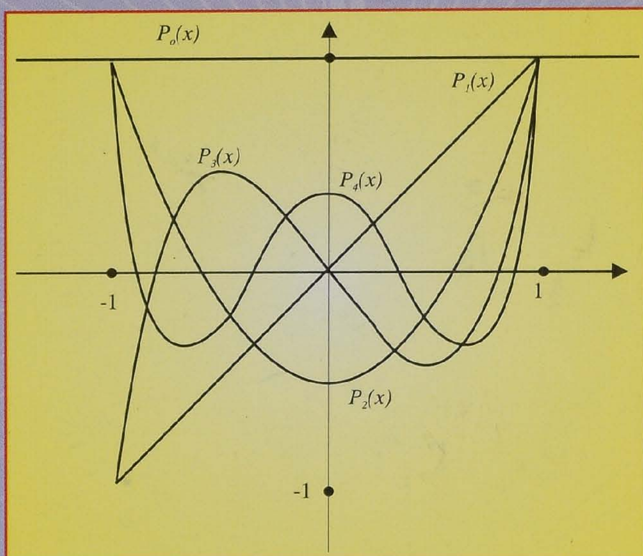
பொதுமுறை வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்



பேரா. சீனி. செல்வரங்கம்

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை - 600 005.

பொதுமுறை வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்

பேரா.சீனி.செல்வரங்கம்

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை - 600 005.

முதற்பதிப்பு : 2011

பதிப்புரிமை : தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை – 600 005.

நூலின் பெயர் : பொதுமுறை வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்

நூலாசிரியர் : பேரா.சீனி.செல்வரங்கம்,
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்,
கணிதத்துறை,
மாநிலக்கல்லூரி (தன்னாட்சி),
சென்னை – 600 005.

MADURAI KAMARAJ UNIVERSITY LIBRARY
299105

மறு ஆய்வு செய்தவர் : முனைவர் ஏ. தண்டபாணி,
பேராசிரியர்,
இராமானுஜன் கணிதவியல் மேம்பாட்டு நிறுவனம்,
சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்,
சென்னை – 600 005.

தமிழ் திருத்தம் செய்தவர் : பேரா. மு. விஜயா,
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்,
கணிதவியல் துறை,
டாக்டர் அம்பேத்கார் அரசுக் கலைக் கல்லூரி,
வியாசர்பாடி
சென்னை – 600 039.

விலை : ரூ. 61.00

அச்சிட்டோர் : பவர்மேன் பிரிண்டர்ஸ்,
எண்.6/15, டாக்டர் ராதாகிருஷ்ணன் நகர்,
3வது தெரு, கொருக்குப்பேட்டை
சென்னை – 600 021.
செல் : 98846 99888

Syllabus

Ordinary Differential Equations

Unit I : Introduction- Second Order linear equations – general solutions of homogeneous equation- The use of one known solution to find anothor- The method of variation of parameters.

Unit II : Power Serieos solutions- series of solutions of first order equations – second order linear equations-ordinary points- regular singular points- Gauss's hypergeometric equations- The point at infinity.

Unit III : Special functions of Mathematical Physics- Legendre polynomials- Bessel functions- Gamma function- Properties of Legendre polynomials- Bessel functions.

Unit IV : Linear systems of first order equations- Homogeneous equations with constant coefficients- Homogeneous equations of order n- The existence and uniqueness of solutions

Unit V : The solution of initial value problem of first order differential equations- The method of successive approximations and Picard's theorem.

பொருளடக்கம்

முன்னுரை

அலகு - I

1. இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக் கெழு சமன்பாடுகள்
   Second order linear differential equation

2. ஒரு படித்தான சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்
   Solutions of homogeneous equations

3. தெரிந்த ஒரு தீர்விலிருந்து மற்ற தீர்வுகளைக் காணுதல்.
   From a known solution, finding other solutions

4. துணை அலகுமுறை.
   Method of variation of parameters

அலகு -II

5. அடுக்குக் குறி தொடர்- மீள்பார்வை.
   Review of power series

6. முதல்வரிசைச் சமன்பாட்டின் அடுக்குக்குறி தீர்வுகள்.
   Series solutions of first order equations

7. இரண்டாம் வரிசை நேரிய சமன்பாடுகள் - சாதாரண புள்ளிகள்.
   Second order linear equations- ordinary points

8. ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளிகள்- I
   Regular singular points- I

9. ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளிகள்- II
   Regular singular points- II

10. காஸின் அதிவரைகணித சமன்பாடு.
    Gauss's hypergeometric equations

11. முடிவிலி புள்ளி
    The point at infinity

அலகு -III

12. கணித இயற்பியலின் சில சிறப்புச் சார்புகள்.
Some special functions of Mathematical Physcis

13. லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பண்புகள்.
Properties of Legendre polynomials

14. பெசல் சார்புகள்- காமா சார்பு.
Bessel functions- Gamma function

15. பெசல் சார்புகளின் பண்புகள்.
Properties of Bessel functions

அலகு -IV

16. முதல் வரிசை நேரியல் சமன்பாடுகள்.
First order linear equations

17. நேரியல் சமன்பாட்டு தொகுப்பு.
Linear system of Equations.

18. மாறிலி கெழுக்களைக் கொண்ட ஒருபடித்தான நேரியல் சமன்பாட்டு தொகுப்பு.
Homogeneous linear system with constant coefficients

19. $n-$ வரிசை ஒருபடித்தான சமன்பாடுகள்.
Homogeneous equation of order n

அலகு -V

20. தீர்வுகளின் இருத்தலும் தனித்தன்மையும்.
Existence and uniqueness of solutions

21. பிக்கார்டின் தேற்றம்
Picard's theorem.

பொதுமுறை வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்

முன்னுரை

ஒரு சமன்பாட்டில் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சாரா மாறிகளை(தனித்த மாறிகளை) சார்ந்த ஒரு மாறியும் அதன் வகையீடுகளும் இருப்பின் அச்சமன்பாட்டை வகைக்கெழு சமன்பாடு என்போம். இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல் மற்றும் வானியல் போன்றவற்றில் பெரும்பாலான இயற்கை விதிகள் வகைக்கெழு சமன்பாடுகளாகவே அமைகின்றன. $y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சார்பு எனில் $\frac{dy}{dx}$ ஆனது x ஐப் பொறுத்து $y-$ ன் மாறுபாடு ஆகும். எந்தவொரு இயற்கை விதிமுறையிலும் ஈடுபடும் மாறிகள் மற்றும் அவற்றின் மாறுபாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று அடிப்படை அறிவியல் கொள்கைகள் மூலம் தொடர்புடையன. இந்த அடிப்படை அறிவியல் கொள்கைகள் இயற்கை விதிமுறைகளை கட்டுப்படுத்துகின்றன. இந்த ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்புகளை கணித குறியீடுகளால் விவரிக்கும் போது கிடைப்பனவே வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக நியுட்டனின் இரண்டாவது இயக்க விதிப்படி m நிறையுடைய பொருளின் முடுக்கம் a ஆனது அப்பொருளின் மீது செயல்படும் மொத்த விசைக்கு நேர்விகிதத்தில் அமையும். அதாவது $a \propto F$. விகிதமாறிலியை $\frac{1}{m}$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$F = ma \qquad (1)$$

எனக் கிடைக்கும்.

m நிறையுடைய பொருளானது புவியீர்ப்பு விசையால் தானாக கீழே விழுவதாக எடுத்துக் கொள்வோம். இந்நிலையில் பொருளின் மீது செயல்படும் ஒரே விசை mg ஆகும். இங்கு g என்பது புவியீர்ப்பு முடுக்கம் ஆகும். மேலும் ஒரு குறிப்பட்ட உயரத்தில் இருந்து, அப்பொருளானது y உயரம் (தூரம்) கீழ்நோக்கி வரும் போது அதன் முடுக்கம் $\frac{d^2y}{dt^2}$ ஆகும். எனவே $F = ma$ என்ற சமன்பாடு $mg = m\frac{d^2y}{dt^2}$ என ஆகிறது. அதாவது

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g. \tag{2}$$

இப்போது மேலிருந்து கீழ் நோக்கி வரும் பொருளின் மீது காற்றினால் ஏற்படும் தடுப்பு விசை அப்பொருளின் திசை வேகத்திற்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும்.

இந்நிலையில் பொருளின் மீது செயல்படும் மொத்த விசை $mg - k\frac{dy}{dt}$ ஆகும். எனவே சமன்பாடு (1) ஆனது

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt} \tag{3}$$

என ஆகிறது.

சமன்பாடுகள் (2) மற்றும் (3) ஆகியன நாம் எடுத்துக்கொண்ட இயற்பியல் செயல்முறையின் முக்கிய பண்பை விளக்கும் வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் ஆகும்.

இது போலவே பின்வரும் சமன்பாடுகளும் வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் ஆகும்.

$$\frac{dy}{dt} = ky; \tag{4}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky; \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}; \tag{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0; \qquad (7)$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+p(p+1)y=0; \qquad (8)$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0. \qquad (9)$$

மேற்கண்டசமன்பாடுகளில் x அல்லது t என்பன சாரா மாறிகளாகும், y ஆனது x அல்லது t-யைச் சார்ந்த மாறியாகும். மேலும் k, m, p ஆகியன மாறிலிகள். பொதுவான வகைக்கெழு சமன்பாட்டில் ஒரேயொரு சாரா மாறியும் அதன் பொதுவான வகையீடுகளும் மட்டுமே உண்டு.

ஒரு வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் வரிசை என்பது அச்சமன்பாட்டில் உள்ள அதிகப்படியான வகையீட்டின் வரிசை ஆகும். மேற்கண்ட சமன்பாடுகளில் (4) மற்றும் (6) ஆகியவற்றின் இன் வரிசை ஒன்று . மேலும் (5), (7), (8), மற்றும் (9) ஆகியவற்றின் வரிசை இரண்டு ஆகும். சமன்பாடு (8) மற்றும் (9) ஆகியன முறையே லெஜண்டர் (Legendre) - சமன்பாடு மற்றும் பெசல் (Bessel) சமன்பாடு எனப்படும்.

பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு என்பது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சாரா மாறிகளையும், அவற்றின் பகுதி வகையீடுகளையும் கொண்ட சமன்பாடு ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக $w = f(x, y, z, t)$ என்பது அண்டவெளியில் உள்ள ஒரு புள்ளியின் செவ்வக கூறுகள் மற்றும் காலத்தை பொறுத்த சார்பு எனில் பின்வரும் பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் வரிசை இரண்டு உடைய சமன்பாடுகள் ஆகும்.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் முறையே லாப்லாஸ் சமன்பாடு (Laplace equation), வெப்ப சமன்பாடு (Heat equation) மற்றும் அலை சமன்பாடு (Wave equation) ஆகும்.

அலகு-I

அத்தியாயம் 1

இரண்டாம் வரிசை நேரியியல் வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்

(Second order linear differential equations)

இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் பொதுவான வடிவம்

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)$$

ஆகும். மேற்கண்ட சமன்பாட்டை

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \qquad (1)$$

என்ற எளிமையான வடிவில் எழுதலாம். இங்கு $P(x), Q(x)$ மற்றும் $R(x)$ ஆகியன x-இன் சார்புகளாகவோ அல்லது மாறிலிகளாகவோ இருக்கலாம். மேலும் y'' இன் குணகம் 1 என எடுத்துக் கொள்வதில் எந்தவிதமான குறையும் இல்லை. ஏனெனில், அவ்வாறு இல்லையெனில் சமன்பாட்டின் இருபுறமும் y'' இன் குணகத்தால் வகுத்தால் நமக்கு y'' இன் குணகம் 1 எனக் கிடைக்கும். இந்த வகை சமன்பாடுகள் இயற்பியலில் முக்கிய பங்காற்றுகின்றன. குறிப்பாக இயந்திரவியலில் அதிர்வுகள் மற்றும் மின்சுற்று கொள்கைகளில் அதிக முக்கியத்துவம் உடையன.

