 14d = 32$$

$$14d = 28$$

$$d = 2$$

∴ முதல் உறுப்பு 4

பொது வித்தியாசம் 2

எ.கா. 4

300க்கும் 500க்கும் இடையில் உள்ள 8ஆல் வகுபடும் எல்லா முழு எண்களின் கூட்டுத்தொகையும் காண்க.

300ஐ விடப்பெரிய 8 ஆல் வகுபடும் முதல் முழு எண் 304

500ஐ விடச்சிறிய 8 ஆல் வகுபடும் கடைசி முழு எண் 496

ஆகவே

$$304 + 312 + 320 + \dots + 496$$

காண வேண்டும். அதற்கு முன் இவ்வரிசையில் எத்தனை உறுப்புக்கள் உள்ளன எனக் கணக்கிட வேண்டும்.

கடைசி உறுப்பு t_n என்க.

$$t_n = 496$$

$$a + (n-1) d \; 496$$

$$304 + (n - 1) 8 = 496$$

$\therefore 8(n-1) = 496 - 304$

$= 192$

$\therefore (n-1) = \frac{192}{8} = 24$

$\therefore n = 24 + 1 = 25$

உறுப்புக்களின் கூடுதல்

$S_{25} = \frac{25}{2}$ [முதல் உறுப்பு + கடைசி உறுப்பு]

$= \frac{25}{2} \left[304 + 496 \right]$

$= \frac{25}{2} \times 800 = 10000$

கூட்டிடைகள் (Arithmetic Mean)

i) a, b, c, ஆகிய மூன்று எண்கள் A. P யில் உள்ளன என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

பொது வித்தியாசம் $b - a = c - b$

$\therefore 2b = a + c$

$b = \frac{a + c}{2}$

இங்கு b என்பது a, c ஆகிய எண்களின் கூட்டிடை எனப்படும்.

ii) a, b, c, d ஆகிய நான்கு எண்கள் A-p யில் அமையுமானால் b, c என்பன a, d என்ற இரு எண்களுக்கு இடையே உள்ள இரண்டு கூட்டிடைகளாகும்.

iii) a, x_1 x_2., ...x_n b என்பன A-P யில் அமைந்தால்

x_1, x_2, x_3,...x_n என்பன a, bக்கு இடையே அமைந்த "n" கூட்டு இடைகளாகும்.

பயிற்சி

1) ஒரு A-Pயின் மூன்றாவது உறுப்பு 32, பதினெட்டாவது உறுப்பு 77 என்றால் A. P யைக் காண்க.

2) ஒரு A.Pயின் "n" ஆவது உறுப்பு 2n + 3 என்றால் முதல் உறுப்பையும் பொது வித்தியாசத்தையும் காண்க

3) ஒரு A Pயில் உள்ள மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களின் கூடுதல் காண்க. 18 அவற்றின் பெருக்கற்பலன் 192 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

4) ஒரு A Pயில் உள்ள மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களின் கூடுதல் 21: அவ்வெண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 179, எண்களைக் காண்க.

5) ஒரு தொடரின் முதல் "n" உறுப்புக்களின் கூடுதல் $(7n^2 + 6n)$ என்றால் அது ஒரு கூட்டுத்தொடர் என்று நிரூபிக்கவும், முதல் உறுப்பையும் பொது வித்தியாசத்தையும் காண்க.

விடைகள்

1) 26, 29, 32, ...
2) 5, 2
3) 4, 6, 8 (or) 8, 6, 4
4) 3, 7, 11 (or) 11, 7, 3
5) 13, 14

பகுதி 3

இப்பகுதியில் சில சூத்திரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன (நிரூபணம் இல்லாமல்) அவற்றைப் பயன்படுத்திக் கணக்குகள் செய்யும் திறமையை வளர்த்துக் கொள்ளவேண்டும்.

1) முதல் "n" ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல்

$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots$ (n உறுப்புகள்) $= n^2$

எ. கா. 1

முதல் 15 ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots$ (15 உறுப்புகள்)

கூடுதல் $= (15)^2 = 225$

———XXX———

எ.கா 2

கூடுதல் காண்க

$1 + 3 + 5 + \ldots + 51$

இதன் கடைசி உறுப்பு 51. இதில் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன என்று காண வேண்டும்.

$$n = \left(\frac{\text{கடைசி உறுப்பு} + 1}{2} \right)$$

$$= \frac{51 + 1}{2} = 26 \text{ உறுப்புகள்}$$

$\therefore$ கூடுதல் $= (26)^2$

$= 676$

———XXX———

எ.கா . 3

கூடுதல் காண்க,

$13 + 15 + 17 + \ldots\ldots + 47$

சூத்திரம் பயன்படுத்த வரிசை 1 லிருந்து ஆரம்பித்து இருக்க வேண்டும். ஆகவே வரிசையை அதற்குத் தகுந்தமாதிரி மாற்றி அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$13 + 15 + 17 + \dots + 47 = (1 + 3 + 5 + \dots + 47) - (1 + 3 + 5 + \dots + 11)$$

$$1+3+5+ \dots 47 = \left(\frac{47 + 1}{2}\right)^2$$

$$= (24)^2$$

$$= 76$$

$$+ 3 + 5 + \dots\dots + 11 = \left(\frac{11 + 1}{2}\right)^2$$

$$= (6)^2$$

$$= 36$$

∴ தேவையான கூடுதல் $= 576 - 36$

$$= 540$$

முதல் "n" இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

எ.கா 1

கூடுதல் காண்க

$$1^2 + 2^2 + \dots + 10^2$$

$$= \frac{10 \times (10+1) \times (2 \times 10 + 1)}{6}$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$= 385$$

எ. கா. 2

கூடுதல் காண்க.

$8^2 + 9^2 + \text{———} + 30^2$

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வர்க்கம் 1^2ல் இருந்து ஆரம்பிக்க வேண்டும். ஆகவே எல்லாக் கணக்கைப்போல வரிசையை அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

$$8^2 + 9^2 + \ldots + 30^2 = (1^2 + 2^2 + - + 30^2) - (1^2 + 2^2 + \ldots + 7^2)$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2 = \frac{30 \times 31 \times 61}{6}$$

$$= 9455$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 7^2 = \frac{7 \times 8 \times 15}{6}$$

$$= 140$$

$\therefore$ தேவையான கூடுதல் $= 9455 - 140$

$= 9315$

முதல் "n" இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல்

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \text{———} + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

எ. கா. 1

கூடுதல் காண்க.

$$1^3+2^3+3^3+ \text{——} + 10^3$$

$$= \left[\frac{10 \times 11}{2} \right]^2$$

$$= (55)^2$$

$$= 3025$$

எ. கா. 2

கூடுதல் காண்க.

$$11^3+12^3+ \dots \dots +20^3$$

இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வரிசை 1^3ல் இருந்து ஆரம்பிக்க வேண்டும். ஆகவே அதற்குத் தகுந்தாற்போல் வரிசையை அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$11^3+12^3+ \dots\dots + 20^3 = (1^3+2^3+ \dots\dots +20^3) - (1^3 + 2^3 + \dots\dots + 10^3)$$

$$1^3+2^3+ \dots\dots + 20^3 = \left(\frac{20 \times 21}{2} \right)^2$$

$$= (210)^2$$

$$= 44100$$

$$1^3 + 2^3 + \dots\dots + 10^3 = \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2$$

$$= 7025$$

∴ தேவையான கூடுதல்

$$= 44100-3025$$

$$= 41075$$

பயிற்சி :

கூடுதல் காண்க

1) $1+3+5+ \dots\dots + 73$

2) $47+49+51+ \dots\dots + 307$

3) $1^2+2^2+3^2+ \dots\dots + 30^2$

4) $21^2+22^2+ \dots +35^2$

5) $1^3+2^3+3^3+ \dots\dots + 51^3$

6) $15^3+16^3+ \dots\dots + 70^3$

விடைகள்

1) 1369

2) 23187

3) 9455

4) 12040

5) 1758276

6) 6164200

பாடம்—10

பெருக்குத் தொடர் வரிசை

பகுதி 1

சென்ற பாடத்தில் ஏதேனும் இரண்டு அடுத்துள்ள உறுப்புக்களின் வித்தியாசம் சமமாக உள்ள கூட்டுத் தொடர் வரிசையைப் பற்றிப்படித்தோம்.

இப்போது மற்றொரு தொடர் வரிசையைப் பற்றி இப்பாடத்தில் விரிவாகக் காண்போம்.

4, 12, 36, 108,...... என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம். இத்தொடரில்

$t_1 = 4; \ t_2 = 12; \ t_3 = 36; \ t_4 = 108$

இங்கு $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{12}{4} = 3$

$\dfrac{t_3}{t_2} = \dfrac{36}{12} = 3$

$\dfrac{t_4}{t_3} = \dfrac{108}{36} = 3$

இங்கு ஏதேனும் இரண்டு அடுத்தடுத்த இரண்டு உறுப்புக்களின் விகிதம் சமமாக உள்ளது. இவ்வாறு அமையும் தொடர்வரிசைக்குப் பெருக்குத் தொடர் வரிசை என்று பெயர்.

பெருக்குத்தொடர் வரிசை :

ஒரு தொடரிலுள்ள எந்த இரண்டு அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களின் விகிதமும் மாறாமல் இருக்குமானால் அத்தொடர் பெருக்குத் தொடர் எனப்படும்.

இந்த மாறாத விகிதம் "பொது விகிதம்" எனப்படும். ஒரு பெருக்குத் தொடரின் (Geometric Progression) முதல் உறுப்பை "a" எனவும் பொது விகிதத்தை "r" என்றும் குறிப்பது வழக்கம்.

ஆகவே ஒரு பெருக்குத் தொடரின் பொது வடிவம்

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots$ என்று அமையும்.

இங்கு

$$t_1 = a$$
$$t_2 = ar$$
$$t_3 = ar^2$$
$$t_4 = ar^3$$
$$\vdots$$
$$t_n = ar^{n-1}$$

ஆகவே ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பைக் காண

$t_n = ar^{n-1}$ என்ற சூத்திரத்தை பயன்படுத்த வேண்டும்.

உ-ம். 1

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$ என்ற G.P.யின் 10வது உறுப்பைக் காண்க.

$$a = 1$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$t_n = ar^{n-1}$$
$$t_{10} = a \times (r)^9$$
$$= 1 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^9$$
$$= \frac{1}{512}$$

எ.கா. 2

ஒரு G.P.யின் 8 ஆவது உறுப்பு 2; 13 ஆவது உறுப்பு $\frac{243}{16}$ எனில் 9ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

G.P. a, ar, ar^2 .... என்க.

$$t_8 = 2$$

$$ar^7 = 2 \quad \text{.................. (1)}$$

$$t_{13} = \frac{243}{16}$$

$$ar^{12} = \frac{243}{16} \quad \text{.................(2)}$$

$$\frac{ar^{12}}{ar^7} = \frac{\frac{243}{16}}{2}$$

$$r^5 = \frac{243}{16 \times 2} = \frac{243}{32}$$

$$r^5 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^5$$

$$r = \tfrac{3}{2}$$

$r = \frac{3}{2}$ என்று (1)ல் பிரதியிட

$$a\left(\tfrac{3}{2}\right)^7 = 2$$

$$a \times \frac{2187}{128} = 2$$

$$a = \frac{2 \times 128}{2187}$$

$$= \frac{256}{2187}$$

$$t_9 = ar^8$$

$$= \frac{256}{2187} \times \left(\frac{3}{2}\right)^8$$

$$= \frac{256}{2187} \times \frac{6561}{256}$$

9 ஆவது உறுப்பு = 3

மறுவழி

8 ஆவது உறுப்பு = 2

9 ஆவது உறுப்பு காண 8 ஆவது உறுப்பை பொது விகிதத்தால் பெருக்க வேண்டும்.

∴ 9 வது உறுப்பு $= 2 \times \frac{3}{2}$

$= 3$

எ.கா.3

G.P.யில் உள்ள மூன்று தொடர்ந்த உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 64 அவ்வுறுப்புகளின் கூடுதல் $36\frac{1}{2}$ என்றால் உறுப்புக்களைக் காண்க.

[இம் மாதிரி 3 எண்களின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் G.P. யில் உள்ள உறுப்புக்களை $\frac{a}{r}$, a, ar, என்று எடுத்துக் கொண்டால் கணக்கை எளிதாகச் செய்யலாம்]

தொடர்ந்த உறுப்புக்கள் $\frac{a}{r}$, a, ar என்க

பெருக்கற்பலன் = 64

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 64$$

$$a^3 = 46$$

$$\therefore a = 4 \text{ ——— ——— } (1)$$

$a = 4$ எனப்பிரதியிட உறுப்புகள்

$\frac{4}{r}$, 4, 4r என்று ஆகும்.