முதல் வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாடுகளை சூத்திரங்கள் மூலம் தீர்த்துவிடலாம் என்று தவறான வழிகாட்டலுக்கு நாம் ஆளாகக் கூடாது. பொதுவாக சமன்பாடு (1) ஐ தெரிந்த எளிய

சார்புகளில் மட்டுமே முழுமையாக தீர்க்க முடியாது. இச்சமன்பாடுகளின் தீர்வை காண பொதுவாக முடிவிலி தொடர் தேவைப்படுகிறது.

இப்பாடத்தில் $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ ஆகியன மாறிலிகளாக உள்ள போது சமன்பாடு (1) ஐ தீர்க்கும் முறையை விரிவாக காணலாம். மேலும் இம்முறையை உயர்வரிசை சமன்பாடுகளுக்கு எவ்வாறு விரிவுபடுத்தலாம் என்பதையும் காண்போம்.

தேற்றம் 1. $P(x), Q(x)$ மற்றும் $R(x)$ ஆகியன மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ இல் தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் என்க. x_0 என்பது $[a,b]$ இல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி மற்றும் y_0, y_0' என்பன ஏதேனும் இரு எண்கள் எனில்

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

என்ற சமன்பாடு, $y(x_0) = y_0$ மற்றும் $y'(x_0) = y_0'$ என்றவாறு ஒரே ஒரு தீர்வு $y(x)$ ஐ மட்டுமே கொண்டிருக்கும்.

தேற்றத்தில் குறிப்பிட்ட எடுகோள்களுக்கு இணங்க $x_0 \in [a,b]$ என்ற எந்த ஒரு புள்ளியிலும் $y(x)$ மற்றும் $y'(x)$ க்கு எதேச்சை மதிப்புகளை அளிக்கலாம். இந்நிலையில் சமன்பாடு (1) -க்கு இடைவெளி $[a,b]$ இன் மீது ஒரேயொரு தீர்வு உண்டு. மேலும் அத்தீர்வு கொடுக்கபட்ட புள்ளியில் முன்னர் அளிக்கப்பட்ட மதிப்பினை பெறும். அதாவது $[a,b]$ இன் மீது சமன்பாடு (1)க்கு ஒருமைத் தீர்வு [ஒரேயொரு தீர்வு] மட்டுமே உண்டு. மேலும் சமன்பாடு (1) ஆனது (x_0, y_0) என்ற குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியாக, குறிப்பிட்ட சாய்வு y_0' – உடன் செல்லும்.

சமன்பாடு (1) இல் உள்ள $R(x)$ என்ற உறுப்பு மற்ற உறுப்புகளில் இருந்து தனித்து காட்டப்பட்டு சமன்பாட்டின் வலது பக்கத்தில் எழுதப்படுகிறது. ஏனெனில் $R(x)$ ஆனது சாரா மாறி y அல்லது அதன் வகையீடுகளை கொண்டிருக்கவில்லை.

$R(x)$, பூச்சியத்திற்கு சமம் எனில் சமன்பாடு (1) இன் வடிவம்

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{2}$$

என அமையும். சமன்பாடு (2) ஆனது ஒருபடித்தான சமன்பாடு எனப்படும். $R(x)$, பூச்சியத்திற்கு சமம் இல்லை எனில் ஒருபடித்தான சமன்பாடு அல்ல எனப்படும். சமன்பாடு (2) ஐப் பற்றி படிக்க சமன்பாடு (1) அவசியமாகிறது. இதற்கு காரணம் பின்வரும் தேற்றத்தின் மூலம் அறியலாம்.

தேற்றம் 2. $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ இன் பொதுவான தீர்வு y_g மற்றும் $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ இன் ஏதேனும் ஒரு சிறப்புத்தீர்வு y_p எனில் $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ இன் பொதுவான தீர்வு y_g+y_p ஆகும்.

நிறுவல்: ஏதேனும் ஒரு வழியில் சமன்பாடு (2) இன் பொதுவான தீர்வு $y_g(x,c_1,c_2)$ என அறிவோம். ஆனால் அது இரண்டு மாறிலிகளை கொண்டதாக இருக்கும். ஏனெனில் சமன்பாடு (2) ஆனது இரண்டாம் வரிசை சமன்பாடு ஆகும். மேலும் $y_p(x)$ என்பது சமன்பாடு (1) இன் நிலையான சிறப்புத் தீர்வு ஆகும். சமன்பாடு (1) இன் ஏதேனும் ஒரு தீர்வு $y(x)$ எனில் $y(x)-y_p(x)$ ஆனது சமன்பாடு (2) இன் தீர்வு ஆகும். ஏனெனில்

$$(y-y_p)''+P(x)(y-y_p)'+Q(x)(y-y_p)$$
$$=\left[y''+P(x)y'+Q(x)y\right]-\left[y_p''+P(x)y_p'+Q(x)y_p\right]$$
$$=R(x)-R(x)=0 \qquad (3)$$

சமன்பாடு (2) இன் பொதுவான தீர்வு $y_g(x,c_1,c_2)$ என்பதால்

$$y(x)-y_p(x)=y_g(x,c_1,c_2)$$

அல்லது தகுந்த c_1,c_2 வின் நேர்வுகளுக்கு இணங்க $y(x)=y_g(x,c_1,c_2)+y_p(x)$ என எழுதலாம்.

சமன்பாடு (2) இன் பொதுவான தீர்வு y_g இன் அமைப்பையும் அதனை வெவ்வேறு வழிகளில் எவ்வாறு காண்பது என்பதையும் இனி அறிய முற்படுவோம்.

எல்லா x க்கும், $y(x)=0$ எனில் $y(x)=0$ என்பது

ஒரு படித்தான சமன்பாடு (2) இன் ஒரு தீர்வு ஆகும். இத்தீர்வு அற்பத்தீர்வு எனப்படும். இத்தீர்வு எந்த விதத்திலும் முக்கியத்துவம் பெற்றது அல்ல. சமன்பாடு (2) இன் தீர்வுகளின் அடிப்படை அமைப்பின் உண்மையை பின்வரும் தேற்றதின் மூலம் அறிவோம்.

தேற்றம் 3. $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ இன் ஏதேனும் இரு தீர்வுகள் $y_1(x)$ மற்றும் $y_2(x)$ எனில் $c_1y(x)+c_2y(x)$ யும் $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ இன் ஒரு தீர்வு ஆகும். இங்கு c_1 மற்றும் c_2 ஆகியன ஏதேனும் இரு மாறிலிகள்.

நிறுவல்: $y_1(x)$ மற்றும் $y_2(x)$ ஆகியன $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ இன் இரு தீர்வுகள் என்பதால்

$$y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1=0$$

மற்றும்

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

ஆகும்.

இப்போது

$$\left(c_1y_1 + c_2y_2\right)'' + P(x)\left(c_1y_1 + c_2y_2\right)' + Q(x)\left(c_1y_1 + c_2y_2\right) \text{ ஐ}$$

எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}(c_1y_1 + c_2y_2)'' + P(x)\left(c_1y_1 + c_2y_2\right)' + Q(x)\left(c_1y_1 + c_2y_2\right)\\ = c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1P(x)y_1' + c_2P(x)y_2' + c_1Q(x)y_1 + c_2Q(x)y_2\\ = c_1\left(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\right) + c_2\left(y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2\right)\\ = c_1(0) + c_2(0)\\ = 0.\end{aligned}$$

எனவே $c_1y_1 + c_2y_2$ – ம் $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ இன் ஒரு தீர்வு ஆகும்.

குறிப்பு : மேற்கண்ட தேற்றத்திலிருந்து நாம் அறிவது என்னவெனில் சமன்பாடு (2) இன் இரு தீர்வுகள் y_1 மற்றும் y_2 எனில் அத்தீர்வுகளின் நேரியச் சேர்க்கை $c_1y_1 + c_2y_2$ – ம் சமன்பாடு (2) இன் ஒரு தீர்வு ஆகும். எனவே தேற்றம் 3 ஐ பின்வருமாறு கூறலாம். சமன்பாடு (2) இன் எந்த இரண்டு தீர்வுகளின் நேரிய சேர்க்கையும் அதற்கு ஒரு தீர்வு ஆகும். எனவே சமன்பாடு (2) இன் ஏதேனும் இரு தீர்வுகளை ஏதேனும் ஒரு வழியில் நாம் கண்டுபிடிக்க முடிந்தால் அதன் பொதுத் தீர்வை காணமுடியும். அப்பொதுவான தீர்வு இரண்டு மாறிலிகளை உள்ளடக்கியது, ஏனெனில் சமன்பாடு (2) என்பது ஒரு இரண்டாம் வரிசை சமன்பாடு ஆகும்.

இதில் ஒரு கடினம் என்னவெனில் y_1 அல்லது y_2 மற்றதின்

பெருக்கலாக இருப்பின், அதாவது $y_1 = ky_2$ எனில்,

$$c_1y_1+c_2y_2 = c_1ky_2 + c_2y_2 = (c_1k + c_2) = cy_2$$

ஆகும். அதாவது பொதுவான தீர்வு ஒரே ஒரு மாறிலியை மட்டும் கொண்டிருக்கும். இதன் அடிப்படையில் (2) இன் தீர்வுகள் y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன ஒன்று மற்றொன்றின் பெருக்கல் இல்லையென எடுத்துக்கொண்டால் $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ ஆனது (2) இன் பொதுவான தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்க்க: $y'' = e^x$.

தீர்வு: $y''=0$ என்ற ஒருபடித்தான சமன்பாட்டை கருதுவோம். இச்சமன்பாட்டின் பொதுவான தீர்வு c_1x+c_2 என நாம் எளிதாக அறியலாம்.

அதாவது, $y_g(x,c_1,c_2)=c_1x+c_2$.

$y''=e^x$ இன் சிறப்புத்தீர்வு e^x ஆகும்.

அதாவது, $y_p(x)=e^x$.

எனவே, $y''=e^x$ இன் பொதுவான தீர்வு

$$y(x)=y_g(x,c_1,c_2)+y_p(x)$$
$$=c_1x+c_2+e^x.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்க்க: $y=c_1x+c_2x^2$ என்ற வளைவரை குடும்பத்துக்கு c_1 மற்றும் c_2 – ஐ நீக்குதல் மூலம் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு:

$$y = c_1 x + c_2 x^2. \qquad (1)$$

இருபுறமும் x ஐப் பொறுத்து வகையிட

$$y' = c_1 + 2c_2 x \qquad (2)$$

மற்றும்

$$y'' = 2c_2. \qquad (3)$$

(2) மற்றும் (3) இலிருந்து, $c_2 = \dfrac{y''}{2}$ மற்றும்

$$c_1 = y' - y''x$$

எனக் கிடைக்கிறது.

c_1 மற்றும் c_2 இன் மதிப்புகளை (1) இல் பிரதியிட

$$y = (y' - y''x)x + \frac{y''}{2}x^2$$

$$2y = 2y'x - 2y''x^2 + y''x^2$$

அதாவது, $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$

இதுவே தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

பயிற்சி-1

1. பின்வருவனவற்றுக்கு சிறப்பு தீர்வுகள் காண்க.

   (a) $x^3 y'' + x^2 y' + xy = 1;$

   (b) $y'' - 2y' = 6;$

   (c) $y'' - 2y' = \sin x$

2. பின்வரும் வளைவரை குடும்பங்களுக்கு எதேச்சை மாறிகளை நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(a) $y = c_1 x + c_2 x^2$

(b) $y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$

(c) $y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$

3. பூஜ்ஜியத்தை உள்ளடக்காத இடைவெளி $[a,b]$ இன் மீது $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^5$ ஆனது $x^2 y'' - 3xy' - 5y = 0$ இன் ஒரு தீர்வு என்பதை சரிபார்.

4. $x^2 y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0$ மற்றும் $y(0) = 0, y'(0) = 0$ வின் இரு தீர்வுகள் $y = x^2 \sin x$ மேலும் $y = 0$ எனக் காட்டு. இது தேற்றம் 1 க்கு முரணானதா? அப்படி இல்லை எனில் ஏன் இல்லை எனக் கூறவும்.