கூட்டல் $= 36\frac{1}{2}$

$$\frac{4}{r} + 4 + 4r = \frac{73}{2}$$

$$\therefore \frac{4}{r} + 4r = \frac{73}{2} - 4$$

$$\frac{4 + 4r^2}{r} = \frac{73-8}{2}$$

$$\frac{4 + 4r^2}{r} = \frac{73}{2}$$

$$8 + 8r^2 = 65r$$

அல்லது $8r^2 - 65r + 8 = 0$

$$8r^2 - 64r - r + 8 = 0$$

$$8r(r - 8) - 1(r - 8) = 0$$

$$(r - 8)(8r - 1) = 0$$

$r - 8 = 0$ அல்லது $8r - 1 = 0$

$r = 8$ அல்லது $\frac{1}{8}$

i) $r = 8$ எனின்

உறுப்புக்கள் $\frac{1}{2}, 4, 32$

ii) $r = \frac{1}{8}$ எனின்,

உறுப்புக்கள் $32, 4, \frac{1}{2}$

எ. கா. 4

ஒரு G. P. யின் தொடர்ச்சியான 3 உறுப்புக்களின் கூடுதல் 19 அவ்வுறுப்புக்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 133 என்றால் அவ்வுறுப்புக்களைக் காண்க.

தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புக்கள்

a, ar, ar^2 என்க.

கூடுதல் $= 19$

$$a + ar + ar^2 = 19$$

$$a(1 + r + r^2) = 19 \text{ —— } (1)$$

வர்க்கங்களின் கூடுதல் 133.

$$(a)^2 + (ar)^2 + (ar^2)^2 = 133$$

$$a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 133$$

$$a^2(1 + r^2 + r^4) = 133$$

$$a^2(1 + r + r^2)(1 - r + r^2) = 133 \text{ —— } (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{a^2(1 + r + r^2)(1 - r + r^2)}{a(1 + r + r^2)} = \frac{133}{19}$$

ஆகவே $a(1 - r + r^2) = \dfrac{133}{19} = 7$ —— (3)

$$\frac{(3)}{(1)} = \frac{a(1 - r + r^2)}{a(1 + r + r^2)} = \frac{7}{19}$$

$$\frac{1 - r + r^2}{1 + r + r^2} = \frac{7}{19}$$

$$19(1 - r + r^2) = 7(1 + r + r^2)$$

$$19 - 19r + 19r^2 = 7 + 7r + 7r^2$$

$$12r^2 - 26r + 12 = 0$$

2, ஆல் வகுக்க

$$6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$6r^2 - 9r - 4r + 6 = 0$$

$$3r(2r - 3) - 2(2r - 3) = 0$$

$$(2r - 3)(3r - 2) = 0$$

$2r - 3 = 0$ அல்லது $3r - 2 = 0$

∴ $r = \frac{3}{2}$ அல்லது $\frac{2}{3}$

$r = \frac{3}{2}$ என (1)ல் பிரதியிட

$$a(1 + r + r^2) = 19$$

$$a\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = 19$$

$$a\left(\frac{4 + 6 + 9}{4}\right) = 19$$

$$a \times \frac{19}{4} = 19$$

$$a = \frac{19 \times 4}{19} = 4$$

i) $r = \frac{3}{2}$

உறுப்புக்கள் 4, 6, 9

ii) $r = \frac{2}{3}$

உறுப்புக்கள் 9, 6, 4

எ. கா. 5

ஒரு பெருக்குத் தொடரின் இரண்டாவது, மூன்றாவது உறுப்புக்களின் கூடுதல் 24. ஐந்தாவது, ஆறாவது உறுப்புக்களின் கூடுதல் 192. அத்தொடரின் முதல் உறுப்பையும், பொது விகிதத்தையும் காண்க.

பெருக்குத் தொடர் $a, ar, ar^2, \ldots\ldots$ என்க.

2ஆவது உறுப்பு + 3 ஆவது உறுப்பு = 24

$$ar + ar^2 = 24$$

$$ar(1 + r) = 24 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

5 ஆவது உறுப்பு + 6 ஆவது உறுப்பு = 192

$$ar^4 + ar^5 = 192$$

$$ar^4(1 + r) = 192 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{ar^4(1 + r)}{ar(1 + r)} = \frac{192}{24}$$

ஆகவே $r^3 = 8 = (2)^3$

$$r = 2$$

$r = 2$ ஐ (1)ல் பிரதியிட

$$ar(1 + r) = 24$$

$$a \times 2 \times 3 = 24$$

$$a = \frac{24}{6} = 4$$

முதல் உறுப்பு 4 : பொது விகிதம். 8

எ. கா. 6

ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புக்களின் கூடுதலும், அடுத்த மூன்று உறுப்புக்களின் கூடுதலும் 8 : 27 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. பொது விகிதத்தைக் காண்க.

G. P. யை $a, ar, ar^2 \ldots\ldots$ என்க.

$(t_1 + t_2 + t_3) : (t_4 + t_5 + t_6) = 8 : 27$

$(a + ar + ar^2) : (ar^3 + ar^4 + ar^5) = 8 : 27$

$a(1 + r + r^2) : ar^3(1 + r + r^2) = 8 : 27$

$$\text{ஆகவே } \frac{ar^3(1 + r + r^2)}{a(1 + r + r^2)} = \frac{27}{8}$$

$$r^3 = \frac{27}{8} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^3$$

$\therefore r = \frac{3}{2}$

பொது விகிதம் $\frac{3}{2}$

பகுதி 2

ஒரு G.P யின் "n" உறுப்புக்களின் கூடுதல்

G. P $a, ar, ar^2 \ldots\ldots$ என்க.

முதல் "n" உறுப்புக்கள்

$a, ar, ar^2, \ldots\ldots ar^{n-1}$

இவற்றின் கூடுதலை S_n என்க

$\therefore S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \ldots (1)$

$(1) \times r = r S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$ —— (2)

$(2) - (1) = r S_n - S_n = ar^n - a$

$S_n (r - 1) = a (r^n - 1)$

$$\therefore S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)} \ldots (3)$$

இந்த சூத்திரம் $|r| > 1$ என்ற நிலையில் பயன்படும். $|r| < 1$ என்று இருக்கும்போது

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$ என்று பயன்படுத்தப்பட வேண்டும்.

— × × × —

முடிவிலி (∞) வரை செல்லும் பெருக்குத்தொடரின் கூடுதல் காணுதல்

இங்கு பொது விகிதம் "r"ன் தனிமதிப்பு 1ஐ விடக்குறைவாக இருக்கவேண்டும். $|r| < 1$

$|r| < 1$ என்பதால் பெருக்குத் தொடரின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவிலியை எட்டும்போது r^nன் மதிப்பு 0யை அணுகும்.

அதாவது $\lim_{n \to \infty} r^n = 0 \ldots (1)$

$|r| < 1$ என்பதால்

முதல் n உறுப்புக்களின் கூடுதல்

$$S = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \quad \text{இங்கு } r^n = 0$$

$$\text{ஆகவே } S_{\infty} = \frac{a}{(1-r)}$$

— × × × —

எ. கா. 1

1 + 3 + 9 + 27 + ... என்ற தொடரின் முதல் 10 உறுப்புக்களின் கூடுதல் காண்க.

$$\text{இங்கு } a = 1$$
$$r = 3$$
$$n = 10$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$$

$$= \frac{1(3^{10}-1)}{(3-1)}$$

$$= \frac{59049-1}{2}$$

$$= \frac{59048}{2} = 29524$$

— × × × —

எ. கா. 2

ஒரு G.P. யின் முதல் இரண்டு உறுப்புக்களின் கூடுதல் 2. முதல் நான்கு உறுப்புக்களின் கூடுதல் 20. உறுப்புக்களைக் காண்க.

உறுப்புகள் $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3$ என்க,

$$t_1 + t_2 = 2$$

$$a + ar = 2$$

$$a(1 + r) = 2 \ldots\ldots (1)$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 20$$

$$2 + ar^2 + ar^3 = 20$$

$$2 + ar^2(1 + r) = 20$$

$$ar^2(1 + r) = 20 - 2 = 18 \ldots (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{ar^2(1 + r)}{a(1 + r)} = \frac{18}{2}$$

$$r^2 = 9$$

$$r = \pm 3$$

i) $r = 3$ எனப்பிரதியிட

$$a(1 + r) = 2$$

$$a(4) = 2$$

$$a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

உறுப்புகள் $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, \frac{27}{2}$

ii) $r = -3$ எனப்பிரதியிட

$$a(1 + r) = 2$$

$$a(-2) = 2$$

$$a = \frac{2}{-2} = -1$$

உறுப்புகள் $-1, 3, -9, 27$

உ.ம் 3 :-

கீழ்க்கண்ட முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் பலன் காண்க.

$50 - 40 + 32 \ldots\ldots$

$a = 50$

$$r = -\frac{40}{50} = -\frac{4}{5} \qquad |r| < 1$$

முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல்

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{50}{1-(-\frac{4}{5})}$$

$$= \frac{50}{\frac{9}{5}}$$

$$= \frac{50 \times 5}{9} = \frac{250}{9}$$

உ.ம் 4:-

ஒரு முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் கூடுதல் 21 அவ்வுறுப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 189, வரிசையைக் காண்க.

முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடர்

$a, ar, ar^2, \ldots\ldots$ to ∞ என்க.

$S_\infty = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots \infty$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \qquad \text{......(1)}$$

வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 + \text{......} \infty$$

இதன் முதல் உறுப்பு a^2

விகிதம் r^2

$$\therefore \text{ கூடுதல் } = \frac{a^2}{(1-r^2)}$$

கணக்கின்படி.

$$\frac{a}{1-r} = 21 \text{ மேலும்}$$

$$\frac{a^2}{1-r^2} = 189$$

$$\frac{\dfrac{a^2}{1-r^2}}{\dfrac{a}{1-r}} = \frac{189}{21}$$

$$\frac{a^2}{(1+r)(1-r)} \times \frac{(1-r)}{a} = \frac{189}{21}$$

$$\frac{a}{1+r} = 9 \text{ ....(2)}$$

$$\frac{a}{1-r} = 21 \text{ ....(1)}$$

$$\frac{(3)}{(1)} = \frac{\frac{a}{1+r}}{\frac{a}{1-r}} = \frac{9}{21}$$

$$\frac{a}{1+r} \times \frac{1-r}{a} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{3}{7}$$

$$7 - 7r = 3 + 3r$$

$$4 = 10r$$

$$r = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$r = \frac{2}{5}$ என (1)ல் பிரதியிட

$$\frac{a}{1-\frac{2}{5}} = 21$$

$$\frac{a}{\frac{3}{5}} = 21$$

$$\frac{a \times 5}{3} = 21$$

$$a = \frac{63}{5}$$

ஆகவே தொடர் வரிசை

$$\frac{63}{5} \; ; \quad \frac{123}{23} \; ; \ldots\ldots\ldots$$

உ. கா 3

ஒரு G. P யின் முதல் 4 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையும்; முதல் 8 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையும் 81 : 97 என்ற விகிதத்தில் இருக்குமானால் பொதுவிகிதத்தைக் காண்க.

G. P யை $a, ar, ar^2, \ldots\ldots\ldots$ என்க.

$$S_4 : S_8 = 81 : 97$$

$$\frac{a(r^4-1)}{} : \frac{a(r^8-1)}{(r-1)} = 81 : 97$$

$$\therefore (r^4-1) : (r^8-1) = 81 : 97$$

$$\frac{r^8-1}{r^4-1} = \frac{97}{81}$$

$$\frac{(r^4+1)(r^4-)}{(r^4-1)} = \frac{97}{81}$$

$$r^4+1 = \frac{97}{81}$$

$$\therefore r^4 = \frac{97}{81} - 1$$

$$= \frac{97-81}{81} = \frac{16}{81}$$

$$r^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$r = \pm \tfrac{2}{3}$$

ஆகவே பொது விகிதம் $\pm \tfrac{2}{3}$

எ.கா. 6

பின்வரும் தொடரின் கூடுதல் காண்க.

$5 + 55 + 555 + \ldots\ldots$ n உறுப்புகள்

$S_n = 5 + 55 + 555 + \ldots\ldots$ n உறுப்புகள்

$= 5\,[1 + 11 + 111 + \ldots\ldots$ n உறுப்புகள்$]$

$= \tfrac{5}{9}\,[9 + 99 + 999 + \ldots\ldots$ n உறுப்புகள்$]$

$= \tfrac{5}{9}\,[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots\ldots$ n உறுப்புகள்$]$

$= \tfrac{5}{9}\,[(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots$ n உறுப்புகள்$) - (1 + 1 + 1 + \ldots$ n உறுப்புகள்$)]$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10\,(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10\,(10^n - 1)}{9} - n\right]$$

பயிற்சி

1) ஒரு G.P யின் தொடர்ந்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 19 பெருக்கற்பலன் 216 என்றால் எண்களைக் காண்க.

2) ஒரு G.P யின் தொடர்ந்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 7 அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 21 எனில் எண்களைக் காண்க.

3) ஒரு பெருக்குத் தொடரின் நான்காவது உறுப்பு $\frac{1}{2}$ ஒன்பதாவது உறுப்பு $\frac{16}{243}$ என்றால் அத்தொடரின் 3 ஆவது, 6 ஆவது உறுப்புக்களை காண்க.