அத்தியாயம் 2

ஒரு படித்தான சமன்பாடுகளின் பொதுவான தீர்வுகள்

(The general solutions of the homogeneous equations)

மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ இன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட இரு சார்புகள் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று மற்றொன்றின் மாறிலி பெருக்கமாக(திசையிலி பெருக்கம்) அமைந்தால் அவை இரண்டும் $[a,b]$ இன் மீது ஒன்றையொன்று சார்ந்த சார்புகள் என்போம். அவ்வாறு இல்லை எனில் அவை ஒன்றையொன்று சாராத சார்புகள் எனப்படும். குறிப்பாக $f(x)$ ஆனது முழுவதும் பூஜ்ஜிய சார்பு எனில் (அதாவது $f(x)=0$, எல்லா $x\in[a,b]$ க்கும்), $g(x)$ என்பது $[a,b]$ இன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட எந்தவொரு சார்பாயிலும் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சார்ந்த சார்புகள் ஆகும். ஏனெனில் $f(x)=0=0\cdot g(x)$.

குறிப்பு: மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ இன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளில் ஏதேனும் ஒன்று பூஜ்ஜிய சார்பு எனில் அச்சார்புகள் $[a,b]$ இன் மீது ஒன்றையொன்று சார்ந்த சார்புகள் ஆகும்.

வரையறை: $y_1(x), y_2(x)$ என்பது மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ இன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஏதேனும் இரு சார்புகள் எனில் அவற்றின் ரான்ஸ்கியான்(Wronskian) என்பது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் அது $W(y_1, y_2)$ என குறிப்பிடப்படுகிறது.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

துணைத்தேற்றம் 1.

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின், $[a,b]$ இன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஏதேனும் இரு தீர்வுகள் $y_1(x), y_2(x)$ எனில் அவற்றின் ரான்ஸ்கியான்(Wronskian) $W = W(y_1, y_2)$ முழுவதும் பூஜ்ஜியம் அல்லது எப்போதும் பூஜ்ஜியம் அல்ல.

நிரூபணம்: $W = 0$ எனில் தேற்றம் வெளிப்படையாக நிருவலாகிறது. அவ்வாறு இல்லை என்போம்.

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$\begin{aligned} W' &= y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2 y_1'' - y_1' y_2' \\ &= y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \end{aligned}$$

y_1, y_2 ஆகியன $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ இன் இரு மூலங்கள் என்பதால்

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0. \qquad (1)$$

மேலும்

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \qquad (2)$$

சமன்பாடு (1) ஐ y_2 ஆலும், சமன்பாடு (2) ஐ y_1 ஆலும் பெருக்கி இரண்டாவது சமன்பாட்டில் இருந்து முதல் சமன்பாட்டைக் கழிக்க நமக்கு கிடைப்பது

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + P(x)\left[y_1 y_2' - y_1' y_2 \right] = 0.$$

அதாவது,

$$W' + PW = 0$$

$$\frac{dW}{W} = -Pdx$$

இருபுறமும் x ஆல் தொகையிட, மேற்கண்ட முதல் வரிசை சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$W = ce^{-\int Pdx}$$

எனக் கிடைக்கும்.

அடுக்கு குறி $\left(e^{-\int Pdx}\right)$ என்பது பூஜ்ஜியம் அல்ல என்பதால் W இன் மதிப்பு எப்போதும் பூஜ்ஜியம் அல்ல. அதாவது $W \neq 0$ எனில் W எப்போதும் பூஜ்ஜியம் அல்ல.

குறிப்பு: மேற்கண்ட துணை தேற்றத்தில் இருந்து நாம் அறிவது என்னவெனில் ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகளின் ரான்ஸ்கியான்(Wornkian) மதிப்பு பூஜ்ஜியம் அல்ல.

துணைத்தேற்றம் 2.

மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ இன் மீது $y_1(x)$ மற்றும் $y_2(x)$ ஆகியன $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஏதேனும் ஒன்றையொன்று சார்ந்த இரு தீர்வுகள் எனில், எனில் மட்டுமே அவற்றின் ரான்ஸ்கியான்(Wronskian) மதிப்பு பூஜ்ஜியம் ஆகும்.

நிருபணம்: மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ இன் மீது $y_1(x)$ மற்றும் $y_2(x)$ ஆகியன $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒன்றையொன்று சார்ந்த இரு தீர்வுகள் என்க. எனவே நிருபிக்க வேண்டியது, இத்தீர்வுகளின் ரான்ஸ்கியான் (Wronskian) மதிப்பு பூஜ்ஜியம் என்பதாம்.

அதாவது $W(y_1, y_2) = 0$

அதாவது $y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0$

y_1, y_2 ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பூஜ்ஜியம் எனில் அவற்றின் ரான்ஸ்கியான்(Wronskian) மதிப்பு பூஜ்ஜியம் என்பது தெளிவு. எனவே பொதுமை தன்மை மாறாமலிருக்க y_1 மற்றும் y_2 ஆகிய இரண்டும் பூஜ்ஜியமற்ற சார்புகள் என்போம். இரண்டும் ஒன்றையொன்று சார்ந்த சார்புகள் என்பதால் இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று மற்றதின் மாறிலி பெருக்கலாக அமையும். அதாவது

$$y_2 = c y_1 \tag{3}$$

என்போம். இங்கு c என்பது மாறிலி. எனவே

$$y_2' = c y_1' \tag{4}$$

இப்போது $\dfrac{y_2}{y_2'} = \dfrac{y_1}{y_1'}$

அதாவது $y_2 y_1' - y_2' y_1 = 0$

அதாவது $W(y_1, y_2) = 0$

எனவே துணைத்தேற்றத்தின் ஒரு பாதி நிருவலாகிறது.

துணைத்தேற்றத்தின் மறு பாதியை நிருபிக்க, $W(y_1, y_2) = 0$ என்போம். அதாவது. $y_2' y_1 - y_2 y_1' = 0$

இப்போது y_1 ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ இன் மீது பூஜ்ஜிய சார்பாக இருந்தால் இரு சார்புகளுமே பூஜ்ஜிய சார்புகளாகும். தேற்றமும் நிருபணமாகிறது. இப்போது $[a,b]$ இன் மீது $y_1(x)$ இன் மதிப்பு முழுவதும் பூச்சியமல்ல என்போம். எனவே $[c,d]$ என்ற $[a,b]$இன் உள் இடைவெளி மீது $y_1(x)$ ஒரு பூச்சியமற்ற சார்பு ஆகும்.

இப்போது $$W(y_1, y_2) = 0$$

$$\Rightarrow y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$$

இருபுறமும் $y_1^2 (\neq 0)$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = 0$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = 0 \Rightarrow y_2 = ky_1,$$ இங்கு k ஒரு மாறிலி.

$y_2(x)$ மற்றும் $ky_1(x)$ ஆகிய இரண்டும் இடைவெளி $[c,d]$ இன் மீது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரே மதிப்பை பெறும் என்பதால் அவற்றின் வகையீடுகளும் ஒரே மதிப்பை பெறும். இதிலிருந்து நாம் அறிவது யாதெனில் $y_2(x) = ky_1(x)$ (எல்லா $x \in [a,b]$ க்கும்). அதாவது, $y_1(x)$ மற்றும் $y_2(x)$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சார்ந்த சார்புகள் ஆகும்.

தேற்றம் A : இடைவெளி $[a,b]$ இன் மீது $y_1(x)$ மற்றும் $y_2(x)$ என்பன

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டின் ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகள் எனில், $[a,b]$ இன் மீது c_1, c_2 களின் தகுந்த மதிப்புகளுக்கேற்ப சமன்பாடு (1)- ன்பொதுவான தீர்வு

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (2)$$

ஆகும்.

நிருபணம்:$[a,b]$ இன் மீது சமன்பாடு (1) இன் ஏதேனும் ஒரு தீர்வு $y(x)$ என்க. c_1 மற்றும் c_2 என்ற இரு மாறிலிகளை எல்லா $x \in [a,b]$ க்கும்

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

என காண முடியும் என நிருபிக்க வேண்டும்.

சமன்பாடு(1) இன் தீர்வுவானது, ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிடத்து சமன்பாடு (1) இன் மதிப்பு மற்றும் அதன் வகையீடுகளைப் பொறுத்தது. இதன் விளைவாக, நாம் நிருபிக்க வேண்டியது $x_0 \in [a,b]$ என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ மற்றும் $y(x)$ இன் மதிப்புகள் சமம் என்பதாம். அதாவது

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0)$$

மற்றும்

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0)$$

என நிருபித்தால் போதும்.

கிளைத்தேற்றம் - 2லிருந்து நாம் அறிவது என்னவெனில் y_1, y_2 இன் ரான்ஸ்கியான் (Wronskian)

$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$- ன் மதிப்பு பூச்சியமாக இருந்தால் y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன ஒன்றைறொன்று சார்ந்த சரர்புகள். ஆனால் y_1 மற்றூம் y_2 ஆகியன ஒன்றைறொன்று சாரா சார்புகள் எனவே

$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$ ஆகும்.

$y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$ என்பதால்

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0)$$
$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0)$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு உண்டு. அதாவது c_1 மற்றும் c_2 இன் மதிப்புகளைக் காணமுடியம். எனவே

$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ என்பது $[a,b]$ இன் மீது பொதுவான தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: எந்த ஒரு இடைவெளியிலும் $y''+y=0$-ன் பொதுத்தீர்வு $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ எனக் காட்டு. மேலும் $y(0)=2$ மற்றும் $y'(0)=3$ எனில் அதன் சிறப்புத் தீர்வையும் காண்க.

தீர்வு: $y_1(x)=\sin x$ என்க. எனவே

$$y_1'(x)=\cos x, y_1''(x)=-\sin x$$

$$\therefore y_1''(x)=-\sin x=-y_1(x)$$

$$\Rightarrow y_1''(x)+y_1(x)=0$$

எனவே $y''+y=0$- க்கு $\sin x$ ஒரு தீர்வு ஆகும். இது போலவே $y_2(x)=\cos x$-ம் $y''+y=0$- க்கு ஒரு தீர்வு ஆகும்.

இப்போது
$$W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'$$
$$=-\sin^2 x-\cos^2 x$$
$$=-1\neq 0.$$

எனவே y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத் தீர்வுகள் ஆகும். $W(y_1,y_2)\neq 0$ என்பது எல்லா x க்கும் உண்மை என்பதால் y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன $y''+y=0$ க்கு எந்த ஒரு இடைவெளியிலும் ஒன்றையொன்று சாராத் தீர்வுகள் ஆகும். இதன் மூலம் நாம் அறிவது என்னவெனில், $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$ ஆனது எந்த ஒரு இடைவெளி மீதும் $y''+y=0$ க்கு பொதுத்தீர்வு ஆகும் ஏனெனில் இங்கு தேற்றம்-A இன் படி $P(x)=0$, $Q(x)=1$ ஆகியன எந்த ஒரு இடைவெளியிலும் தொடர்ச்சியான

சார்புகள். மாறிலிகள் c_1 மற்றும் c_2 இன் மதிப்புகளை கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

$$y(0)=2 \Rightarrow c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 2$$
$$\Rightarrow c_2 = 2$$
$$y'(0)=3 \Rightarrow c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 = 3$$
$$\Rightarrow c_1 = 3$$

எனவே $y''+y=0$ இன் சிறப்புத் தீர்வு $3\sin x + 2\cos x$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: எந்த ஒரு இடைவெளியிலும் $y''-y=0$ க்கு e^x மற்றும் e^{-x} என்பன ஒன்றையொன்று சாராத தீர்வுகள் எனக்காட்டு.

தீர்வு: $y_1(x)=e^x$ என்க.எனவே

$$y_1'(x) = y_1''(x) = e^x = y_1(x)$$
$$\therefore y_1''(x) - y_1(x) = 0.$$

எனவே $y''-y=0$ க்கு e^x ஒரு தீர்வு ஆகும். இது போலவே $y_2(x)=e^{-x}$- ம் $y''-y=0$ க்கு ஒரு தீர்வு ஆகும்.

இப்போது

$$W(y_1,y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$
$$= -1-1 = -2 \neq 0.$$

அதாவது, $W(y_1,y_2) \neq 0$.

எந்த ஒரு x க்கும் y_1 மற்றும் y_2 இன் ரான்ஸ்கியான் (Wronskian) மதிப்பு பூச்சியமல்ல என்பதால் அவை $y''-y=0$- க்கு எந்த ஒரு இடைவெளி மீதும் ஒன்றையொன்று சாராத தீர்வுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: $[-1,1]$ என்ற இடைவெளி மீது $f(x)=x^3$ மற்றும் $g(x)=x^2|x|$ எனில்

(a) $[-1,1]$ இன் மீது $W(f,g)=0$ எனவும்

(b) f மற்றும் g என்பன $[-1,1]$ என்ற இடைவெளி மீதுஒன்றைறொன்று சார்ந்த சார்புகள் எனவும் நிரூபி.

தீர்வு:

$$W=W(f,g)=\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}=\begin{cases}\begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} & \text{if } x\geq 0 \\ \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} & \text{if } x<0\end{cases}$$

$$=0, \forall x\in[-1,1]$$

(b) $$g(x)=\begin{cases} x^3 & \text{if } x\geq 0 \\ -x^3 & \text{if } x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} f(x) & \text{if } x\geq 0 \\ -f(x) & \text{if } x<0\end{cases}$$

$\therefore f$ மற்றும் g என்பன $[-1,1]$ என்ற இடைவெளி மீதுஒன்றையொன்று சார்ந்த சார்புகள் ஆகும்.

பயிற்சி-2

1. பூச்சியத்தை உள்ளடக்காத எந்த ஒரு இடைவெளியிலும் $x^2y''-2xy'+2y=0$ இன் பொதுவான தீர்வு $c_1x+c_2x^2$ எனக்காட்டு. மேலும் $y(1)=3$ மற்றும் $y'(1)=5$ எனில் அதன் சிறப்புத்தீர்வைக் காண்க.

2. எடுத்துக்காட்டு-2 இல் உள்ள கணக்கு துணைத்தேற்றம் 2 க்கு முரணானதா?

இல்லையெனில் ஏன் இல்லை எனக் கூறு.

3. $y'' + y = 0$ க்கு $\sin x, \cos x$ மற்றும் $\sin x, \sin x - \cos x$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத இரு ஜோடி தீர்வுகள் எனக் காட்டு.

4. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ இன் ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகள் y_1 மற்றும் y_2 என்க.

$P(x) = -\dfrac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W(y_1, y_2)}$ மற்றும் $Q(x) = \dfrac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)}$ எனில்

சமன்பாட்டின் ஒருமைத்தன்மை தீர்மானிக்கப்படுகிறது என நிரூபி.

அத்தியாயம் 3

தெரிந்த ஒரு தீர்விலிருந்து அடுத்த தீர்வைக் காணுதல்

(The use of one known solution to find another)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டின் ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகள் தெரியுமாயின் அதன் பொதுவான தீர்வை நம்மால் எழுத முடியும். ஆனால் இந்த இரு தீர்வுகளை எவ்வாறு காண்பது? இவற்றைக் காண பொதுவான வழிமுறை ஏதுமில்லை. இருப்பினும் y_1 மற்றும் y_2 ஐக் காண திட்டவட்டமான ஒரு வழிமுறை உள்ளது.சமன்பாடு (1) இன் ஒரு தீர்வை பிரதியிடல் மூலமோ வேறு ஏதேனும் ஒரு வழிமூலமோ காண முடியும் என்பதால் இரு தீர்வுகளை காண்பது என்பது மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகக் கருதப்படுகிறது.

இம்முறையை விரிவுபடுத்த சமன்பாடு (1) இன் பூச்சியமல்லாத ஒரு தீர்வு y_1 என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே c என்ற எந்த ஒரு மாறிலிக்கும், cy_1 என்பதும் சமன்பாடு (1) இன் ஒரு தீர்வு ஆகும்.

இம்முறையின் அடிப்படை விசயமானது c க்கு பதில் $v(x)$ என்ற தெரியாத ஆனால் x இன் சார்பை cy_1 இல் பிரதியிட்டு, $y_2 = vy_1$ என்று சமன்பாடு (1) இன் தீர்வாக அமையுமாறு v_1 ஐ தீர்மானிப்போம். இம்முறை மூலம் நமக்கு வெற்றி கிடைக்கும் என்று முன்னரே தெளிவாகாது. ஆனால்

முடியும். இதனை (v) எவ்வாறு காண்பது என்பதை இப்போது அலசி ஆராயலாம். y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகள் எனின் அவற்றின் விகிதம் $\frac{y_2}{y_1}$ -ஆனது, x இல் ஒரு மாறிலியல்லாத சார்பாகும். இதனை v என எடுத்துக் கொள்வோம். இவ்வாறு v ஐக் காணமுடிந்தால் நம்மால் y_2 ஐக் காண முடியும். ஏனெனில் நமக்கு y_1 என்ற தீர்வு முன்னரே தெரிந்த ஒன்று. இதனால் சமன்பாடு (1) இன் பொதுத்தீர்வைக் காண முடியும்.

$$y_2 = vy_1$$

என்பது சமன்பாடு (1) இன் தீர்வு என எடுத்துக்கொண்டால்

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \qquad (2)$$

ஆகும். இப்போது நாம் $v(x)$ என்ற சார்பைக் கண்டுபிடிப்போம்.

$y_2 = vy_1$ மேலும் $y_2' = vy_1' + v'y_1, y_2'' = vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1$ என்ற விரிவாக்கத்தை சமன்பாடு (2) இல் பிரதியிட்டு வரிசைப்படுத்தினால் நமக்கு

$$v\left(y_1'' + Py_1' + Qy_1\right) + v''y_1 + v'\left(2y_1' + Py_1\right) = 0$$

எனக் கிடைக்கும். y_1 என்பது சமன்பாடு (1) இன் தீர்வு ஆதலால் மேற்கண்ட சமன்பாடு

$$v''y_1 + v'\left(2y_1' + Py_1\right) = 0$$

என்றாகும்.

அல்லது

$$\frac{v''}{v'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - P.$$

மேலும் தொகையிட நமக்கு கிடைப்பது

$$\log v' = -2\log y_1 - \int P dx.$$

ஆதலால்

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx}$$

அதாவது

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx. \qquad (3)$$

இதற்கு மேல் நிருபிக்க வேண்டியது v என்பது சமன்பாடு (3) ஆல் கொடுக்கப்படும் போது y_1 மற்றும் $y_2 = v y_1$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத நேரியல் தீர்வுகள் என்பதே.

இதனை ரான்ஸ்கியன் (Wronskian) மூலம் எளிதில் நிறுவலாம்.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ v y_1 & v' y_1 + v y_1' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ 0 & v' y_1 \end{vmatrix}$$

$$= v' y_1^2 \neq 0.$$

ஏனெனில் v' மற்றும் y_1 ஆகியன பூச்சியமற்றன.

$W(y_1, y_2) \neq 0$ என்பதால், y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத நேரியல் தீர்வுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $x^2 y'' + x y' - y = 0$ என்பதின் பொதுத்தீர்வைக் காண்.

தீர்வு: $y_1 = x$ என்போம். எனவே $x^2 y_1'' + xy_1' - y_1 = 0$. எனவே $y_1 = x$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும். இப்போது இந்த தீர்வை சாராத மற்றொரு தீர்வை காண வேண்டும். இதற்கு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை பின்வருமாறு மாற்றி எழுதுவோம்.

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0.$$

இச்சமன்பாட்டை பொதுவான சமன்பாடு $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ உடன் ஒப்பிட $P(x) = \frac{1}{x}$ மற்றும் $Q(x) = -\frac{1}{x^2}$ ஆகும். இரண்டாவது தீர்வு $y_2 = vy_1$ என்போம்.

இங்கு v என்பது மாறிலி அற்ற, x இன் சார்பு ஆகும். எனவே

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2} e^{-\log x} dx$$

$$= \int x^{-3} dx = -\frac{x^{-2}}{2}$$

எனவே, $y_2 = vy_1 = -\frac{x^{-2}}{2} x = -\frac{1}{2x}$. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுவான தீர்வு

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 x + \frac{c_2}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$y_1 = 1$ என்பது $xy'' + 3y' = 0$ இன் தீர்வு எனக் காட்டி அதன் பொதுத்தீர்வைக் காண்.

தீர்வு: $y_1=1$ எனில் $y_1'=y_1''=0$ ஆகும். இப்போது $xy_1''+3y_1'=0$ என்பதால் $xy''+3y'=0$ இன் தீர்வு $y_1=1$ ஆகும். y_1 ஐச் சாராத மற்றொரு தீர்வு y_2 என்க. $y_2=vy_1=v$ என்போம். இங்கு v என்பது மாறிலியல்லாத x இன் சார்பு ஆகும். எனவே

$$v=\int\frac{1}{x^2}e^{-\int Pdx}dx$$

ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை திட்ட வடிவில் ($y''+P(x)y'+Q(x)y=0$) எழுத $y''+\dfrac{3y'}{x}=0$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே $P(x)=\dfrac{3}{x}$ ஆகும். எனவே

$$v=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int Pdx}dx=\int\frac{1}{1^2}e^{-\int\frac{3}{x}dx}dx$$

$$=\int e^{-3\int\frac{1}{x}dx}dx=\int\frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{2x^2}.$$

$$\therefore y_2=vy_1=-\frac{1}{2x^2}.$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுவான தீர்வு

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

$$=c_1+\frac{c_2}{x^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

$y''-xf(x)y'+f(x)y=0$ இன் பொதுத்தீர்வைக் காண்.

தீர்வு: $y_1 = x$ என்க.

$$y_1'' - xf(x)y_1' + f(x)y_1 = 0 - xf(x) + xf(x) = 0 .$$

எனவே $y_1 = x$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும். இதனைச் சாராத மற்றொரு தீர்வு $y_2 = vy_1$ என்க. எனவே

$$v = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int P dx} dx \qquad \text{இங்கு} \quad P(x) = -xf(x)$$

$$= \int \frac{1}{x^2} e^{\int xf(x) dx} dx$$

$$\therefore y_2 = vy_1 = x \int \frac{1}{x^2} e^{\int xf(x) dx} dx .$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுவான தீர்வு

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int xf(x) dx} dx \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4: $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ என்ற லெஜன்டர் (Legendre) சமன்பாட்டில் $p=1$ எனில் $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ என்ற சிறப்பு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வெளிப்படையான ஒரு தீர்வு x எனில் அச்சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைக் காண்.

தீர்வு: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ இன் ஒரு தீர்வு $y_1 = x$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தீர்வை சார்ந்து அமையாத மற்றொரு தீர்வு $y_2 = vy_1$ எனில்

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx$$

ஆகும். இங்கு $P(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}$. எனவே

$$v = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{-2x}{1-x^2} dx} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2} e^{-\log(1-x^2)} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2\left(1-x^2\right)} dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}\right] dx$$

$$v = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore y_2 = vy_1 = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right] x$$

$$= -1 + \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுவான தீர்வு

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2\left[-1 + \frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right]$$ ஆகும்.

பயிற்சி-3

1. இப்பாடத்தில் பயின்ற முறைப்படி பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்கு பொதுவான தீர்வைக் காண்.

   (a) $y'' + y = 0, y_1 = \sin x$

   (b) $y'' - y = 0, y_1 = e^x$

2. $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $y_1 = x^2$ எனக் காட்டு. மேலும் அதன் பொது தீர்வைக் காண்க.

3. பெசல் சமன்பாடு $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ இல் $p=\frac{1}{2}$ எனும் போது கிடைக்கும் சிறப்பு வகைச் சமன்பாடு $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$க்கு மிகை மதிப்புகளை மட்டும் உள்ளடக்கிய எந்தவொரு இடைவெளி மீதும் $y_1=x^{-\frac{1}{2}}\sin x$ என்பது ஒரு தீர்வு எனக் காண்பி. மேலும் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வைக் காண்.

4. பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்கு $y_1=x$ என்பது ஒரு வெளிப்படையான தீர்வு என எடுத்துக் கொண்டு அவற்றின் பொதுத்தீர்வைக் காண்.

(a) $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=0$

(b) $x^2y''+2xy'-2y=0$

5. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$ இன் ஒரு தீர்வு $y_1=e^x$ எனச் சோதிக்கவும். மேலும் அதன் பொதுத்தீர்வைக் காண்க.

6. $y''-f(x)y'+[f(x)-1]y=0$ இன் பொது தீர்வைக் காண்க.