4) ஒரு பெருக்குத் தொடரின் இரண்டாவது, மூன்றாவது உறுப்புக்களின் கூடுதல் 24 நான்காவது, ஐந்தாவது உறுப்புக்களின் கூடுதல் 216 என்றால் அத்தொடரின் முதல் உறுப்பையும் பொது விகிதத்தையும் காண்க.

5) கூடுதல் காண்க

$4 + 44 + 444 + \ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

6) $x = 1 + a + a^2 + \ldots\ldots \infty \quad |a| < 1$

$y = 1 + b + b^2 + \ldots\ldots \infty \quad |b| < 1$

என்றால் $1 + ab + a^2b^2 + \ldots\ldots \infty$

விடைகள் $= \frac{xy}{x + y - 1}$ எனக்காட்டுக.

1) 4, 6, 9 அல்லது 9, 6, 4

2) 1, 2, 4 அல்லது 4, 2, 1

3) $\frac{3}{4}, \frac{2}{9}$

4) 4, -3

5) $\frac{4}{9}\left[\frac{10^n(10-1)}{9} - n\right]$

கூட்டு வட்டி (Compound Interest)

ஆறுமுகத்திடம், ஆனந்தன் வருட வட்டி 5% வீதம் ரூ. 1000 கடன் வாங்குகிறான் என்று சொல்வோம். முதல் வருடக் கடைசியில் ஆனந்தன் கொடுக்க வேண்டிய வட்டி ரூ 50 அல்லவா? இதனை ஆறுமுகம் பெற்று வட்டிக்கு விடலாம். ஆதலால் முதல் வருட கடைசியில் ஆனந்தன் ரூ. 50 கொடுக்காவிட்டால், ஆனந்தனிடமிருந்து இந்த ரூ. 50க்கும் சேர்த்து இரண்டாம் வருடத்திற்கு வட்டி கேட்கலாம். அதாவது ஆனந்தன் முதல் வருடத்திற்கு ரூ. 1000க்கு வட்டியும் இரண்டாம் வருடத்திற்கு (ரூ. 1000 + ரூ. 50) க்கு வட்டியும் கணக்கிட்டு அதோடு சேர்த்து கடன் தீர்க்க வேண்டும். இவ்விதம் கணக்கிட்டுக் கிடைக்கும் வட்டிக்குக் கூட்டு வட்டி என்று பெயர்.

வட்டிக் கணக்கீட்டு முறையைப் பின்வருமாறு அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

முதல் வருட அசல்	ரூ.	1000
,, வட்டி 5%	ரூ.	50
முதல் வருட மொத்தத் தொகை அல்லது 2ம் வருட அசல்	ரூ.	1050
வட்டி 5%	ரூ.	52.50
இரண்டு வருட மொத்தத் தொகை	ரூ.	1102,50
அசல்	ரூ.	1000,00
∴ கூட்டுவட்டி	ரூ.	102,50

குறிப்பு :- i) இரண்டாம் வருட வட்டி முதல் வருட வட்டியைவிட எவ்வளவு அதிகம் என்பதை கவனிக்கவும்.

ii) இரண்டு வருட மொத்தத் தொகையிலிருந்து அசலைக் கழித்து இரண்டு வருடக் கூட்டுவட்டி கிடைத்திருப்பதையும் கவனிக்கவும்.

மாதிரி 1: ரூ. 5120க்கு $6\frac{1}{4}\%$ வீதம் 3 வருடக் கூட்டுவட்டி காண்க.

முதல் வருட அசல்	ரூ. 5120
வட்டி $6\frac{1}{4}\%$ $\left(\frac{1}{16}\text{ பாகம்}\right)$	ரூ. 320
இரண்டாவது அசல்	ரூ. 5440
வட்டி $6\frac{1}{4}\%$ $\left(\frac{1}{16}\text{ பாகம்}\right)$	ரூ. 340
மூன்றாம் வருட அசல்	ரூ. 5780
வட்டி $6\frac{1}{4}\%$ $\left(\frac{1}{16}\text{ பாகம்}\right)$	ரூ. 381.25
மொத்தத் தொகை	ரூ. 6144.25
அசல்	ரூ. 5120.00
∴ கூட்டுவட்டி	ரூ. 1021.25

குறிப்பு: வட்டிவீதம் $6\frac{1}{4}\%$, $12\frac{1}{2}\%$, $6\frac{2}{3}\%$, 10%, $8\frac{1}{3}\%$, என்று வந்தால் அதனை முறையே $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$ பின்னங்களாக மாற்றி மேலே செய்தல் போல் செய்க.

மாதிரி 2:- ரூ. 1225க்கு 4% வீதம் 2 வருடக் கூட்டுத்தொகை காண்க

முதல் வருட அசல்	ரூ 2125
வட்டி 4% (.04 பாகம்)	ரூ 85.00
இரண்டாம் வருட அசல்	ரூ 2210.00
வட்டி 4% (.04 பாகம்)	ரூ 88.40
மொத்தம்	2298.40
கூட்டுத் தொகை	ரூ 2298.40

மாதிரி 3:- ரூ. 4000க்கு $7\frac{1}{2}\%$ வீதம் 2 வருடக் கூட்டுவட்டி என்ன?

$7\frac{1}{2}\% = 5\% + 2\frac{1}{2}\%$ எனப் பிரித்துக்கொண்டு கடைக் கணக்கு முறையில் வட்டி கணக்கிடலாம்.

முதல் வருட அசல் ரூ. 4000

$\left.\begin{array}{l}\text{வட்டி} \\ 7\frac{1}{2}\%\ \text{வீதம்}\end{array}\right\}$ 5% ரூ. 200
2½% ரூ. 100

இரண்டாம் வருட அசல் ரூ. 4300

$\left.\begin{array}{l}\text{வட்டி வீதம்} \\ 7\frac{1}{2}\%\end{array}\right\}$ 5% ரூ. 215
2½% ரூ. 107.50

மொத்தம் ரூ. 4622.50

அசல் ரூ. 4000.00

கூட்டுவட்டி ரூ. 622.50

மாதிரி 4:- அசல் ரூ. 2500க்கு ஆண்டுக்கு 8% கூட்டுவட்டி வீதம் 2 வருடம் 6 மாத முடிவில் கிடைக்கும் கூட்டுவட்டி எவ்வளவு?

$$\text{வட்டிவீதம் } 8\% = \frac{8}{100} = 0,08$$

முதல் வருட அசல் = ரூ. 2500

வட்டி (ரூ. 2500 × 0.8) = ரூ. 200

2வது வருட அசல் = ரூ. 2,700

ஃ வட்டி (ரூ. 2700 × 0,8) = ரூ. 216

3வது வருட அசல் ரூ. 2,916

6 மாத வட்டி (ரூ. 2916 × 0.04) = ரூ. 116.64

2 வருடம் 6மாத முடிவில் கூடுதல் = ரூ. 3032.64

ஆரம்ப அசல் = ரூ. 2500.00

ஃ கிடைக்கும் கூட்டு வட்டி = ரூ. 532.64

பயிற்சி :- கீழ்க்காணும் கணக்குகளின் கூட்டு வட்டி காண்க.

	அசல்	வருடவட்டி வீதம்	காலம்
1)	ரூ. 1500	10%	3 வருடம்
2)	ரூ. 8750	4%	2 வருடம் 3 மாதம்
3)	ரூ. 4800	5½%	3 வருடம்
4)	ரூ. 3120	12½%	3 வருடம்
5)	ரூ. 8640	8⅓%	3 வருடம்
6)	ரூ. 8000	7½%	2 வருடம் 4 மாதம்
7)	ரூ. 6750	6⅔%	3 வருடம்

8) அசல் ரூ. 2000 ஆண்டுக்கு 4½ கூட்டுவட்டி வீதம், 3 ஆண்டுகளில் என்ன கூடுதலாகும்?

9) ஆண்டுக்கு 12% கூட்டுவட்டி வீதத்தில் ஒரு வியாபாரி ரூ. 2360 கடன் வாங்குகிறார். 3வது வருட முடிவில் கடனைத் தீர்க்க எவ்வளவு தொகை கட்டவேண்டும்.

விடை : 1) ரூ. 496.50; 2) ரூ 346.50; 3) ரூ. 184.09; 4) ரூ. 2170 5) ரூ. 2343; 6) ரூ. 1476.13 பை; 7) ரூ 1442; 8) ரூ. 2282.33 9) ரூ. 3645

கூட்டுவட்டியைக் காணப் பயன்படும் சூத்திரம் :-

ரூ. p க்கு r% கூட்டு வட்டி வீதம் n ஆண்டுகளில் ஏற்படும் தொகையைக் காண வேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$$\text{அசல்} = \text{ரூ } p$$

$$1 \text{ ஆண்டு வட்டி} = \text{ரூ } \frac{pr}{100}$$

$$\therefore \text{இரண்டாம் ஆண்டு அசல்} = \text{ரூ } p + \frac{pr}{100}$$

$$= \text{ரூ } p \left(1 + \frac{r}{100} \right)$$

அசல் ரூ 1 ஆனால் ஆண்டு முடிவில் கூடுதல் $\left.\right\}$ $= ரூ. \left(1 + \frac{r}{100}\right)$

அசல் ரூ $p\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ ஆனால் ஆண்டு முடிவில் கூடுதல் $\left.\right\}$

$$= ரூ.\ p\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

$$= ரூ.\ p\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$$

∴ இரண்டாம் ஆண்டு முடிவில் கூடுதல் $\left.\right\}$ $= ரூ.\ p\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$

இதே போன்று n ஆண்டுகள் முடிவில் கூடுதல் $= ரூ.\ p\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

∴ கூட்டு வட்டியில் கூடுதலைக் காணப் பயன்படும் சூத்திரம் $\left.\right\}$ $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

∴ கூட்டு வட்டி $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - P.$

சூத்திரத்தில் P அசலையும் r வட்டிவீதத்தையும் n ஆண்டுகளையும் குறிக்கும்.

மாதிரி — 1 :- 3200க்கு 2½ % வீதம் 3 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டி எவ்வளவு?

3 ஆண்டுகளில் கூடுதல் $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$

$$= ரூ.\ 3200 \times \left(1 + \frac{2\frac{1}{2}}{100}\right)^3$$

$$= \text{ரூ. } 3200 \times \left(\frac{102\frac{1}{2}}{100} \right)^3$$

$$= \text{ரூ. } 3200 \times \frac{205}{200} \times \frac{205}{200} \times \frac{205}{200}$$

$$= \text{ரூ. } 3446.03$$

∴ கூட்டுவட்டி $= \text{ரூ. } 3446.03 - \text{ரூ. } 3200$

$$= \text{ரூ. } 246.05$$

கணக்கு 2 : அசல் ரூ. 3365க்கு $6\frac{2}{3}\%$ கூட்டுவட்டி வீதம் 3 வருடக் கூட்டுவட்டியைக் காண்க.

$$\text{தொகை } A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

$$P = \text{ரூ. } 3375 \quad r = 6\tfrac{2}{3} \quad n = 3$$

$$6\tfrac{2}{3}\% = \frac{6\frac{2}{3}}{100} = \frac{20}{100} = \frac{1}{15}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{6\frac{2}{3}}{100}\right) = \left(1 + \frac{1}{15}\right) = \frac{16}{15}$$

3 வருட முடிவில் தொகை $= \text{ரூ. } 3375 \left(1 + \frac{6\frac{2}{3}}{100}\right)^3$

$$= \text{ரூ. } 3375 \left(\frac{16}{15}\right)^3$$

$$= \text{ரூ. } 3375 \times \frac{16}{15} \times \frac{16}{15} \times \frac{16}{15}$$

$$= ரூ.\ 4096$$

3 வருடக் கூட்டு வட்டி = கூடுதல் — ஆரம்ப அசல்

$$= ரூ.\ 4096 - ரூ.\ 3375$$

$$= ரூ.\ 721$$

மாதிரி 3: ரூ. 5000க்கு 6% வீதம் 2 ஆண்டுகள் 3 மாதங்களில் கிடைக்கும் கூட்டுவட்டி என்ன?

2 ஆண்டுகள் 3 மாதங்களில் கூடுதல்

$$= ரூ.\ 5000 \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{107} \times \frac{101\frac{1}{2}}{200}$$

$$= ரூ.\ 5000 \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{100} \times \frac{203}{200}$$

$$= ரூ.\ 5702.27$$

∴ கூட்டு வட்டி = ரூ. 5702. 27 — ரூ 5000

$$= ரூ.\ 702.27$$

பயிற்சி : கூட்டுவட்டி காண்க.

	அசல்	கூட்டுவட்டி வீதம்	காலம்
1)	ரூ. 3, 600	10%	3 வருடம்
2)	ரூ. 4, 320	$8\frac{1}{3}$%	2 வருடம்
3)	ரூ. 3, 200	$2\frac{1}{2}$%	3 வருடம்
4)	ரூ. 90,000	$6\frac{2}{3}$%	3 வருடம்

விடை :- 1. ரூ 1191.60 2. ரூ. 750 3. ரூ 246.05 4. ரூ. 19226. 97

மாதிரி :- எந்த அசல் 4% கூட்டு வட்டி வீதம் 2 ஆண்டுகளில் ரூ. 1352 கூடுதல் ஆகும்.

கூட்டு வட்டிக்கு கூடுதல் $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

A = ரூ. 1352 r = 4 n 2

அசல் ரூ. P என்க.

$$\therefore P\left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 = \text{ரூ. } 1352$$

$$P\left(1 + \frac{104}{100}\right)^2 = \text{ரூ. } 1352$$

$$P \times \frac{104}{100} \times \frac{104}{100} = \text{ரூ. } 1352$$

$$\therefore P = 1352 \times \frac{100}{104} \times \frac{100}{104}$$

$$= \text{ரூ. } 1250$$

∴ அசல் = ரூ. 1250

பயிற்சி :- 1) 6% கூட்டுவட்டி வீதத்தில் எந்த அசல் 3 ஆண்டுகளில் ரூ. 14887.70 கூடுதலை தரும்? [ரூ. 12500]

2) எந்த அசல் 8% கூட்டுவட்டி வீதத்தில் 2 ஆண்டு 3 மாதங்களில் ரூ. 7435.80 கூடுதலாகும்? [ரூ 6200]

தவணை ஈட்டு வைப்பு
(Recurring Deposit)
பாடம்-12

முன்னுரை : மாதாமாதம் அல்லது வேறு தவணைகளில் தொடர்ச்சியாக ஒரு குறித்த காலம் வரை ஒரு நிதியில் பணம் செலுத்தி பிறகு அந்நிதியிலிருந்து ஒரு தொகையைப் பெறுவது தவணை ஈட்டு வைப்பு முறை எனப்படும். சொற்ப சம்பளமுள்ளவர்கள் மாதா மாதம் தம் வருமானத்தில் சேமித்து இவ்விதத்தில் நிதிகளில் மடங்கு டிபாசிட்டாகக்கட்டி அதன் மூலம் கடைசியில் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையைப் பெறுவதை வரவேற்பார்கள். தவணை ஈட்டு வைப்பாகப் பாங்குகளில் போடும் பணத்திற்குப் தனிவட்டி வீதம் வட்டி கணக்கிடப்படுகிறது.

குறிப்பு :- 1 லிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட எண் முடிய உள்ள தொடர்ந்த எண்களைக் (natural numbers) கூட்ட உதவும் சூத்திரம் :-

1 முதல் n உட்பட உள்ள தொடர்பு எண்களின்

$$\text{கூடுதல்} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 \text{ முதல் } 24 \text{ முடிய உள்ள எண்களின் கூடுதல்} = \frac{24(24+1)}{2}$$

$$= 12 \times 25 = 300$$

மாதிரி 1 : 4% தனி வட்டி வழங்கும் ஒரு பொருளகத்தில் ஒவ்வொரு மாதத் தொடக்கத்திலும் ரூ. 5 வீதம் 24 மாதங்கள் செலுத்தி வரும் ஒருவர் 24 ஆவது மாத முடிவில் திரும்பப்பெறும் தொகை எவ்வளவு?

முதலில் செலுத்திய ரூ. 5, 24 மாதங்கள் இருப்பதால் அதற்கு 24 மாதங்கட்கான வட்டியும்

அதற்கடுத்த ரூ. 5.23 மாதங்கட்கான வட்டியும்
அதற்கடுத்த ரூ. 5க்கு 22 மாதங்கட்கான வட்டியும்

இதே போன்று ஒவ்வொன்றாகக் குறைந்து வந்து கடைசியில் செலுத்திய ரூ. 5க்கு 1 மாத வட்டியும் கிடைக்கும்.

ரூ 5க்கு 24 மாதங்களுக்கான வட்டி

ரூ 5க்கு 24 மாதங்களுக்கான வட்டி

ரூ 5க்கு 24 மாதங்களுக்கான வட்டி

....

....

....

ரூ 5க்கு 1 மாத வட்டி

∴ வட்டி = ரூ. 5க்கு (24 + 23 + 22 ...... + 1) மாதங்களுக்கானது.

$$= \text{ரூ. 5க்கு } \frac{24 \times 25}{2} \text{ மாதங்களுக்கானது}$$

$$= \text{ரூ}5 \times \frac{300}{12} \times \frac{4}{100} = \text{ரூ. } 5$$

அவர் மாதாமாதம் ரூ. 5 வீதம் 24 மாதங்கள் செலுத்திய தொகை

= ரூ. 5 × 24 = ரூ. 120

கிடைத்த வட்டி = ரூ. 5

∴ அவர் திரும்பப் பெறும் தொகை = ரூ. 120 + 5

= ரூ. 125.

மாதிரி 2 : 3½% தனிவட்டி கொடுக்கும் ஒரு பாங்கியில் ஒவ்வொரு மாதமும் ரூ.25 வீதம் 48 மாதங்கள் செலுத்தி வந்தால் 48 வது மாத முடிவில் என்ன தொகை திரும்ப பெறுவார்.

அசல் = மாதாமாதம் செலுத்தும் தொகை = ரூ. 25

$$\text{காலம்} = \frac{48 \times 49}{2 \times 12} = 98 \text{ வருடம்}$$

வட்டி வீதம் = $5\frac{1}{2}$.

$$\text{வட்டி} = \text{ரூ } 25 \times 98 \times \frac{11}{200}$$

$$= \text{ரூ. } 134.75$$

செலுத்திய தொகை = ரூ. 25×48 = ரூ. 1200

∴ திரும்பப் பெறும் தொகை = ரூ. 1200 + 134.75

= ரூ. 1334.75

மாதிரி 3 :- ஒவ்வொரு மாதத் தொடக்கத்திலும் ரூ 8 வீதம் 24 மாதங் கட்டு ஒரு வங்கியில் போட்டு வந்த ஒருவர் 25 மாத ஆரம்பத்தில் ரூ. 202 திரும்பப் பெற்றார் என்றால் அந்த வங்கி கொடுக்கும் தனி வட்டிவீதம் என்ன?

மொத்தம் போட்ட தொகை = ரூ. 8×24 = ரூ 192

திரும்பப் பெற்ற தொகை = ரூ 202

∴ கிடைத்த வட்டி = ரூ. 202—ரூ. 192 = ரூ. 10

இது ரூ. 8க்கு $(1 + 2 + 3 + \ldots 24)$ மாத வட்டியாகும்.

$$\text{காலம்} = \frac{24 \times 25}{12 \times 2} = 25 \text{ வருடம்}$$

$$r = \frac{100I}{Pn}$$

$$= \frac{100}{8} \times \frac{10}{25} = 5$$

∴ வட்டிவீதம் 5%

மாதிரி 4 : $4\frac{1}{2}$% தனிவட்டி தரும் ஒரு வங்கியின் தவணை நாட்டுத் திட்டத்தில் ஒருவர் ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகை

வீதம் 15 மாதங்கட்குப் போட்டு வந்தார். 15வது மாத முடிவில் அவர் ரூ. 463.50 திரும்பப் பெற்றார் என்றால் மாதாமாதம் அவர் போட்டு வந்த தொகை என்ன?

மாதாமாதம் கட்டியது ரூ 1 என்க.

15 மாதங்கட்குப் போட்ட தொகை = ரூ 1×15 = ரூ 15

வட்டி பெறும் காலம் = $\frac{15 \times 16}{2}$ மாதங்கள்

= 10 வருடம்

ரூ 1க்கு 4½% வீதம் 10 வருடவட்டி = ரூ. $1 \times 10 \times \frac{\quad}{2 \times 100}$

= ரூ. 0.45

∴ திரும்பப் பெறுவது = ரூ. 15 × ரூ. 0.45

= ரூ. 15.45

ரூ 15.45 திரும்பப் பெற்றால் மாதாமாதக் கட்டும் தொகைக்கு ரூ. 1

ரூ. 463.50 = ரூ ,, ,, ,, $\frac{463.50}{15.45}$

= $\frac{46380}{-1545}$

= ரூ. 30

∴ ஒவ்வொரு மாதமும் போட்ட தொகை = ரூ. 30

மாதிரி 5:- ஒருவர் ஒரு வருடத்தில் பிப்ரவரி மாதம் முதல் நவம்பர் வரை ஒவ்வொரு மாதமும் முதல் தேதியில் ரூ. 120 ஒரு பாங்கியில் கட்டுகிறார். அந்த பாங்கு ஆண்டுக்கு 3% தனி வட்டி கொடுக்கிறது. அவ்வாண்டு நவம்பர் கடைசியில் அவரது கணக்கில் மொத்தத் தொகை எவ்வளவு இருக்கும்;

பிப்ரவரி முதல் நவம்பர் உட்பட மொத்த மாதங்கள் = 10

$$\text{வட்டி கணக்கிடக் காலம்} = \frac{10 \times 11}{2} \text{ மாதங்கள்}$$

மாதா மாதம் போடும் தொகை = ரூ. 120

வட்டி வீதம் = 3%

$$\text{வட்டி} = \text{ரூ } \frac{120 \times 10 \times 11}{2} \times \frac{3}{100}$$

$$= \text{ரூ. } 16.5$$

10 மாதங்களில் பாங்கில் போட்ட தொகை = ரூ 120×10 = 1200

நவம்பர் கடைசியில் அவர் கணக்கில் மொத்தத் தொகை = ரூ. 1200 + 16.50

= ரூ. 1216.50

பயிற்சி :-

1) 5 வருடங்கட்கு ஒவ்வொரு மாத ஆரம்பத்திலும் ரூ. 10 வீதம் ஒருவர் ஒரு வங்கியில் போடுகிறார். அந்த வங்கி ஆண்டுக்கு 6% தனிவட்டி கொடுத்தால் ஐந்து வருட முடிவில் அவருக்கு கொடுக்க வேண்டிய தொகையை காண்க. [ரூ. 691:50]

2) ஒவ்வொரு மாத ஆரம்பத்திலும் ரூ. 25 வீதம் ஒருவர் ஒரு வங்கியில் 6 வருடங்களுக்கு கட்டி வருகிறார். வருடத்திற்கு 5% தனிவட்டி கணக்கிடப்பட்டால் ஆறாவது வருடக்கடைசியில் அவருக்குக் கிடைக்கும் தொகை எவ்வளவு? [ரூ. 2073.75]

3) ஒவ்வொரு ஆண்டு தொடக்கத்திலும் ரூ. 500 வீதம் 10 ஆண்டுகள் ஒரு பாங்கில் போடப்பட்டு வருகிறது. 6% தனிவட்டி கொடுக்கப்பட்டால் 10-வது ஆண்டு முடிவில் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை எவ்வளவு? [ரூ. 6650]

(குறிப்பு :- கணக்கிடப்படும் காலம் $\frac{10 \times 11}{2}$ மாதங்கள் ஆகும்.)

4) ஒரு நிதியில் ஒவ்வொரு மாதமும் ரூ. 15 வீதம் 30 மாதங்கள் போட்டு வந்த ஒருவர் 30வது மாத முடிவில் ரூ. 473.25 திரும்ப பெற்றார் என்றால் அந்நிதி தரும் தனி வட்டி வீதம் என்ன? [4%]

5) அஞ்சல் நிலையத் தொடர் இட்டு வைப்பு திட்டத்தின் படி (Cumulative Time Deposit) மாதந்தோறும் ரூ 10 வீதம் செலுத்தி வந்ததால் 5 ஆண்டு முடிவில் ரூ 650 கிடைக்கும் என்றால் வட்டி வீதம் என்ன? [3.3%]

6) எங்களது மடங்கு டிபாசிட் திட்டம் தொடர்ச்சியாக மாதம் ரூ 10 வீதம் செலுத்தினால் 46 மாதங்களுக்குப் பிறகு ரூ 500 ஆக வளரும் அல்லது 86 மாதங்களுக்கு பிறகு ரூ 1000 ஆக வளரும் இது ஒரு விளம்பரம். இதில் குறிப்பிட்ட இரு வகையிலும் கிடைக்கும் தனிவட்டி வீதம் என்ன? [4.4%, 4.3%]

7) 6% தனி வட்டி தரும் வங்கியில் ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகை வீதம் 16 மாதங்கட்குச் செலுத்தி வரும் ஒரு நபர் 16 ஆவது மாத முடிவில் ரூ 417 பெற்றார், மாதம் மாதம் அவர் செலுத்தி வந்த தொகை எவ்வளவு? [ரூ 25]

8) ஒவ்வொரு மாத ஆரம்பத்திலும் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகை வீதம் 60 மாதங்களுக்கு 76% தனி வட்டி தரும் ஒரு நிதியில் போட்டு வந்த ஒருவர் 60வது மாத முடிவில் ரூ 1037.26 திரும்ப பெற்றார். அவர் மாதம் மாதம் கட்டிய தொகை என்ன? [ரூ 15]

Lesson—9, 10

எல்லாக் கேள்விகளுக்கும் விடையளிக்கவும்

1) ஒரு APயில் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 27. அவற்றின் பெருக்கற்பலன் [illegible] என்றால் அவ்வெண்களைக் காண்க.