அத்தியாயம் 4

துணை அலகு முறை

(The method of variation of parameters)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இச் சமன்பாடு ஒருபடித்தானதற்ற சமன்பாடு ஆகும்.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2)$$

என்பது சமன்பாடு (1) –க்கு இசைந்த ஒருபடித்தான சமன்பாடுஆகும்.சமன்பாடு (2) இன் பொதுவான தீர்வு $y_g(x)$ என்போம். $y_p(x)$ என்பது சமன்பாடு (1) இன் ஏதேனும் ஒரு சிறப்புத் தீர்வு எனில் சமன்பாடு (1) இன் பொதுத் தீர்வு $y(x) = y_g(x) + y_p(x)$ ஆகும்.

இங்கு $R(x)$ என்பது அடுக்குக்குறி (exponential) சார்பு அல்லது திரிகோணமிதி சார்புகளான சைன் (sine) அல்லது கொசைன் (cosine) அல்லது பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது இவற்றின் சேர்ப்புகளாகவோ இருக்கும்.

இப்பாடத்தில் ஒருபடித்தான சமன்பாடு $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ இன் தீர்வு தெரியும் போது P, Q, R ஆகியவனற்றின் இயல்புகள் எப்படியிருப்பினும் சமன்பாடு (1) இன் பொதுவான தீர்வை காண்போம்.

சமன்பாடு (2) இன் பொதுவரான தீர்வு

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \,. \quad (3)$$

ஏற்கனவே கண்டுபிடிக்கப்பட்டுவிட்டது என்போம். சமன்பாடு (3) இல் உள்ள மாறிலிகள் c_1 மற்றும் c_2 யை ஏற்கனவே தெரியாத, மற்றும் x இல் சார்புகளான v_1 மற்றும் v_2 ஆகியவற்றால் நீக்குவோம். அதாவது

$$y(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x). \tag{4}$$

எனவே $y = v_1y_1 + v_2y_2$ என்பது சமன்பாடு (1) இன் தீர்வாக அமையுமாறு v_1 மற்றும் v_2 மதிப்புகளை காண முற்படுவோம்.

சமன்பாடு (4) இல் இரண்டு தெரியாத மதிப்புகள் v_1 மற்றும் v_2 உள்ளன. அவற்றின் மதிப்புகளைக் காண v_1 மற்றும் v_2 இல் இரு சமன்பாடுகள் நமக்குத் தெரிந்தால் அவற்றிலிருந்து v_1 மற்றும் v_2 இன் மதிப்புகளைக் காண முடியும்.

$$y = y_1v_1 + y_2v_2$$

என்பது சமன்பாடு (1) இன் தீர்வு என எடுத்துக் கொள்வதால் நமக்கு v_1 மற்றும் v_2 இல் ஒரு சமன்பாடு கிட்டும். சமன்பாடு (4) ஐ வகையீடு செய்ய

$$y' = v_1y_1' + v_1'y_1 + v_2y_2' + v_2'y_2$$

$$= (v_1y_1' + v_2y_2') + (v_1'y_1 + v_2'y_2) \tag{5}$$

(5) ஐ மேலும் வகையீடு செய்ய இரண்டாம் வரிசை வகையீடுகள் கிடைக்கும். இத்தகைய இடர்களைப் போக்க சமன்பாடு (5) இன் இரண்டாவது பகுதி $v_1'y_1 + v_2'y_2$ ஐ பூச்சியத்திற்கு சமப்படுத்துவோம். அதாவது

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \tag{6}$$

என்போம்.

சமன்பாடு (6) ஐ (5) இல் பயன்படுத்த

$$y' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \tag{7}$$

எனக் கிடைக்கிறது.

(7) ஐ வகையீடு செய்ய

$$y'' = v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'' \tag{8}$$

சமன்பாடுகள் (4), (7) மற்றும் (8) ஆகியனவற்றை சமன்பாடு (1) இல் பயன்படுத்த

$v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2' + P(x)(v_1 y_1' + v_2 y_2') + Q(x)(v_1 y_1 + v_2 y_2) = R(x)$ அதாவது

$$v_1\left(y_1'' + Py_1' + Qy_1\right) + v_2\left(y_2'' + Py_2' + Qy_2\right) + v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x). \tag{9}$$

ஆனால் y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன சமன்பாடு இன் தீர்வுகள். எனவே சமன்பாடு (9) ஆனது

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x) \tag{10}$$

என மாறுகிறது.

சமன்பாடுகள் (6) மற்றும் (10) ஆகியன தெரியாத சார்புகள் v_1' மற்றும் v_2' இல் இரு சமன்பாடுகள் எனவே இவ்விலிருந்து v_1' மற்றும் v_2' ஐ தீர்க்க கிடைப்பது

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} \quad \text{மற்றும்} \\ v_2' &= \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ஆகும். இங்கு y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராதவை என்பதால் $W(y_1, y_2)$ இன் மதிப்பு பூச்சியமல்ல. எனவே v_1' மற்றும் v_2' ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளை கணக்கிட முடியும்.

சமன்பாடு (11) இலிருந்து

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{மற்றும்} \\ v_2 &= \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

எனக் கிடைக்கும்.

எனவே சமன்பாடு (1) இன் பொதுவான தீர்வு

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2 = y_1 \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

ஆகும்.

குறிப்பு: இம்முறை அதற்கே உரித்தான குறைபாடு உடையது, ஏனெனில் சமன்பாடு (12) இலிருந்து v_1 மற்றும் v_2 இன் மதிப்புகளை காணமுடியாமல் (தொகையிட முடியாமல்) போகலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: தீர்க்க: $y'' + y = \operatorname{cosec} x$.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு தொடர்புடைய ஒருபடித்தான சமன்பாடு $y'' + y = 0$. இச்சமன்பாட்டுக்கு $\sin x$ மற்றும் $\cos x$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகள். எனவே $y'' + y = 0$ இன் பொதுத்தீர்வு

$y_g(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$

அதாவது $y_g(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

இப்போது $y'' + y = \operatorname{cosec} x$ இன் சிறப்புத்தீர்வைக் காண்போம்.

y_1, y_2 இன் ரான்ஸ்கியான் மதிப்பு

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1$$

சிறப்புத்தீர்வு $y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2$ என்க.

எனவே

$$v_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{-\cos x \operatorname{cosec} x}{-1} dx = \int \cot x dx = \log \sin x$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{\sin x \operatorname{cosec} x}{-1} dx = -\int dx = -x$$

சிறப்புத்தீர்வு $y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 = \sin x \log \sin x - x \cos x$.

குறிப்பு: எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$
$$= c_1 \sin x + c_2 \cos x + \sin x \log \sin x - x \cos x$$

எடுத்துக்காட்டு 2: $y'' - 2y' + y = 2x$ இன் சிறப்புத் தீர்வை முதலில் சோதனை முறை மூலமும் பிறகு துணை அலகு முறை மூலமும் கண்டுபிடி.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு தொடர்புடைய ஒருபடித்தான சமன்பாடு $y'' - 2y' + y = 0$. இச்சமன்பாட்டுக்கு $y_1 = xe^x$ மற்றும் $y_2 = e^x$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகள். எனவே $y'' - 2y' + y = 0$ இன் பொதுத்தீர்வு

$$y_g(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$= c_1 xe^x + c_2 e^x$$
$$= (c_1 x + c_2) e^x$$

(i) சோதனை முறை: $y=2x+4$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தீர்வு ஆகும். ஏனெனில்

$$y''-2y'+y=(2x+4)''-2(2x+4)'+2x+4$$
$$=2x$$

(ii) துணை அலகு முறை: சிறப்புத்தீர்வு $y_p(x)=v_1y_1+v_2y_2$ என்க.

$$W(y_1,y_2)=W(xe^x,e^x)$$
$$=\begin{vmatrix} xe^x & e^x \\ xe^x+e^x & e^x \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} xe^x & e^x \\ xe^x+e^x & e^x \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} xe^x & e^x \\ e^x & 0 \end{vmatrix}=-e^{2x}\neq 0.$$

எனவே

$$v_1=\int\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$
$$=\int\frac{-e^x2x}{-e^{2x}}dx$$
$$=2\int xe^{-x}dx$$
$$=2\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]=-2e^{-x}(x+1).$$

$$v_2=\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$
$$=\int\frac{xe^x2x}{-e^{2x}}dx=-2\int x^2e^{-x}dx$$

$$= -2\left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]$$
$$= 2e^{-x}(x^2 + 2x + 2) \ .$$

சிறப்புத்தீர்வு $y_p(x) = v_1y_1 + v_2y_2 = -2x(x+1) + 2(x^2 + 2x + 2) = 2x + 4.$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$
$$= (c_1x + c_2)e^x + 2x + 4 \ .$$

எடுத்துக்காட்டு 3: $y'' + 4y = \tan 2x$ இன் சிறப்புத்தீர்வை துணை அலகு முறை மூலம் காண்.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு தொடர்புடைய ஒருபடித்தான சமன்பாடு $y'' + 4y = 0$. இச்சமன்பாட்டுக்கு $y_1 = \sin 2x$ மற்றும் $y_2 = \cos 2x$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகள். எனவே $y'' + 4y = 0$ இன் பொதுத்தீர்வு

$$y_g(x) = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \ .$$

இப்போது $y'' + 2y = \tan 2x$ இன் சிறப்புத்தீர்வைக் காண்போம்.

y_1, y_2 இன் ரான்ஸ்கியான் மதிப்பு

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2$$

சிறப்புத்தீர்வு $y_p(x) = v_1y_1 + v_2y_2$ என்க.

எனவே

$$v_1 = \int \frac{-y_2R(x)}{W(y_1, y_2)}dx$$

$$= \int \frac{-\cos 2x \tan 2x}{-2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 2x$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$= \int \frac{\sin 2x \tan 2x}{-2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int (\sec 2x - \cos 2x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \log(\sec 2x + \tan 2x) - \frac{\sin 2x}{2} \right].$$

சிறப்புத்தீர்வு

$$y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

$$= \sin 2x \left(-\frac{1}{4} \cos 2x \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\log(\sec 2x + \tan 2x)}{2} - \frac{\sin 2x}{2} \right] \cos 2x$$

$$= -\frac{1}{4} \log(\sec 2x + \tan 2x)$$

பயிற்சி-4

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் சிறப்புத்தீர்வுகளை துணை அலகு முறை மூலம் காண்.

(a) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \log x$

(b) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

(c) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x$

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் பொது தீர்வுகளைக் காண்க.

(a) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$

(b) $(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x + 1)^2$

அலகு-II

அத்தியாயம் 5

அடுக்குக்குறி தீர்வுகள் மற்றும் சிறப்புச் சார்புகள்

(Power Series Solutions and Special functions)

அடுக்குக்குறி தொடர்- மீள்பார்வை (A review of power series)

எளிய பகுப்பாய்வில் எதிர்கொள்ளும் மிகப்பெரும்பாலான சிறப்புச்சார்புகள் எளிய சார்புகள் எனப்படும். முதலில் இவ்வகை சார்புகளை விவரிப்போம். இயற்கணித சார்பு (algebric function) என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை; மேலும் அது ஒரு விகிதமுறு சார்பு அல்லது $P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை நிவர்த்தி செய்யும் எந்த ஒரு $y = f(x)$ என்ற சார்பு. இங்கு ஒவ்வொரு $P_i(x)\,(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$-உம் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். எளிய சார்புகள் இயற்கணித சார்புகளை உள்ளடக்கியன. அவ்வகையல்லாத எளிய விஞ்சிய அல்லது இயற்கணிதமல்லாத(transcendental or nonalgebraic) சார்புகள் நுண்கணிதத்தில் காணப்படும்; அதாவது திரிகோணமிதி, எதிர்திரிகோணமிதி, அடுக்குக்குறி மற்றும் மடக்கைச் சார்புகள். மற்றவை இந்த சார்புகளின் கூடுதல், வித்தியாசம், பெருக்கல், வகுத்தல் அல்லது சார்புகளின் சார்பு ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக

$$y = \tan\left[\frac{xe^{\frac{1}{x}} + \tan^{-1}\left(1+x^2\right)}{\sin x\cos 2x - \sqrt{\log x}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

என்பது ஒரு எளிய சார்பு ஆகும்.