2) 3 + 8 + 13 + 18 + ... என்ற தொடரில் 302 ஒர் உறுப்பா எனக் காண்க.

3) ஒரு A.P. யில் [illegible]$: t_6 = 2 : 3$ என்றால்
[illegible]$: t_{11}$ காண்க.

4) ஒரு A.P.
$t_p = a;\ t_q = b;\ t_r = c$ என்றால்
$a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$ எனக்காட்டுக.

5) ஒரு A. P. யின் மொத்த உறுப்புகள் 15. அவற்றின் கூடுதல் 390. முதல் உறுப்பு 5. பொது வித்தியாசத்தையும் 10ஆம் உறுப்பையும் காண்க.

6) 200க்கும் 400க்கும் இடையில் உள்ள
i) 7ஆல் வகுபடும் எண்களின் கூடுதலையும்
ii) 7ஆல் வகுபடாத எண்களின் கூடுதலையும் காண்க.

7) 0,03, 0,06, 0,12, ... 19,2 என்ற பெருக்குத் தொடரில் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன.

8) a, ar, ar², என அமையும் பெருக்குத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $\dfrac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ என நிரூபிக்கவும்.

9) ஒரு G.P யில் முதல் உறுப்பின் வர்க்கம் மூன்றாவது உறுப்பாகும் 5வது உறுப்பு 64 என்றால் G.P யைக் காண்க.

10) A.P யில் உள்ள மூன்று தொடர்ந்த எண்களின் கூடுதல் 15. அவ்வெண்களோடு முறையே 1,4,19 என்ற எண்களைக் கூட்டக் கிடைப்பது G.P என்றால் எண்களைக் காண்க.

11) கூடுதல் காண்க.
$11^2 + 11^2 + 12^2 + \ldots + 30^2$

12) கூடுதல் காண்க.
$12^2 + 16^2 + \ldots + 40^2$

Lesson — 11, 12, 13 & 14

Marks : 100

1. கீழ்வரும் எண்களின் வர்க்க மூலம் காண்க.

   (a) 45796 (b) 97344 (c) 15129

2. கீழ்வரும் பின்னங்களின் வர்க்க மூலம் காண்க.

   (a) $\frac{1600}{1840}$ (b) $\frac{2601}{4356}$ (c) $\frac{729}{10816}$

3. $\sqrt{2} = 1414$; $\sqrt{3} = 1.732$ எனக் கொண்டு வர்க்கமூலம் காண்க.

   (a) 50 (b) 75 (c) 243

4. ஒரு செவ்வக வயலின் நீளம் அதன் அகலத்தைப் போல 3 மடங்கு அதன் பரப்பளவு 27 ஹெக்டேர். மீட்டருக்கு ரூ. 0.75 வீதம் வயலைச் சுற்றி வேலிபோட என்ன செலவாகும்?

5. 8% கூட்டு வட்டி கொடுக்கும் ஒரு வங்கியில் ஒருவர் ஒவ்வொரு வருட ஆரம்பத்திலும் ரூ. 3600 போடுகிறார். 3 வருடக் கடைசி-யில் அவர் கணக்கில் உள்ள தொகை எவ்வளவு?

6. ரூ. 25,000 5½% கூட்டு வட்டி வீதத்தில் 3 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டுவட்டி எவ்வளவு?

7. ஒருவர் மாதாமாதம் ரூ. 25 வீதம் 60 மாதங்களுக்கு ஒரு வங்கி-யில் செலுத்துகிறார் வங்கி 5% தனி வட்டி அளிக்கின்றது. கால இறுதியில் அவர் பெறும் தொகை எவ்வளவு?

8. ஒவ்வொரு மாதத் துவக்கத்திலும் ரூ. 20 வீதம் 20 மாதங்களுக்கு செலுத்தும் ஒருவர் கால இறுதியில் ரூ. 421 பெறுகிறார். வங்கி அளிக்கும் தனி வட்டி வீதம் என்ன?

புள்ளியியல்-விளக்கம், பயன்படும் துறைகள், நன்மைகள், குறைகள்

வளர்ந்துவரும் இவ்வுலகிலே புள்ளியியல் மிகவும் தேவைப்படுகின்ற ஒரு பிரிவாகும். தனி மனிதனின் வாழ்க்கையிலிருந்து ஒரு அரசு செயல்படுவது வரை புள்ளியியல் பயன்படுகின்றது.

முற்காலத்தில் புள்ளியியல் வெகு அரிதாகவே பயன்படுத்தப்பட்டு வந்தது. அரசர்கள் தங்கள் நாட்டின் மக்கட் தொகைக் கணிப்பு, பயிரிடப்படும் விளை நிலங்களின் அளவு, அந்நிலங்களின் மூலம் உத்தேசமாகக் கிடைக்கக்கூடிய வரி வருமானம், ஏற்றுமதி இறக்குமதி ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுவதற்கே புள்ளியியலைப் பயன்படுத்தினார்கள்.

ஆனால் தற்காலத்தில் புள்ளியியல் பயன்படாத துறையே இல்லை எனலாம். பொருளாதாரம், வாணிகம், விவசாயம் ஆகிய அநேக துறைகளில் புள்ளியியல் ஒரு முக்கியப்பங்கு வகிக்கின்றது. உயிரியல், வேதியியல், பூதவியல் ஆகிய துறைகளில் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ள முடிவுகள் கூட புள்ளியியல் உதவியுடன் கண்டுபிடிக்கப் பட்டன என்றால் மிகையாகாது.

புள்ளியியல், மற்ற விஞ்ஞானக் கலைகளைப் போலவே முறையானதாக உள்ளது. புள்ளியியல் துறையிலும் அடிப்படைக்கொள்கைகள், விதிகள் பல உண்டு. ஆனால் மற்ற அறிவியற் கலைகளை விட புள்ளியியல் சிக்கலானதென்றாலும். ஏனென்றால் புள்ளியியல் சூழ்நிலைகளால் எளிதில் பாதிக்கப்படுகின்றது. மேலும் புள்ளியியல் முடிவுகள், விவரங்களைப் பொறுத்து மட்டும் அமையாமல், அவ்விவரத்தைத் தொகுத்தவரின் அனுபவத்தையும் ஆற்றலையும், பொறுத்தும் அமைகின்றது. அனுபவம் ஆற்றல் மிக்கவர்களால் தொகுக்கப்பட்டு, ஆராயப்படும் விவரங்கள் தெளிவான முடிவுகளைக் கொடுக்கின்றன. இப்புள்ளியியலைப் பற்றி பல்வேறு அறிஞர்கள் பல்வேறு விளக்கங்களைக் கொடுத்துள்ளார்கள்.

ஹோரேஸ் செக்ரிஸ்ட் என்ற வல்லுநர் பின்வருமாறு புள்ளியியலை வரையறுக்கிறார்.

"புள்ளியியல் என்பது முறையான வழியினால் குறிப்பிடப்பட்ட காரணத்திற்காகச் சேகரிக்கப்பட்ட பல்வேறு காரணங்களால் பாதிக்கப்பட்ட ஒன்றையொன்று ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும் படியுள்ள எண் வடிவ விவரத்தொகுதியாகும்.

"வெப்ஸ்டர்" என்பவரின் வரையறை

புள்ளியியல் ஒரு நாட்டின் மக்களது நிலையைப் பற்றிய விவரங்களைத் தருகின்றது. எண்ணிக்கை வடிவில் அமைந்துள்ளது. பட்டியல்களாக விவரங்கள் தரப்படும்".

"பௌலி" என்பவரின் வரையறை

"புள்ளியியல் என்பது எண்ணிக்கை விஞ்ஞானம், சராசரிகளைப் பற்றிய அறிவியல்"

இம்மாதிரியே பல அறிஞர்கள் பல்வேறு விளக்கங்களைக் கொடுத்துள்ளனர். விளக்கங்கள் அவரவர்கள் அனுபவத்தின் வாயிலாக அமைந்தவையாகும். இம்மாதிரியான பல்வேறு வரையறைகள் இருப்பினும் ஒரு பொதுவான அடிப்படை உள்ளது; "புள்ளியியல் என்பது விவரங்களை சேகரித்து வகைப்படுத்தி ஆய்ந்து அதனின்று முடிவுகளைப் பெறும் ஒரு அறிவியல்" என்று தெரிகின்றது.

பயன்படும் துறைகள் :

புள்ளியியல் மிக அதிக அளவில் பொருளாதாரம், வாணிகம், தொழில், விவசாயம் ஆகிய துறைகளில் பயன்படுகிறது. இத்துறைகளில் இது அதிக அளவு பயன்பட்டாலும் மற்ற எல்லாத் துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. மருத்துவத் துறையில் புது மருந்துகள் மருத்துவ முறைகள் புள்ளியியல் முறையில் பரிசோதிக்கப்படுகின்றன. உளவியல் என்னும் துறையும், ஒரு மனிதனின் அறிவுத்திறன், மனதில் விஷயங்களைத் தக்க வைத்துக் கொள்ளும் திறன் ஆகியவைகளைப் பற்றி ஆராயும்போது புள்ளியியல் பயன்படுகிறது.

புள்ளியியலின் குறைபாடுகள் :

புள்ளியியல் இன்று பல துறைகளில் பயன்பட்டாலும் மிக குறைந்த செலவில் மிக அதிகமான விவரங்களைப் பெற்றுத் தந்தாலும்

புள்ளியியலை ஒரு முழுமை பெற்ற, குறைபாடற்ற அறிவியலெனக் கூறமுடியாது. இவ்வறிவியல் துறையிலும் பல்வேறு குறைபாடுகள் உண்டு.

1. ஒரு விவரத்தைப்பற்றி ஆராய்ந்து நோக்கத்தான் புள்ளியியல் பயன்படுகின்றது. ஆனால் அப்பிரச்சினையைப் பற்றித் திட்டவட்டமான ஒரு முடிவெடுக்க புள்ளியியல் துணை செய்யாது. உதாரணமாக ஒரு இடத்தில் கடுமையான நோயால் பாதிக்கப்படுவர்களின் நிலை என்ற விவரங்களை புள்ளியியல் மூலம் அறியலாம். ஆனால் கடுமையான நோயைப் பரவவிடாமல் தடுப்பது எவ்வாறு என்ற தீர்வு காணுவதற்குப் புள்ளியியல் உதவி செய்யாது.

2. புள்ளியியல் பயன்பட வேண்டுமானால் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் எண்வடிவில் இருக்க வேண்டும். எண்வடிவில் கொடுக்கப்படாத விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு குறிப்பிட்ட பிரச்சினையை ஆராய முடியாது. ஆராயத் தொடங்குவதற்கு முன்னர், அதற்கு வேண்டிய விவரங்களை எண்ணிக்கை வடிவிற்கு மாற்றிய பிறகே ஆராய்ச்சியைத் தொடங்க வேண்டும்.

3. புள்ளி விவரக் கருத்துக்களில் முக்கியமானவை கூட்டுச் சராசரி தரவிலக்கம், ஒட்டுறவுக்கெழு ஆகியவையாகும். இந்த அளவைகள் மூலம் ஒரு பிரச்சினையை மேலெழுந்தவாரியாகத்தான் காண முடியுமே தவிர இந்த அளவைகள் உண்மை நிலையை முழுவதுமாக பிரதிபலிக்காது. உதாரணமாக ஒரு நகரில் பத்தாவது படிக்கும் மாணவர்கள் கணிதத்தில் சராசரி 50 மார்க் எடுத்துள்ளனர் என்றால் அந்த நகரத்தில் உள்ள எல்லா மாணவர்களும் 50 மார்க் எடுத்துள்ளார்கள் என்று பொருளாகாது. 100 மார்க் எடுத்த சில மாணவர்களும் இருப்பார்கள். 50 மார்க் எடுத்த சில மாணவர்களும் இருப்பார்கள். ஆகவே சராசரி மார்க் 50 என்பது பொது நிலையை மேலெழுந்தவாரியாகத்தான் விளக்குமே தவிர உண்மையான நிலையை பிரதிபலிக்காது.

4. அரைகுறையான விவரங்களைக் கொண்டு எடுக்கப்படும் முடிவுகள் தவறானவையாக அமையும். இவ்வாறு எடுக்கப்படும் தவறான முடிவுகள் மக்கள் மத்தியில் ஒரு தவறான எண்ணத்தை

ஏற்படுத்தி விடும். ஆகவே புள்ளியியல் என்னும் கருவியைக் கையாளுபவர்கள் மிகவும் மென்மையாகக் கையாள வேண்டும். ஆராய்ச்சியாளர் ஒரு பிரச்சனையை அணுகும் போது புள்ளியியல் முறைகளால் கிடைக்கும் எந்த முடிவையும் ஏற்றுக் கொள்ளும் மனப்பக்குவம் பெற்றிருக்க வேண்டும் ஒரு குறிப்பிட்ட முடிவை மனதில் முன்னமையே ஏற்றுக் கொண்டு பிரச்சினையை அணுகக் கூடாது அவ்வாறு அணுகினால் நிலைநாட்ட விரும்பும், முடிவுக்கு ஆதரவான விவரங்களை மட்டும் பயன்படுத்தும் நிலை ஏற்படும்.

5. மேலே குறிப்பிட்டுள்ள குறைபாடுகள் தவிர ஆராய்ச்சி செய்பவர்கள் செய்யும் தவறுகளும் புள்ளியியலின் குறைபாடுகளாகக் காண்கின்றன.

i) பிரச்சினைக்குச் சம்பந்தப்படாத விவரத்தைப் பயன்படுத்துதல்

ii) புள்ளி விவரங்களைத் திரித்துக் கூறுதல்.

iii) ஒரே வகையைச் சாராத புள்ளி விவரங்களைப் பயன் படுத்துதல்

iv) ஒரு விவரத்தின் ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு முழு விவரத்திற்கும் பொதுமைப்படுத்துதல்,

மேற்கூறிய குறைபாடுகள் இருப்பினும், சரியான நேர்மையான முயற்சியின் மூலம் குறைபாடுகளைக் குறைக்கலாம். குறைபாடுகள் உள்ளன என்பதற்காகப் புள்ளியியலை முழுமையாக ஒதுக்கி விட முடியாது புள்ளியியல் என்பது கத்தி போன்றது. நாம பயன்படுத்தும் முறை சரியான முறையாக அமையவேண்டும். தவறான முறையில் பயன்படுத்தி விட்டு ஆயுதத்தைக் குறை கூறுவதில் பயனில்லை. ஆகவே புள்ளி விவரங்களை நேர்மையான முறையில் சேகரித்து எந்த நோக்கத்திற்காக சேர்க்கப்பட்டவையோ அதற்கு மட்டுமே பயன்படுத்த வேண்டும்.

புள்ளியியல் விவரங்களை சேகரித்தல்

நாம் சென்ற பாடத்தில் புள்ளியியலைப் பற்றிய வரையறைகள் கூறுகள் உறைகள் இவற்றைப் பற்றி படித்தோம். இப்பாடத்தில் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறை, அவற்றை ஒழுங்குபடுத்து-ல் ஆகியவற்றைப் பற்றிக் காண்போம்.

ஒரு பொருளைப் பற்றி ஆராய வேண்டுமென்றால் அதைப் பற்றிய விவரங்கள் எண்ணிக்கை வடிவத்தில் இருக்க வேண்டும் என்று முன்னமேயே கண்டோம். ஆராய்ச்சியாளர் தனது ஆராய்ச்சியைத் தொடங்குவதற்கு முன்னால் கீழே கண்ட குறிப்புகளைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

1. செய்யப்படும் ஆய்வின் நோக்கம்.
2. ஆய்வு செய்யப்படுவதற்குத் தேவையான விவரங்களைப் பெறும் இடர்முறை
3. ஆய்வு நடத்தப்படும் முறை, அவற்றின் துல்லிதத் தன்மை.

மேற்கண்ட குறிப்புகளை மனதில் கொண்டு செயல்படும் முறைகளைப் பற்றி முன்னதாகவே திட்டமிட்டுச் செயலாற்ற வேண்டும் திட்டமிட்டுச் செயலாற்றுவதால் நேரம், பொருட்செலவு இவை குறையும். ஆய்வின் நோக்கத்தைத் தெளிவாகக் கண்டறிந்தபின் அதற்கேற்ப விவரங்களைச் சேகரிக்க வேண்டும்.

முதல்நிலை விபரம் :

ஆராய்ச்சியாளர், அல்லது அவரது பிரதிநிதி இவர்களால் நேரடியாகச் சேகரிக்கப்படும் விவரங்கள் முதனிலை விபரங்கள் எனப்படும். முதனிலை விபரங்களைச் சேகரிப்பது கடினம்; காலதாமதம் ஆகும். அதிகமான பொருட்செலவும் ஆகும். மேற்கூறிய குறைபாடுகள் இருந்த போதிலும் முதனிலை விபரங்கள் மிகவும் நம்பத்தகுந்தவை.

இரண்டாம் நிலை விபரங்கள் :

நமக்குத் தேவையான விபரம், வேறொரு காரணத்திற்காக ஏற்கனவே சேகரிக்கப்பட்டிருக்கலாம். அவ்வாறாயின் நாமும் ஒரு முறை

அவ்விபரத்தைச் சேகரிக்காமல் ஏற்கனவே சேகரித்து வைக்கப்பட்டுள்ள விபரத்தை அப்படியே பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். இரண்டாம் நிலை விபரங்கள் அரசாங்க வெளியீடுகள், மாதவெளியீடுகள் தனிப்பட்ட ஆராய்ச்சியாளர்களின் வெளியீடுகள், இவற்றிலிருந்து பெறப்படுகின்றன. இரண்டாம் நிலை விபரங்கள் எளிதில் கிடைக்கும் இவற்றைப் பெறுவதற்கு அதிக பொருட் செலவில்லை. ஆனால் மிகவும் கவனத்துடன் பரிசீலிக்கப்பட்ட பிறகே அவற்றை ஏற்றுக் கொள்ள வேண்டும்.

முதனிலை அல்லது இரண்டாம் நிலை முறையின் மூலம் விபரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன. முதல் முறையான முதனிலை விவரத்தில் கேள்விப் பட்டியலை தபால் மூலம் அனுப்பி தகவல் சேகரிக்கும் முறையும் ஒன்று இம்முறை பயன்படுத்தப்படும் பொழுது மிகவும் கவனம் தேவை ஆராய்ச்சி செய்பவரோ அல்லது பிரதிநிதியோ நேரடியாகச்சென்று விபரம் பெற முடியாத நிலையில் இம்முறை கையாளப்படுகின்றது. இம்முறையில் பயணச்செலவு மிகவும் குறைவு ஆனால் கேள்விப்பட்டியலை படிக்காதவர்களுக்கே அனுப்ப முடியும் ஆகவே படிக்காத மக்கள் இதில் பங்கேற்க முடியாது. மேலும் கேள்விகள் தயாரிப்பதில் பல சிக்கல்கள் எழும். ஆகவே முழுமையான கேள்விப் பட்டியலை தயார் செய்வதற்கு முன்னால் மாதிரி கேள்விப்பட்டியலை இரண்டு மூன்று முறைகள் பரிசோதனை செய்து பார்த்து குறைபாடுகள் ஏதேனும் இருப்பின் அவற்றைக்களைய வேண்டும். மேலும் அனுப்பப்படும் கேள்விப்பட்டியலில் அனைத்தும் திரும்பப் பெறவேண்டும். அவ்வாறு திரும்பி வரும் கேள்விப் பட்டியலில் எல்லாக்கேள்விகளுக்கும் விடை இருக்க வேண்டும். இந்தக்குறைகள் எல்லாம் தவிர்க்கப்படும் ஏற்பாடுகளை நம்மால் செய்ய முடியுமென்றால் கேள்விப்பட்டியல் முறை ஒரு சிறந்த முறையாகும்.

கேள்விப்பட்டியல் தயாரிக்கும் முறை

பட்டியல் தயாரிக்கும்போது சில எளிய விதிகளை மனதில் கொள்ள வேண்டும்.

1. நீண்ட கேள்விகளை அமைக்கக் கூடாது.

2. கேள்விகளுக்கான பதில்கள் கூடியமட்டும் ஆம் அல்லது இல்லை என்று அமையுமாறு கேள்விகள் அமையவேண்டும்.

3. கேள்விகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கக்கூடாது.

4. கூடியவரை வருமானம், சொந்த சம்பந்தப்பட்ட கேள்விகளைத் தவிர்க்க வேண்டும்.

5. கேள்விகளின் வாசகம் மிக எளிய முறையில் அமைய வேண்டும். பதிலளிப்பவரின் ஞாபக சக்தியைச் சோதிக்கும் வகையில் கேள்விகள் அமையக்கூடாது.

விவரங்களைச் சேகரித்த பிறகு அவற்றை அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும். அட்டவணைப்படுத்துவதன் மூலம் விவரங்களை எளிதில் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம்.

மாறிகள்:

விவரங்கள் அட்டவணைப்படுத்தப்படுகின்றன. அவற்றை நிகழ்வெண் பரவல்களாக அமைக்கின்றோம். இதற்கு முன் "மாறி" என்ற சொல்லை வரையறுப்போம். பல்வேறு மதிப்புகளை ஏற்கக்கூடிய அளக்கப்படக்கூடிய ஒன்றை நாம் "மாறி" என்கிறோம். மாறிகள் இரு வகைப்படும் (a) தொடர்மாறி (b) தொடர்ச்சியற்ற மாறி.

a) தொடர் மாறி : ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைக்குள் உள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் ஒரு மாறி ஏற்குமானால் அம்மாறி தொடர்மாறி எனப்படும். ஒரு மனிதனின் உயரம், அவன் எடை ஆகியவை தொடர்மாறிகளுக்கு உதாரணங்களாகும்.

b) தொடர்ச்சியற்ற மாறி:

ஒரு இடைவெளியில் ஒரு மாறியானது எல்லா மதிப்புகளையும் ஏற்காமல், சில குறிப்பிட்ட மதிப்புகளை மட்டும் ஏற்குமானால் அம்மாறி தொடர்ச்சியற்ற மாறி எனப்படும். ஒரு வீட்டிலுள்ள மனிதர்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு நகரத்தில் உள்ள மக்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவை தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளுக்கு உதாரணங்களாகும்.

நிகழ்வெண் பரவல் :

விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்ட பின்னர், விவரங்களைப் பல பிரிவுகளாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எத்தனை எண்ணிக்கைகள் உள்ளன என வகைப்படுத்துவதே நிகழ்வெண் பரவலெனப்படும். பிரிவு இடைவெளிகளைச் சம அளவு உள்ளதாக அமைத்தல் நலம். ஒரு பிரிவில் உள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதன் நிகழ்வெண் எனப்படுகிறது. பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை 20க்கு மிகாமல் இருத்தல் நலம்.

தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளாக இருப்பின் பிரிவு எல்லைகள் அமைப்பது எளிது. ஏனெனில் மாறிகள் முழு எண்களாகவே அமையும்

ஆகவே முதல் பிரிவின் மேல் எல்லை இரண்டாம் பிரிவின் கீழ் எல்லை என்ற வேறுபாடு கிடைக்கும். ஆனால் தொடர் மாறியாக இருக்கும் போது முதல் பிரிவின் மேல் எல்லையே இரண்டாம் பிரிவின் கீழ் எல்லையாக அமைக்க வேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது. உதாரணமாக முதல் பிரிவு 10-20 என்றும் இரண்டாம் பிரிவு 20-30 என்றும் இருந்தால் 20 என்ற மாறி எந்தப் பிரிவில் அமைகின்றது என்பது சந்தேகமாக இருக்கும். இம்மாதிரி சமயங்களில் மேல் எல்லையை விடுத்து கீழ் எல்லையை எடுத்துக் கொள்ளுதல் என்ற முறை கையாளப்படுகிறது.

ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள எண்ணிக்கையைக் காண கீழ்வரும் முறை பயன்படுகிறது. பிரிவுகள் 01-0,11-20 ....91-100 என பிரிக்கப்பட்டுள்ளன எனக்கொள்வோம். 74 என்ற எண் 71-80 என்ற பிரிவில் அமையும். அங்கு I என்ற குறியைப் போட்டுக் கொள்ள வேண்டும். அதே பிரிவில் மற்றொரு எண் வந்தால் மறுபடியும் I என்ற குறியிட வேண்டாம். இக்குறிகளை ஐந்து ஐந்தாக அடுக்கிக் கொள்வது எண்ணுவதற்கு எளிது. ஆகவே நான்கு குறியீடுகளை ஒன்றன் பக்கத்தில் மற்றொன்றாக அடுக்கி விட்டு, ஐந்தாவது குறியீட்டை அடிக்கும் குறியீடாக எழுத வேண்டும். உதாரணமாக ஒரு பிரிவின் நிகழ்வெண்கள் 7 என்றால் IIII II என்று குறியிட வேண்டும் மற்றொரு பிரிவின் நிகழ்வெண் 13 என்பதை IIII IIII III குறியீடு செய்ய வேண்டும். ஒவ்வொரு கட்டும் 5 என்பதைக் குறிக்கும்.

எ.கா. 1

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை 50 மாணவர்கள் 1 மாதத் தேர்வில் எடுத்துள்ள மதிப்பெண்கள்.

இவ்விவரத்தை அட்டவணைப்படுத்துக.

8	18	28	11	0	4	19	8	8	23
11	10	11	25	7	8	7	19	7	9
10	9	12	9	24	10	10	11	22	10
24	10	4	3	10	0	24	7	21	9
22	2	9	12	16	15	11	18	20	6

மிகச் சிறிய எண் 0, மிகப் பெரிய எண் 28 வித்தியாசம் 25.