எளிய சார்புகளுக்கு அடுத்த சார்புகள் விஞ்சிய (transcendental) சார்புகள் ஆகும். அவை சிறப்புச் சார்புகள் எனவும் அழைக்கப்படும். பதினெட்டாம் நூற்றாண்டின் ஆரம்ப கட்டத்தில் பல நூறு கணக்கான சிறப்புச் சார்புகள் கருத்தில் கொள்ளப்பட்டன. காமா சார்புகள், ரீமான் - சீட்டா சார்பு, நீள்வட்ட சார்பு மற்றும் கணித இயற்பியலில் பயன்படும், தொடர்ந்து பயன்படும் சார்புகளைத் தவிர மற்ற பெரும்பாலான சார்புகள் உபயோகத்தில் இல்லை. இத்தகைய சார்புகள் பதினெட்டு மற்றும் பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டுகளில் ரீமான், ஹெர்மைட், பாய்ங்க்கார், ஆய்லர், காஸ், ஏபுல், ஜெகோபி, வெய்ர்ஸ்ட்ராஸ் போன்ற வல்லுநர்களால் வளர்க்கப்பட்டன.

இத்தகைய எளிய சார்புகள் எவ்வாறு உருவாகின்றன என்பதை அறிய முற்படுவோம். உதாரணமாக

$$y'' + y = 0 \qquad (1)$$

என்ற எளிய சமன்பாட்டைத் தீர்க்க முற்பட்டால் அதற்கான சார்புகளான $\sin x$ மற்றும் $\cos x$ ஆகியன நுண்கணிதத்தில் உள்ளன. அதே நேரத்தில்

$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad (2)$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பது முற்றிலும் வித்தியாசமானது, ஏனெனில் இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எளிய சார்புகளால் ஆனது அல்ல. உண்மை என்னவெனில்

இரண்டாம் வரிசை நேரிய சமன்பாட்டை (second order linear equation) தீர்ப்பதற்கு தெரிந்த வழிமுறை ஏதுமில்லை (மாறிலிகளை குணகங்களாக கொண்ட இரண்டாம் வரிசை சமன்பாடு மற்றும் தனித்த மாறிகளை மாற்றி இவ்வகை சமன்பாடாக மாற்றும் சமன்பாடுகளைத் தவிர).

A) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (3)

என்ற முடிவிலி தொடர் x இல் ஒரு அடுக்குக்குறி தொடர் எனப்படும். இதுபோலவே

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots \quad (4)$$

என்பது (3) ஐக் காட்டிலும் சிறந்த பொதுவான அமைப்பு ஆனது $(x - x_0)$ இல் ஒரு அடுக்குக்குறி தொடர் ஆகும்.

B) $\lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ என்ற எல்லை இருக்குமேயானால் தொடர் (3) ஐ ஒருங்கும் தொடர் என்போம். இந்நிலையில் அத்தொடரின் கூடுதல், இந்த எல்லையின் மதிப்புக்குச் சமம். $x = 0$ எனில் தொடர் (3) ஒருங்கும் என்பது வெளிப்படையான உண்மை.

ஒருங்கு புள்ளிகளின் வரிசைகிரமத்தைப் பொறுத்து x இல் உள்ள எல்லா தொடர்களும் பின்வரும் ஏதேனும் ஒரு வகையைச் சார்ந்தது.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2! x^2 + 3! x^3 + \cdots \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \quad (7)$$

முதல் வகைத் தொடர் எல்லா $x \neq 0$ க்கும் விரியும் தொடர் ஆகும். இரண்டாம் வகைத் தொடர் எல்லா $x \neq 0$ க்கும் ஒருங்கும் தொடர் ஆகும். மூன்றாம் வகை தொடர் $|x|<1$ எனில் ஒருங்கும் தொடர் மற்றும் $|x|\geq 1$ எனில் விரியும் தொடர் ஆகும்.

° Ä « Î ì Ï ò ¦ ¾¡ ¼+, û (5) ஐப் போல் பண்புகள் பெற்றிருப்பினும் அவை $x=0$ எனில் மட்டுமே ஒருங்கும். அவ்வகைத் தொடர்கள் முக்கியத்துவம் பெற்றவையல்ல, இது போலவே சில வகை தொடர் (6)- ஐப் போல எல்லா x க்கும் ஒருங்கும். இவ்வகைத் தொடர்கள் மிக எளியன. மற்றவகை தொடர்கள் (7) ஐப் போன்று இருக்கும். இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில் (5), (6) மற்றும் (7) ஐப் போன்ற ஒவ்வொரு வகைத்தொடருக்கும் R என்ற மிகை மெய்யெண் உண்டு. அதனை ஒருங்கல் ஆரம் என்போம். அதாவது $|x|<R$ எனில் தொடர் ஒருங்கும் அவ்வாறு இல்லையெனில் அத்தொடர் விரியும். உதாரணமாக (7) இன் ஒருங்கல் ஆரம் $R=1$ ஆகும் ஏனெனில் (7) ஆனது $|x|<1$ எனில் ஒருங்கும் மேலும் $|x|\geq 1$ எனில் விரியும் தொடர் ஆகும்.

குறிப்பு: $x=0$ எனும் போது மட்டும் ஒரு தொடர் ஒருங்கும் எனில் $R=0$ ஆகும். இது போலவே எல்லா x க்கும் ஒரு தொடர் ஒருங்கும் எனில் $R=\infty$ ஆகும். இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில் $0\leq R\leq\infty$.

ஒருங்கல் ஆரத்தை அறியும் முறை:

$\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ என்பது பூச்சியமற்ற மாறிலிகளால் ஆன தொடர் என்க.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L \text{ என்க.}$$

விகிதச் சோதனை (ratio test) மூலம் $L<1$ எனில் $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ தொடர் ஒருங்கும் எனவும், $L \geq 1$ எனில் தொடர் விரியும் எனவும் எளிய நுண்கணிதத்தில் நாம் அறிவோம். இப்போது தொடர் (3) ஐக் கருதுவோம். இதில் $a_n \neq 0$ என்க.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = L.$$

எனவே எல்லா $x \neq 0$ க்கும் தொடர் , $L<1$ எனில் ஒருங்கும் மற்றும் $L \geq 1$ எனில் விரியும் தொடர் ஆகும்.

இதிலிருந்து நமக்குக் கிடைப்பது

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{(இந்த எல்லை உள்ள போது).}$$

இந்த எல்லை இல்லையெனில் $R = \infty$ என்போம். எனவே மேற்கண்ட சூத்திரத்தை பயன்படுத்துகிறோமோ இல்லையோ R எப்போதும் இருக்கும். மேலும் R இன் மதிப்பு பூச்சியமல்லாத ஒரு முடிவுறு எண் எனில் அது ஒருங்கல் இடைவெளியை தீர்மானிக்கிறது (interval of convergence). அதாவது $-R < x < R$ எனில் தொடர் ஒருங்கும்.

C) $|x| < R$ எனில் தொடர் (3) ஐ ஒருங்கும் தொடர் என்போம். அத்தொடரின் கூடுதல் $f(x)$ என்போம். எனவே

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{8}$$

பிறகு $|x| < R$ எனும் போது $f(x)$ தொடர்ச்சியானது மேலும் அது எல்லா வரிசை வகைக்கெழுக்களும் உடையது. அதே சமயத்தில் (8) இன் வலப்புறத்தை உறுப்புகிரமமாக வகையீடு செய்ய

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

இது போலவே

$$f''(x)=2a_2+3\cdot2\cdot a_3x+4\cdot3\cdot a_4x^2+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

எனவும் மற்றும் $f'''(x), f^{iv}(x),\cdots$ ஆகியவனற்றையும் காணலாம். இவ்வாறு கிடைக்கும் அனைத்து தொடர்களும் $|x|<R$ எனில் ஒருங்கும் தொடர்கள் ஆகும். இத்தகைய தொடர்ச்சியான வகையீடுகளிலிருந்து a_n - க்கும் $f(x)$ மற்றும் அதன் வகையீடுகளுக்குமிடையேயான பின்வரும் தொடர்பு

$$a_n=\frac{f^n(0)}{n!} \tag{9}$$

கிடைக்கிறது. மேலும் தொகையீட்டு எல்லைகள் ஒருங்கல் இடைவெளியில் இருப்பின் தொடர் (8) ஐ உறுப்புகிரமமாக தொகையிடலாம்.

இப்போது x இல் இரண்டாவது அடுக்குத் தொடர் ஒன்று $g(x)$ க்கு ஒருங்குவதாக எடுத்துக்கொண்டால்

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots \tag{10}$$

என எழுதலாம். (இங்கு $|x|<R$).

இந்நிலையில் தொடர் (8) மற்றும் தொடர் (10) ஆகியவற்றை உறுப்புகிரமமாக கூட்டலாம் அல்லது கழிக்கலாம், அதாவது

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$$

$$=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+(a_2\pm b_2)x^2+\cdots.$$

மேலும் அவற்றைப் பெருக்கவும் செய்யலாம். அதாவது

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n.$$

இங்கு $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0$ ஆகும்.

D) $R > 0, |x| < R$ எனில் $f(x)$ தொடர்ச்சியான மற்றும் எல்லா வரிசை வகையீடுகளும் உடையது எனில் $f(x)$- ஐ அடுக்குக்குறி சார்பாக எழுதலாமா? தொடர்(9) ஐப் பயன்படுத்தி

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)x^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \qquad (11)$$

என எழுதலாம். சில நேரங்களில் உண்மையல்ல என்றாலும் பெரும்பாலும் அது உண்மையானது. இடைவெளி $(-R, R)$ இல் x இன் எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கும் சரிதான் என சோதிக்க பின்வரும் டெய்லரின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}x^k + R_n(x).$$

இங்கு எச்சம் $R_n(x)$ என்பது

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0 < \bar{x} < x$$

என்பதால் கொடுக்கப்படும். (11) இன் செல்லுபடித் தன்மையை (சரித்தன்மையை) சோதிக்க $n \to \infty$ எனில் $R_n(x) \to 0$ என நிருபித்தால் போதும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$f(x) = e^x$ என்க.

எனவே $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = e^x$

மேலும் $1 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots$

எனவே டெய்லரின் சூத்திரப்படி

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

எனக் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$f(x) = \sin x$ என்க.

எனவே $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, \cdots$

மேலும் $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, \cdots$

எனவே

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

எனக் கிடைக்கும்.

இது போலவே, $f(x) = \cos x$ எனில்

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

எனக் கிடைக்கும்.

E) x_0 இன் அண்மையில் (neighbourhood), $f(x)$ இன் அடுக்குக்குறி அமைப்பு

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (12)$$

செல்லுபடியானால் $f(x)$-ஐ x_0 என்ற புள்ளியிடத்து ஒழுங்கானதுஎன்போம்.

அதாவது ஒழுங்கு சார்பு என்போம். இந்நிலையில் கெழுக்கள்

$$a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$$

எனக் கொடுக்கப்படும். தொடர் (12) ஐ $f(x)$ இன் , x_0 இடத்து, டெய்லரின் விரிவாக்கம் என்போம்.

பயிற்சி-5

1. விகிதச் சோதனையைப் பயன்படுத்தி தொடர்கள் (5), (6) மற்றும் (7) ஆகியவற்றுக்கு முறையே $R=0, R=\infty$ மற்றும் $R=1$ எனச் சரிபார்.

2. P ஒரு மிகை எண்ணாகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ இல்லையெனில்

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(P-1)(P-2)(P-3)\cdots(P-n+1)}{n!}x^n$$

என்ற தொடர் (i) $|x|<1$ எனில் ஒருங்கும் எனவும் (ii) $|x|>1$ எனில் விரியும் எனவும் காட்டுக.

3. $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, (x \neq 1)$ என நாம் அறிவோம். இதிலிருந்து $|x|<1$ எனில்

(i) $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots$ எனவும்

(ii) $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots$ எனவும் நிருபி.

மேலும் (ii) ஐப் பயன்படுத்தி $|x|<1$ எனில்

(iii) $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ எனவும்

(iv) $\tan^{-1} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ எனவும் நிருபி.

4. $\cos x$ இன் தொடர்

$y = 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots$ எனவும்

$y'' = -y$ என்ற பண்பைப் பெற்றுள்ளது எனக் காட்டி சமன்பாடு (1) இன் தீர்வு எனக்காட்டு.

அத்தியாயம் 6

முதல் வரிசை சமன்பாடுகளின் அடுக்குக்குறி தீர்வுகள்

(Series of solutions of first order equations)

இப்பாடத்தில் முதல் வரிசை சமன்பாடுகளின் தீர்வை எவ்வாறு காண்பது என்பதை பார்ப்போம் . எடுத்துக்காட்டாக

$$y' = y \tag{1}$$

என்ற முதல் வரிசை சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இச்சமன்பாட்டின் அடுக்குக்குறி அமைப்பிலான தீர்வு

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

என்போம். மேலும் (2) ஆனது $R > 0, |x| < R$ எனில் ஒருங்கும். அதாவது (1) ஆனது பூச்சியத்தில் ஒழுங்கான சார்பு மற்றும் அதற்குத் தீர்வு உணடு. எந்த ஒரு அடுக்குக்குறி சார்பும் உறுப்புகிரமமாக வகையீடு செய்ய முடியும் என்பாதல்

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \tag{3}$$

$y' = y$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின்படி நமக்கு சமன்பாடுகள் (2) மற்றும் (3) இலிருந்து

$$a_1 = a_0$$
$$2a_2 = a_1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$(n+1)a_{n+1} = a_n$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இவற்றிலிருந்து எல்லா கெழுக்களையும் a_0-ல் எழுத

$$a_1 = a_0, a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2\cdot 3}, \cdots, a_n = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n}, \cdots$$

அதாவது

$$a_1 = \frac{a_0}{1!}, a_2 = \frac{a_0}{2!}, a_3 = \frac{a_0}{3!}, \cdots, a_n = \frac{a_0}{n!}, \cdots$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இந்த கெழுக்களை சமன்பாடு (2) இல் பிரதியிட

$$y = a_0 + \frac{a_0}{1!}x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a_0}{n!}x^n + \cdots$$

$$= a_0\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) \qquad (4)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

மேறகண்டவற்றிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில் சமன்பாடு (1)-க்கு சமன்பாடு (2) வடிவில் ஒரு அடுக்குக்குறி அமைப்பு தீர்வு இருக்குமெனில் அது (4) வடிவில் இருக்கும். ஆனால் சமன்பாடு (2)-க்கு சமன்பாடு (2) வடிவில் தீர்வு இருப்பதற்கான எந்தவித உத்தரவாதமும் இல்லை

என்பதையும் நாம் அறிந்து கொள்ள வேண்டும். இருப்பினும் விகிதச் சோதனைப் படி தொடர் (4) எல்லா x- க்கும் ஒருங்கும் தொடராகும். எனவே உறுப்புகிரமமான வகையீடுகள் செல்லுபடியாகும். இதிலிருந்து நாம் அறிவது, தொடர் (4) சமன்பாடு (1)- க்கு ஒரு தீர்வு ஆகும். இந்நிலையில் தொடர் (4) ஆனது e^x இன் அடுக்கு குறி விரிவாக்கம் என நாம் அறிவதால் (4) - ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$y = a_0 e^x$$

சமன்பாடு (1)- ஐ மாறிகளை பிரித்தல் முறையில் பிரித்து தொகையீடு செய்ய சமன்பாடு (1)- ஐ தீர்க்கலாம். ஆனால் இப்போது இங்கு அது தேவையற்றது. சமன்பாடு (1)- இல் இருந்து அறிவது என்னவெனில் சமன்பாடு (1) ஆனது எளிய வழிமுறைகளில் தீர்க்க முடியாதது ஆயினும் (4) ஆனது சமன்பாடு (1)- க்கு தீர்வு ஆகும்.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து ஒரு சமன்பாட்டுக்கு அடுக்குகுறித் தொடர் அமைப்பிலான தீர்வை காணும் முறையை இப்போது காண்போம். இம்முறை படி கொடுக்கப்பட்ட சார்பு நிவர்த்தி செய்யும் வகைக்கெழு சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்து அச்சமன்பாட்டை அடுக்கு குறி தொடர் மூலம் தீர்க்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக பின்வரும் சமன்பாட்டை கருத்தில் கொள்வோம்.

$$y = (1+x)^p \qquad (5)$$

இங்கு p என்பது ஒரு எதேச்சை மாறிலி. இருபுறமும் வகையிட

$$y' = p(1+x)^{p-1}$$

அதாவது

$$(1+x)y' = p(1+x)^p = py.$$

எனவே சமன்பாடு (5) ஆனது

$$(1+x)y' = py, y(0) = 1 \tag{6}$$

இன் சிறப்பு தீர்வு ஆகும்.

வழக்கம் போல சமன்பாடு (6)-க்கு பின்வருமாறு ஒரு அடுக்கு குறி தீர்வு இருப்பதாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \tag{7}$$

(7) இன் ஒருங்கல் ஆரம் ஒரு மிகை எண் என எடுத்துக் கொள்வோம். இதிலிருந்து

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$$
$$xy' = a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots + na_nx^n + (n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \cdots$$
$$py = pa_0 + pa_1x + pa_2x^2 + pa_3x^3 + \cdots + pa_nx^n + \cdots$$

மேலும் (6) இன் படி $(1+x)y' = py$ என்பது

$$a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + \cdots + (na_n + (n+1)a_{n+1})x^n + \cdots$$
$$= pa_0 + pa_1x + pa_2x^2 + pa_3x^3 + \cdots + pa_nx^n + \cdots$$

என மாறுகிறது.

தொடர்புடைய குணகங்களை சமப்படுத்த கிடைப்பது

$$a_1 = pa_0, 2a_2 + a_1 = pa_1, 3a_3 + 2a_2 = pa_2, \cdots, (n+1)a_{n+1} + na_n = pa_n.$$

(6) இல் உள்ள தொடக்கக் கட்டுப்பாட்டின் படி $a_0 = 1$. ஆகவே

$$a_1 = p,$$
$$a_2 = \frac{a_1(p-1)}{2} = \frac{p(p-1)}{2},$$
$$a_3 = \frac{a_2(p-2)}{3} = \frac{p(p-1)(p-2)}{2\cdot 3},$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_n = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!},$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

மேற்கண்ட மதிப்புகளை சமன்பாடு (7) இல் பிரதியிட

$$y = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots \tag{8}$$

தொடர் (8) ஆனது $|x|<1$ எனில் ஒருங்கும் தொடர் என்பதால் தொடர் (8) ஆனது தகுந்த தீர்வு ஆகும். (5) மற்றும் (8)- ஐ ஒப்பிடுவதாலும், மற்றும் (6) க்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு என்பதாலும் நமக்கு கிடைப்பது , (இங்கு $|x|<1$),

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots \tag{9}$$

இந்த விளைவு (9)-ஐ, ஈருறுப்பு தொடர் (Binomial Series) என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு $1: y' = 2xy$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்ற வடிவிலான அடுக்கு குறி தொடர் தீர்வைக் காண்க. அவ்வாறு கிடைக்கும் தீர்வு ஏற்கனவே தெரிந்த சார்பின் விரிவாக்கம் எனக் காட்டு. மேலும் விடையை, சமன்பாட்டை நேரடியாகத் தீர்ப்பதன் மூலம் சரிபார்.

தீர்வு: $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ என்பது

$y' = 2xy$ இன் ஒரு அடுக்குக்குறி தீர்வு என்போம்.

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots$$

எனவே, $y' = 2xy$ லிருந்து

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots = 2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 2a_3 x^4 + \cdots$$

இருபுறமும் கெழுக்களை சமப்படுத்த,

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ 2a_0 &= 2a_2 \\ 2a_1 &= 3a_3 \\ 2a_2 &= 4a_4 \\ 2a_3 &= 5a_5 \\ 2a_4 &= 6a_6 \\ &\vdots \\ 2a_n &= (n+2)a_{n+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

எல்லா கெழுக்களையும் a_0-ல் கணக்கிட

$$a_2 = a_0$$

$$a_3 = \frac{2}{3}a_1 = 0$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{a_0}{2}$$

$$a_5 = \frac{2}{5}a_3 = 0$$

$$a_6 = \frac{2}{6}a_4 = \frac{a_0}{2\cdot 3}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots$$

அதாவது $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n-1} = \cdots$

மற்றும்

$$a_2 = a_0, a_4 = \frac{a_0}{2!}, a_6 = \frac{a_0}{3!}, \cdots, a_{2n} = \frac{a_0}{n!}, \cdots$$

$$\therefore y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$= a_0 + a_0x^2 + \frac{a_0}{2!}x^4 + \frac{a_0}{3!}x^6 + \cdots + \frac{a_0}{n!}x^{2n} + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right)$$

மேற்கண்ட தீர்வின் வலதுபக்கத்தில் உள்ள தொடர் $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$ என்பது e^{x^2} இன் விரிவு ஆகும். ஆகவே $y = a_0e^{x^2}$.

இப்போது சமன்பாடு $y' = 2xy$ ஐ நேரடியாக தீர்ப்போம். $y' = 2xy$ ஐ $\frac{y'}{y} = 2x$ என எழுதி தொகையிட கிடைப்பது $\ln y = x^2 + \ln a_0$

இங்கு a_0 மாறிலி. எனவே,

$$\frac{y}{a_0} = e^{x^2} \Rightarrow y = a_0e^{x^2}$$

இத்தீர்வும், ஏற்கனவே அடுக்குத் தொடர் முறை மூலம் கண்ட தீர்வும் ஒன்றே என்று சரிபார்க்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2: $xy' = y$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்ற வடிவிலான அடுக்குக் குறி தொடர் தீர்வைக் காண்க. மேலும் சமன்பாட்டை நேரடியாகத் தீர்க்க. இரு தீர்வுகளுக்கும் ஏதேனும் வித்தியாசம் உண்டா?

தீர்வு: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ என்க.

$$\therefore y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

$$xy' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$

$xy' = y$ என்பதால்

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

அதாவது

$$a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + 4a_4 x^4 + \cdots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

இருபுறமும் கெழுக்களை சமப்படுத்த,

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= a_1 \\ a_2 &= 2a_2 \\ a_3 &= 3a_3 \\ &\vdots \\ a_n &= na_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

எல்லா கெழுக்களையும் a_0-ல் கணக்கிட

அதாவது $0=a_0=a_2=a_3=a_4=\cdots$

$$\therefore y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=a_1x$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு $y=a_1x$.

இப்போது சமன்பாடு $xy'=y$ ஐ நேரடியாக தீர்ப்போம்.

$xy'=y$ ஐ $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{x}$ என எழுதி தொகையிட கிடைப்பது

$\ln y=\ln x+\ln a_1$

இங்கு a_1 மாறிலி. எனவே,

$y=a_1x$

இத்தீர்வும், ஏற்கனவே அடுக்குத் தொடர் முறை மூலம் கண்ட தீர்வும் ஒன்றே. எனவே இரு தீர்வுகளுக்கும் வித்தியாசம் ஏதும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 3: $y'=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ என்பதை இரு வழிகளில் தீர்த்து $\sin^{-1}x$ க்கு $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ என்ற அமைப்பிலான தீர்வைக் காண்க. மேலும் இதனை உபயோகித்து

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots$$

எனக் காட்டு.

தீர்வு: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொகையிட

$y=\sin^{-1}x$ ஆகும்.

ஆனால் ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

எனவே,

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x^2)^2 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}x^4 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}x^6 + \cdots$$

தொகையிட,

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

ஆகும். இப்போது $x = \frac{1}{2}$ எனப் பிரதியிட

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7} + \cdots$$

அதாவது

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7} + \cdots$$

பயிற்சி-6

1. $y' + y = 1$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டுக்கு $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்ற வடிவிலான அடுக்கு குறி தொடர் தீர்வைக் காண்க. அவ்வாறு கிடைக்கும் தீர்வு ஏற்கனவே தெரிந்த சார்பாக எழுதுக. மேலும் சமன்பாட்டை நேரடியாகத் தீர்த்து முன்கண்ட விடையுடன் ஒப்பிடுக.