பிரிவு	குறிகள்	நிகழ்வெண்
0—3	IIII	5
4—7	IIII II	7
8—11	IIII IIII IIII IIII	21
12—15	IIII	4
16—19	III	3
20—23	IIIII	6
24—27	IIII	4

பயிற்சி :

1) கீழ்காணும் விவரத்திற்கு ஒரு அலைவெண் பரவல் அமைக்கவும்

52	49	71	64	71	91	94	75	71	62
72	63	84	98	81	87	83	97	87	75
80	44	69	54	83	75	47	48	59	89
59	53	75	89	83	79	65	60	64	78
47	92	49	59	61	55	93	57	68	91

2) ஒரு வகுப்பிலுள்ள 35 மாணவர்களின் எடை (கி.கி. திருத்தமாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது இவ்விவரத்திற்கு ஒரு அலைவெண் பரவல் அமைக்க.

45	32	33	36	32	38	31
43	47	32	35	43	33	40
43	47	49	34	35	38	30
33	41	41	37	36	37	39
31	34	39	49	41	40	44

3) 25 தொழிலாளர்களின் வயது (ஆண்டுகளில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரத்திற்கு ஒரு அலைவெண் பரவல் அமைக்க.

34	41	39	30	29
39	36	37	38	40
36	44	46	35	42
40	38	35	37	48
32	28	39	32	31

படவிளக்கம்

பட்டியலில் அமைக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கல்வியறிவு படைத்தவர்களே புரிந்து கொள்ள முடியும். மேலும் பட்டியலில் அமைக்கப்பட்ட விவரங்கள் எல்லோருடைய கவனத்தையும் அவ்வளவாகக் கவருவதில்லை. ஆனால் பட்டியலில் அமைக்கப்பட்ட விவரங்களையே நாம் படங்கள் மூலமாக விளக்குவோமானால், அப்படங்கள் பாமர மக்களுக்கு கூட விஷயங்களை எளிதில் உணர்த்துகின்றன. கண்களால் எளிதில் விளக்க முடியாத விஷயங்களை படங்கள் எளிதில் விளக்கிவிடும்.

விளக்கப் படங்கள்:

புள்ளியியலில் கீழ்கண்ட விளக்கப்படங்கள் பயன்படுகின்றன

1) செவ்வக விளக்கப்படம்
2) நிகழ்வுச் செவ்வகப்படம்
3) நிகழ்வுப் பல்கோணம்
4) நிகழ்வு வளைவு (அலைவெண் வரை)

மேலே கண்டுள்ளவை தவிர மேலும் சில விளக்கப்படங்களும் உள்ளன. நாம் இந்த ஆண்டின் மேலே கண்டுள்ள நான்கு விளக்கப் படங்களைப் பற்றி மட்டும் கற்றுக் கொள்வோம்.

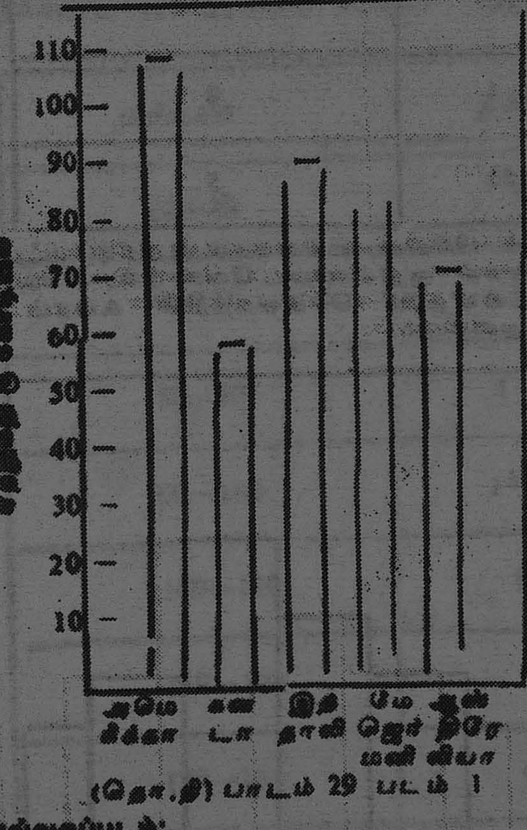
செவ்வக விளக்கப்படம்:

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் நிகழ்வெண்ணிற்குத் தகுந்தாற் போல செவ்வகத்தின் உயரம் அமையும், பிரிவுகள் சம இடைவெளி உடையதாக இருப்பின் செவ்வகத்தின் அகலங்கள் சமமாக அமையும். ஒரு செவ்வகத்திற்கும் மற்றொரு செவ்வகத்திற்கும் உள்ள இடைவெளி சம அளவாக இருக்கும்படி நாம் செவ்வகங்களை வரைய வேண்டும்.

எ. கா.

கீழ்க்காணும் அட்டவணை இந்தியா இறக்குமதி செய்த பொருட்களின் மதிப்பைக் கொடுக்கின்றது. இவ்விவரத்தை ஓர் செவ்வக விளக்கப்படமாக அமைக்கவும்.

நாடுகள்	இறக்குமதிப் பொருட்களின் மதிப்பு (கோடியில்)
அமெரிக்கா	105
கனடா	53
இத்தாலி	82
மேற்கு ஜெர்மனி	73
ஆஸ்திரேலியா	64



(தொ.தி) பாடம் 29 படம் 1

நிகழ்வுச் செவ்வகப்படம்:

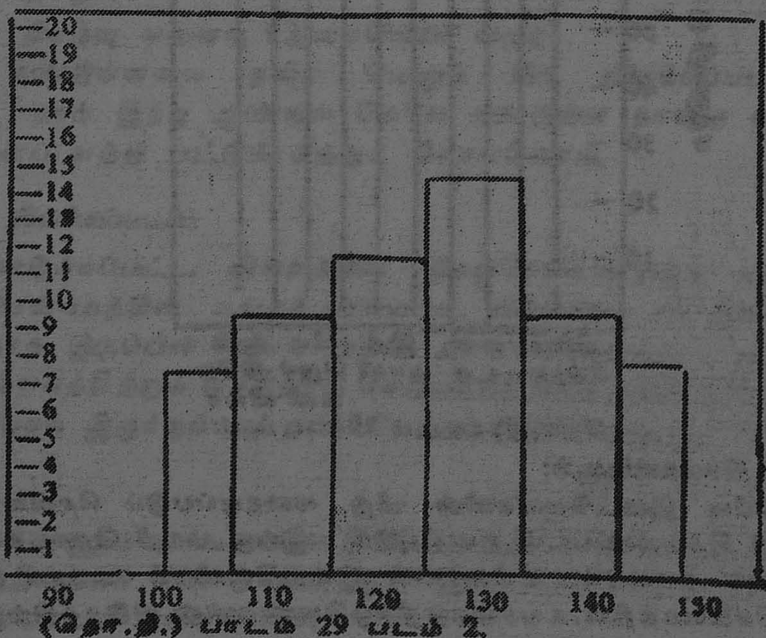
பிரிவு இடைவெளிகளின் மீது வரையப்படும் செவ்வகப்படம் நிகழ்வுச் செவ்வகப்படம் எனப்படும். இங்கு மாறி தொடர்ச்சியான மாறியாக அமையும். பிரிவுகளின் இடைவெளிகள் சமமாக இருக்கும் போது செவ்வகத்தின் உயரங்கள் நிகழ்வெண்களின் விகிதத்தில் இருக்கும்

பின்வரும் விவரத்திற்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகப்படம் வரைக.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
90—100	6
100—110	8
11 —12	10
120—130	12
130—[illegible]	9
140—130	5

இங்கு x அச்சில் பிரிவின் எல்லைகள் குறிக்கப்பட்ட வேண்டும். y அச்சில் அலைவெண்கள் குறிக்கப்பட வேண்டும். பிரிவுகளின் இடைவெளிகள் சமமாக உள்ளதால் செவ்வகத்தின் உயரம் நிகழ்வெண்களின் விகிதத்தால் அமையும்.

படம் 2)



(தொ.தி.) பாடம் 29 படம் 2,

நிகழ்வுப் பல்கோணம்:

ஒரே இடைவெளிகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைய முடியும். நிகழ்வுச் செவ்வகத்தின் மேற்பக்கத்தின் மையப்புள்ளிகளை நேர்கோட்டால் அடுத்தடுத்துச் சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் படம் நிகழ்வுப் பல்கோணம். நிகழ்வுச் செவ்வகத்தின் இரு புறங்களிலும் பூஜ்ஜிய உயரமுள்ள இரு செவ்வகங்களின் மையப் புள்ளிகளையும் நேர்கோட்டால் சேர்ப்பது வழக்கம்.

கீழ்க்கண்ட விபரத்திற்கு நிகழ்வுப் பல்கோணம் வரைக.

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்
60—70	5
70—80	7
80—90	1
90—100	14
100—110	9
110—120	6
120—130	4

4. நிகழ்வு வளைவு :

நிகழ்வு செவ்வகத்தின் மையப்புள்ளிகளை நேர்கோட்டால் சேர்த்தால் நிகழ்வுப் பல்கோணம் கிடைக்கின்றது. அதற்கு மாறாக மையப்புள்ளி ஒரு வளைவால் சேர்த்தால் நிகழ்வு வளைவு கிடைக்கின்றது.

[illegible]

[illegible]	[illegible]
40—45	6
45—50	9
50—55	10
55—60	14
60—65	8
65—70	5

பயிற்சி:

1. கீழ்க்கண்ட விபரத்திற்கு ஒரு செவ்வக விளக்கப்படம் வரைக.

நாடுகள்	ஏற்றுமதி (ரூ. கோடிகளில்)
அமெரிக்கா	24
ரஷ்யா	35
இலங்கை	12
ஆஸ்திரேலியா	17
ஜப்பான்	22

2. கீழ்க்கண்ட விவரத்திற்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம், நிகழ்வுப் பலகோணம் நிகழ்வு இவற்றை வரைக.

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்
20—30	4
30—40	6
40—50	7
50—60	10
60—70	13
70—80	9
80—90	6
90—100	[illegible]

புள்ளியியல்

கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலையளவு முகடு, திட்டவிலக்கம்

மையப் போக்கு அளவைகள்:- விவரங்கள் வகைப்படுத்தப்படும் முறையையும் அவை பட்டியல்களாகக் கொடுக்கப்படுவதையும் கண்டறிந்தோம். இவைகளின் மூலம் விவரங்களைப் பற்றி ஓரளவே நாம் அறிந்து கொள்ள முடிகிறது. மேலும் விளக்கமாக விவரங்களைப் பற்றி அறிந்து கொள்வதற்கு மையப்போக்கு அளவைகள் பயன்படுகின்றன. மையப்போக்கு அளவை என்பதைச் சுருக்கமாகச் சராசரி" எனக் கூறலாம். மையப்போக்கு அளவைகளாக கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சராசரிகளைக் கூறலாம்.

1) கூட்டுச்சராசரி

2) இடைநிலை அளவு

3) முகடு

கூட்டுச்சராசரி :

x என்னும் மாறியானது 'n' பல்வேறு மதிப்புகளை ஏற்கிறது. என்போம். அம்மதிப்புகள் முறையே x_1 x_2 x_3 .. ... x_n என்று குறிப்பிடப்படுகின்றன. எனவும் கொள்வோம். இவற்றின் கூட்டுச்சராசரி பின் வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன. கூட்டுச்சராசரியை $\bar{x}$ என குறியீட்டு முறையில் எழுதுகின்றோம்.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n}{n}$$

அதாவது கண்டறிந்த n மதிப்புகளின் மொத்தத்தை மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைக்கும் சராசரிக்குக் கூட்டுச் சராசரி என்று பெயர்.

உ-ம்

10, 12, 14, 17, 18 ஆகிய மதிப்புகளின் கூட்டுச்சராசரி காண்க.

$$\bar{x} = \frac{10 + 12 + 14 + 17 + 18}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{71}{5} = 14.2$$

மேலே கண்ட முறை மாறியின் தனித்த மதிப்புகள் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால் $\bar{x}$ காண உதவுகின்றது. இதற்கு மாறாக நிகழ்வெண் பரவலாக விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் மேற்கூறிய முறை பயன்படாது. வெண்பரவலில் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள நிகழ்வெண்கள் பிரிவின் மையப் புள்ளிகளைச் சார்ந்தவை எனக் கருதப்படுகின்றன. ஆகவே பிரிவின் மையப் புள்ளிகளை நாம் $x_1, x_2, \ldots x_n$ எனக்கருதவேண்டும் முறையே அவைகளின் நிகழ்வெண்களை

$f_1\ f_2 \ldots f_n$ எனக்கருத கொண்டால் $\bar{x}$ கீழ்க்கண்டவாறும் காணலாம்.

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n}$$

இதைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum f_r\, x_r \qquad N_1 = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + fx$$

உ-ம்

கீழ்க்காணும் விவரத்தின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்
10—20	4
20—30	6
30—40	10
40—50	12
50—60	8
60—70	7
70—80	3

பிரிவுகள்	நிகழ்வெண்	x நடு எண்	fxx
10—10	4	15	60
20—30	6	25	150
30—40	10	35	50
40—50	12	45	540
50—60	8	55	440
60—70	7	65	455
70—80	3	75	225

$\Sigma f = 50 \quad \Sigma f x = 2220$

$$\therefore \bar{x} = \frac{2220}{50}$$

$$= 44.4$$

சுருக்குவழி ;

நிகழ்வெண்களோ, அல்லது பிரிவின் நடுப்புள்ளிகளோ பெரிய எண்களாக அமையுமாயின் மேற்கூறிய முறை கடினமாக இருக்கும். ஆகவே கீழ்வரும் சுருக்குமுறை கொடுக்கப்படுகின்றது. ஏதாவது ஒரு மைய மதிப்பினை ஒரு மூல மதிப்பாக எடுத்துக் கொள்ளலாம் (A) பிறகு

$\left[\frac{x-A}{C} \right]$ கணக்கிடலாம் இதை d என்போம்.

இங்கு C என்ற பிரிவின் இடைவெளி

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \times C$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலே கண்ட உதாரணத்திற்கே இம்முறையைச் செய்வோம்.

பிரிவுகள்	f நிகழ்வெண்	x நடுஎண்	d	f×d
10—20	4	15	—3	12
20—30	6	25	—2	—12
30—40	10	35	—1	—10
40—50	12	45	0	0
50—60	8	55	1	8
60—70	7	6	2	14
70—80	3	75	3	9

இங்கு நாம் 45 என்பதை மூல எண்ணாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$x = 35$ எனில் $d = -1$

$x = 25$ எனில் $d = -2$

$x = 15$ எனில் $d = -3$

$x = 55$ எனில் $d = 1$

$x = 65$ எனில் $d = 2$

$x = 75$ எனில் $d = 3$

அட்டவணைத் தயார் செய்க.

$$\Sigma fi\, di = -34 + 31$$
$$= -3$$

$$\therefore \bar{x} = A + \frac{\Sigma fi\, di}{\Sigma fi} + c$$

$$= 45 + \left(\frac{-3}{50} \times 10 \right)$$

$$= 45 - 0.6 = 44.4$$

பெருக்குதல் எளிதாக இருப்பதால் இம்முறை சுருக்கு முறை எனப்படுகின்றது.

இடைநிலை அளவு :

x ன் தனித்த மதிப்புகளின் n மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இவற்றை ஏறு வரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைக்கும்போது நடுவில் அமையும் உறுப்பு இடைநிலை அளவு என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

அதாவது இடைநிலை அளவானது ஒரு பாதி மாதிகளை விட மதிப்பில் கூடியதாகவும் மறுபாதி மாதிகளைவிட மதிப்பில் குறைந்ததாகவும் இருக்கும்.

n என்பது ஒற்றைப்படை எண் என்றால் இடைநிலை அளவு ஒரு உறுப்பாக அமையும். உதாரணமாக x ன் 7 மதிப்புகளை எடுத்துக் கொண்டால் அவற்றை ஏறுவரிசையில் அமைத்த பிறகு கிடைக்கும் 4வது உறுப்பே இடைநிலை அளவாகும்.

n என்பது இரட்டைப்படை எண் என்றால் இடைநிலை அளவு இரண்டு நடு உறுப்புகளின் சராசரியாக அமையும். உதாரணமாக x ன் 10 மதிப்புகளை எடுத்துக்கொண்டால் அவற்றை ஏறுவரிசையில் அமைத்த பிறகு முறையே 5வது 6வது உறுப்புகள் நடு உறுப்புகளாக அமையும். இவ்விரண்டு உறுப்புகளின் மதிப்பைக் கூட்டி கிடைப்பதை 2ஆல் வகுத்து வரும் விடையே இடைநிலை அளவு ஆகும்.

உ-ம் 1

8, 7, 12, 14, 9, 6, 22 இவற்றின் இடைநிலை அளவு காண்க.

முதலில் மாறிகளை ஏறு வரிசையில் அமைத்துக் கொள்வோம்.

6, 7, 8, 9, 12, 14, 2.

இதில் 7 எண்கள் உள்ளன. ஆகவே 4வது உறுப்பான 9 இடைநிலை அளவாகும்.

உ-ம். 2

40, 44, 37, 61, 54, 62, 72, 55 இவற்றின் இடைநிலை அளவு காண்க.

ஏறு வரிசையில் அமைக்க

37, 40 44, 54, 55, 61, 62, 72

இதில் 8 உறுப்புக்கள் இருக்கின்றன. ஆகவே 4வது 5வது உறுப்புக்களின் சராசரியே இடைநிலை அளவு ஆகும்.

$$\text{இடை நிலை அளவு} = \frac{54+55}{2}$$

$$= \frac{109}{2} = 54.5$$

இனி நிகழ்வெண் பரவலாக கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் இடை நிலை அளவு எந்தப் பிரிவில் விழுகின்றது என்று காண்போம். அலைவெண்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் மொத்தம் எத்தனை நிகழ்வெண்கள் (அலைவெண்கள்) உள்ளன எனக் காண வேண்டும். மொத்த நிகழ்வெண் N என்க. அதில் பாதி $\frac{N}{2}$ ஆகவே $\frac{N}{2}$ ஆவது நிகழ்வெண் எந்தப்பிரிவில் விழுகின்றது எனக் காணவேண்டும். அந்தப் பிரிவே இடைநிலை அளவு விழும் பிரிவு ஆகும். இதில் அட்டவணையில் குவிவு அலைவெண் என்ற ஒரு பட்டியல் தயார் செய்ய வேண்டும் $\frac{N}{2}$ விழும் பிரிவை சுலபமாகக் கணிக்க முடியும். இதைக் கீழ்க்காணும் உதாரணத்தின் மூலம் எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம்.

√-ம் இடைநிலை அளவு விழும் பிரிவைக் காண்க.

பிரிவுகள்	அலைவெண்	குவிவு அலைவெண்
0—10	7	7
10—20	10	17
20—30	12	29
30—40	15	44
40—50	9	53
50—60	6	59
60—70	5	64

$\rightarrow \frac{N}{2} = 32$

குவிவு அலைவெண் அமைக்கும்போது $<10;\ <20;\ <30;\ldots<70$ என்று கணக்கிட வேண்டும். மொத்த அலை வெண்கள் 64. ஆகவே $N = 64$

(iv) $\frac{N}{2} = \frac{64}{2} = 32$ ஆகின்றது. 32வது அலைவெண் 30—40 என்ற பிரிவில் உள்ளது. ஆகவே இடைநிலை அளவின் பிரிவு 30—40 ஆகும்.

முகடு :

x என்னும் மாறி n மதிப்புக்களை எடுத்துக் கொள்கிறது என்று வைத்துக் கொள்வோம். இதில் சில மதிப்புக்கள் திரும்பத் திரும்ப வரலாம். மிக அதிக தடவைகள் தோன்றும் மதிப்பே முகடு என வரையறுக்கப்படுகின்றது. அதாவது மிகப்பெரிய அலைவெண் உடைய மதிப்பு முகடு ஆகும்.

நிகழ்வெண் பரவலாகக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், மிகப்பெரிய அலைவெண் உடைய பிரிவே முகட்டின் பிரிவு எனப்படும்.

உ. ம் 1

4, 3, 4, 3, 6, 3, 5, 4, 3, 4, 4, 5, 4 இவ்விவரத்தின் முகடு, காண்க

இவ்விவரத்தில் 4 என்னும் மாறி அதிகத் தடவைகள் நிகழ்ந்திருக்கின்றது. ஆகவே 4 என்பது முகடு ஆகும்.

உ. ம். 2

முகடு அமையும் பிரிவைக் காண்க.

பிரிவு	அலைவெண்
0—5	12
5—10	17
10—15	22
15—20	21
20—25	14
25—30	13
30—35	9

முகடு பிரிவு

22என்பது மிகப்பெரிய அளவையெண்ணாகும். அதற்கு ஏற்ற 10—15 என்ற பிரிவு முகட்டின் பிரிவாகும்.

கூட்டுச் சராசரி இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியவை மையப் போக்கு அளவைகள் எனப்படும். (Measures of centarl tendency)

திட்ட விலக்கம் :

நாம் ஏற்கனவே படித்த சராசரிகள் பரவலின் போக்கைப் பற்றி நமக்குத் தெரிவிக்கின்றன. சில சமயங்களில் இரண்டு மாறிகளின் சராசரி சமமாக இருக்கலாம். ஆனால் அவை பண்புகளில் வேறுபட்டிருக்கலாம், சராசரியின் மூலம் மாறிகளின் பண்பைப் பற்றி நாம்ஏதும் அறிந்து கொள்ள முடியாது. இரண்டு X, Y. ஐ எடுத்து கொள்வோம்

X	Y
40	37
45	41
52	40
38	39
25	43
200	200

இரண்டு மாறிகளின் சராசரியும் சமம். அதாவது

$\bar{X} = 40$; $\bar{Y} = 40$ ஆனால் இரண்டு மாறிகளும் பரவியுள்ள விதம் மாறுபட்டுள்ளது அதாவது X என்னும் மாறியின் மிகச் சிறிய மதிப்பு 25 மிகப்பெரியமதிப்பு 52Yல் மிகச்சிறிய மதிப்பு 37, மிகப்பெரிய மதிப்பு 43 இதிலிருந்துXல் மாறிகள் கூட்டுச்சராசரியை விட்டு அதிகம் விலகி இருக்கின்றன என்றும், Yல் மாறிகள் கூட்டுச்சராசரிக்கு நெருக்கமாக அமைந்துள்ளனவும் அறிகின்றோம். இப்பண்பை பற்றி அறிந்து கொள்ள "சிதறல் அளவைகள்"; பயன்படுகின்றன. சிதறல் அளவைகள் பல இருப்பினும் அவற்றுள் 'திட்டவிலக்கம்' என்பது மிகமுக்கியமானது. திட்டவிலக்கம் எனக் கொடுக்கப்படாத மாறிகளின் (தொகுக்கப் படாத மாறிகளின்) திட்டவிலக்கம் காணும் முறையைக் காண்போம்.

வரையறை :

திட்டவிலக்கம் காண பின்வரும் முறை கையாளப்படுகிறது.

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பன X என்னும் மாறியின் n மதிப்புகள் என்க. முதலில் $\bar{x}$ காணவேண்டும். பிறகு $(x - \bar{x})$ காண வேண்டும். இவை di குறிக்கின்றோம். இவை மிகைக்குறி, குறைக்குறி பெற்றிருக்கும். குறைக்குறியை நீக்குவதற்காக di^2 காணுகின்றோம்.

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது

$$s = \sqrt{\frac{\sum di^2}{n}}$$ ஆகும்

$$s^2 = \frac{\sum di^2}{n}$$ ஆகும். இது "மாறுபாடு" அல்லது "விலக்க வர்க்கச் சராசரி" என அழைக்கப்படுகின்றது.

உ-ம்.

4, 5, 6, 11, 3 இம்மாறிகளின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

$$\bar{x} = \frac{4 + 5 + 7 + 11 + 3}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

பிறகு கீழ்வரும் அட்டவணையை அமைப்போம்.

x	$x - \bar{x} = di$	di^2
4	−2	4
5	−1	1
5	−1	1
7	1	1
11	5	25
3	−3	9

$\Sigma = di^2 = 40$

வரையறைப்படி

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma di^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8}$$

$$s = \sqrt{8}$$

திட்டவிலக்கம் எப்போதும் மிகைக் குறியை உடையது.

பயிற்சி :

1. கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலைப் பிரிவு முகட்டுப் பிரிவு காண்க:

பிரிவு	அலைவெண்
8	4
9—17	7
18—26	10
27—35	11
36-44	9
45—53	6
54—62	4

பிரிவு	அலைவெண்
15—25	12
25—35	6
35—45	19
45—55	21
55—65	15
65—75	10
75—85	7

I) திட்ட விலக்கம் காண்க :

3) 7, 9, 12, 14, 18

4) 9, 12, 16, 17, 19

I) விடைகள்

1) 30.47
2) 46.9
3) 3.83
4) 43.54

Time : 1½ hrs **Marks 100**

Lessons : 13, 14, 15, 16.

1) புள்ளியியலின் முக்கியத்துவத்தையும் அது பயன்படும் துறைகளைப் பற்றியும் விரிவாக எழுதுக.

2) தகுந்த பிரிவு இடைவெளி எடுத்துக் கொண்டு ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியல் தயார் செய்க.

25	60	30	35	35
20	40	40	45	35
45	45	50	25	25
60	68	60	40	30
30	20	78	35	40
70	75	45	25	35
35	35	30	55	48
50	48	68	45	45

2) செவ்வகப் பரவல் வரைக.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
25 – 30	5
30 – 35	15
35 – 40	23
40 – 45	20
45 – 50	10
50 – 55	7

(iii)

4) நிகழ்வெண் பலகோணம், நிகழ்வெண் வளைவு வரைக.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
30—40	4
40—50	5
50—60	12
60—70	14
70—80	9
80—90	6

5) கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலைப்பிரிவு, முகடுப்பிரிவு காண்க.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
20—25	3
25—30	20
30—35	53
35—40	43
40—45	42
45—50	41
50—55	33

6) திட்டவிலக்கம் காண்க.
60, 64, 66, 63, 68.