2. $x^2y' = y$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வை $\sum_{n=0} a_n x^n$ என்ற வடிவிலான அடுக்கு குறி தொடர் தீர்வைக் காண்க. மேலும் சமன்பாட்டை நேரடியாகத் தீர்க்க. தீர்த்தபின் இரு தீர்வுகளுக்கும் இடையே ஏதேனும் வித்தியாசம் உண்டா?

3. $y' = 1 + y^2, y(0) = 1$ என்ற நேரியல் அல்லாத வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு $\tan x$ எனக் காண்பி. மேலும் அச் சமன்பாட்டின் அடுக்குக்குறி அமைப்பிலான தீர்வு $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ இல் a_n இன் மதிப்புகளை இப்பாடத்தில் கண்ட முறைப்படி கண்டு $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$ என நிருபி. மேலும் அச்சமன்பாட்டை திரும்ப திரும்ப வகையிட்டு, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ என்ற சூத்திரம் மூலம் a_n ஐக் கண்டுபிடித்து $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$ என நிருபி.

6. பயிற்சி 3 இல் கூறியுள்ள முறைகளின் படி $y' = x - y, y(0) = 0$ என்ற சமன்பாட்டினைத் தீர். மேலும் இத்தீர்வை சமன்பாட்டினை நேரடியாக தீர்ப்பதன் மூலம் கிடைக்கும் தீர்வுடன் ஒப்பிடு.

DR. T.P.M. LIBRARY
MADURAI KAMARAJ UNIVERSITY
299105

அத்தியாயம் 7

இரண்டாம் வரிசை நேரியல் சமன்பாடுகள் : சாதாரண புள்ளிகள்

(Second order linear equations: Ordinary points)

இப்பாடத்தில்

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

என்ற இரண்டாம் வரிசை நேரியல் சமன்பாட்டை கருத்தில் கொள்வோம். இச்சமன்பாட்டில் தீர்வை தெரிந்த எளியச் சார்புகளில் எப்போதாவது காணமுடியும். $P(x), Q(x)$ ஆகியன மாறிலிகளாக உள்ள போதும் மற்றும் சில கணக்குகளில் இது உண்மை. இந்த வகை சமன்பாடுகள் சுத்த கணிதம் (Pure Mathematics) மற்றும் பயன்பாட்டுக் கணிதம் (Applied Mathematics) ஆகியவற்றில் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தன. அத்தகைய சமன்பாடுகளை அடுக்குக்குறி தீர்வு முறையிலேயே தீர்க்க முடியும்.

சமன்பாடு (1) இன் மையக்கருத்து என்னவெனில் x_0 என்ற புள்ளியின் அண்மையில் கெழுக்கள் $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ இன் தன்மையைப் பொறுத்தே, x_0 இடத்து தீர்வின் தன்மை அமையும். இப்பாடத்தில் $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ ஆகியன x_0 புள்ளியிடத்து ஒழுங்கானவை என எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ ஆகிய ஒவ்வொன்றும் x_0 இன் அண்மையில் அடுக்குக்குறி விரிவு பெற்றன.

இத்தகைய நிலையில் x_0 என்ற புள்ளியில் சமன்பாடு (1) இன் சாதாரண புள்ளி எனப்படும் (Ordinary Point). மேலும்

சமன்பாடு (1) இன் ஒவ்வொரு தீர்வும் அப்புள்ளியிடத்து ஒழுங்கானவை. வேறுவிதமாக கூறினால், ஒரு புள்ளியிடத்து கெழுக்களின் ஒழுங்குத்தன்மை அப்புள்ளியிடத்து சமன்பாடு (1) இன் எல்லா தீர்வுகளும் ஒழுங்குத்தன்மையை நிர்ணயிக்கும். அதாவது கெழுக்கள் x_0 இடத்து ஒழுங்கானவை ஆகும். ஒரு புள்ளி சாதாரண புள்ளி அல்ல எனில் அது ஒருமைப் புள்ளி (Singular Point) எனப்படும்.

மேற்கண்ட பத்தியில் கூறிய வாக்கியத்தை நிருபிக்கும் முன் சில எடுத்துக்காட்டுகளை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$$y'' + y = 0 \tag{2}$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம். இச்சமன்பாட்டை திட்டவடிவவிலான சமன்பாடு $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ உடன் ஒப்பிட $P(x) = 0$ மற்றும் $Q(x) = 1$ எனக்கிடைக்கிறது. இந்த சார்புகள் $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ எல்லா புள்ளிகளிடத்தும் ஒழுங்கான சார்புகள். எனவே நாம் அதற்கு

$$y = \sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{3}$$

என்ற வடிவிலான தீர்வைத் தேடுவோம்.

(3) ஐ வகையிட

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \tag{4}$$

மற்றும்

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + 5 \cdot 4 a_5 x^3 + \cdots \tag{5}$$

சமன்பாடுகள் (5) மற்றும் (2) லிருந்து

$$2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + \cdots$$
$$+a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = 0$$
$$(2a_2 + a_0) + (3\cdot 2\cdot a_3 + a_1)x + (4\cdot 3a_4 + a_2)x^2 + \cdots$$
$$+\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n\right]x^n = 0$$

இருபுறமும் கெழுக்களை சமப்படுத்த கிடைப்பது

$$2a_2 + a_0 = 0,$$
$$3\cdot 2\cdot a_3 + a_1 = 0,$$
$$4\cdot 3a_4 + a_2 = 0,$$
$$\vdots$$
$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$$
$$\vdots$$

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து $a_2, a_3, a_4, \cdots$ ஆகியவற்றை a_0 அல்லது a_1 இல் பின்ருமாறு எழுதலாம்.

$$a_2 = \frac{-a_0}{2}$$
$$a_3 = \frac{-a_1}{2\cdot 3}$$
$$a_4 = \frac{-a_2}{3\cdot 4} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4}$$
$$a_5 = \frac{-a_3}{4\cdot 5} = \frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$
$$\vdots$$

இக் கெழுக்களை சமன்பாடு (3) இல் பயன்படுத்த நமக்கு கிடைப்பது

$$y = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots$$

$$= a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right] \quad (6)$$

$y_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ எனவும், $y_2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ எடுத்துக் கொள்ள $y = a_0 y_1 + a_1 y_2$ எனக் கிடைக்கிறது. a_0 மற்றும் a_1 இன் எந்த மதிப்புகளுக்கும் (6) ஆனது சமன்பாடு (2) ஐ நிவர்த்தி செய்யும். எனவே $a_0 = 1$ மற்றும் $a_1 = 0$ என எடுத்துக் கொள்ள y_1 ஆனது சமன்பாடு (2) இன் தீர்வாகும். இதுபோல $a_0 = 0$ மற்றும் $a_1 = 1$ எனவும் எடுக்க y_2 ஆனது சமன்பாடு (2) இன் தீர்வாகும். இதற்கு முந்தைய பாடத்தில் கண்டபடி நாம் நோக்க வேண்டியது தொடர்கள் y_1 மற்றும் y_2 ஆகியவற்றின் ஒருங்கல் தன்மை ஆகும். ஆனால் விகிதச் சோதனையின் படி y_1 மற்றும் y_2 ஆகிய இரண்டு தொடர்களுமே எல்லா x-க்கும் ஒருங்கும் தொடர்களாகும். இதனால் அவற்றின் நேரியல் கூடுதலான (6) உம் எல்லா x க்கும் ஒருங்கும் தொடராகும், எனவே (6) ஆனது சமன்பாடு (2) இன் சரியான தீர்வு ஆகும். மேலும் y_1 மற்றும் y_2- ன் விகிதம் $\frac{y_1}{y_2}$ மாறிலியல்ல என்பதால் இரு தீர்வுகளும் ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகள் ஆகும். இதனால் (6) ஆனது சமன்பாடு (2) இன் பொதுத்தீர்வு ஆகும். மேலும் $y(0) = a_0$ மற்றும் $y'(0) = a_1$ எனக் கொண்டால் இன் சிறப்புத் தீர்வு கிடைக்கும்.

y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன முறையே $\cos x$ மற்றும் $\sin x$ இன் விரிவுகள் என்பதை நாம் அறிவோம். எனவே

$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ ஆகும்.

குறிப்பு: மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் கண்டது போல எல்லா கணக்குகளின் அடுக்குக் குறி தீர்வுகளும் ஏற்கனவே தெரிந்த சார்புகளின் விரிவாக்கமாக இருக்கத் தேவையில்லை.

மேலும் அதனைக் காண்பது மிகவும் அரிது. இதனை விளக்க பின்வரும் எடுத்துக் காட்டைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு **2**: பின்வரும் லெஜண்டர்(Legendre equation) சமன்பாட்டைக் கருதுக.

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0 \qquad (7)$$

இங்கு p ஒரு மாறிலி.

(7) ஐ பின்வருமாறு எழுத

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{p(p+1)}{1-x^2}y=0$$

எனக் கிடைக்கும். இதிலிருந்து கெழுககள் சார்புகள் $P(x)=-\frac{2x}{1-x^2}, Q(x)=\frac{p(p+1)}{1-x^2}$ எனக்கிடைகிறது.

மேலும் $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ ஆகிய இரண்டும் பூச்சியத்தில் ஒழுங்கான சார்புகள் ஆகும். இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில் பூச்சியம் ஒரு சாதாரண புள்ளி என்பது ஆகும். இதனால் (7) க்கு $y=\sum a_n x^n$ என்ற வடிவிலான தீர்வை எதிர்பார்ப்போம்.

$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ஐ இருமுறை வகையிட

$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ எனவும்

$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$ எனவும்

கிடைக்கும்.

எனவே

$$-x^2 y'' = -x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

$$= -x^2 \left[1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 + 4\cdot 5a_5 x^3 + \cdots \right]$$

$$= -\left[1\cdot 2a_2 x^2 + 2\cdot 3a_3 x^3 + 3\cdot 4a_4 x^4 + 4\cdot 5a_5 x^5 + \cdots \right]$$

$$= -\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^n$$

மற்றும்

$$-2xy' = -2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$= -2x \left[a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots \right]$$

$$= -2 \left[a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + 4a_4 x^4 + \cdots \right]$$

$$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

மேலும்

$$p(p+1)y = p(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1) a_n x^n$$

$-x^2 y'', -2xy'$ மற்றும் $p(p+1)y$ இன் மதிப்புகளை (7)இல் பிரதியிட

$$y'' - x^2 y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n \tag{8}$$

$$-2\sum_{n=2}^{\infty}na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}p(p+1)a_n x^n = 0$$

இருபுறமும் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த கிடைப்பது

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = -(n-1)na_n - 2na_n + 2a_n$$

$$= -\left[n^2 - n + 2n - 2\right]a_n$$

$$= -(n^2 + n - 2)a_n = -(n+2)(n-1)a_n$$

$$a_{n+2} = \frac{-(n+2)(n-1)a_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{-(n-1)}{n+1}a_n$$

$$\therefore a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \tag{9}$$

$a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots$ ஆகியவற்றை (9) ஐப் பயன்படுத்தி a_0 அல்லது a_1 இல் பின்வருமாறு காணலாம்.

$$a_2 = \frac{-p(p+1)}{1\cdot 2}a_0 = \frac{-p(p+1)}{2!}a_0$$

$$a_3 = \frac{-(p-1)(p+2)}{2\cdot 3}a_1 = \frac{-(p-1)(p+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = \frac{-(p-2)(p+3)}{3\cdot 4}a_2 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4\cdot 5}a_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1$$

$$a_6 = \frac{-(p-4)(p+5)}{5\cdot 6}a_4 = -\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0$$

$$a_7 = \frac{-(p-5)(p+6)}{6\cdot 7}a_5$$

$$= -\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{6!}a_1$$

....

....

மேற்கண்ட கெழுக்களின் மதிப்புகளை $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ இல் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1 x - \frac{p(p+1)}{2!}a_0 x^2 - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1 x^3$$

$$+ \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0 x^4 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1 x^5$$

$$- \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0 x^6$$

$$- \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{6!}a_1 x^7 + \cdots$$

அதாவது

$$y = a_0\left[1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4 + \cdots\right] \qquad (10)$$

$$+ a_1\left[x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 + \cdots\right]$$

சமன்பாடு (7) இன் தீர்வு (10) ஆகும்.

$$y_1 = 1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4$$

$$- \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0 x^6 + \cdots$$

மற்றும்

$$y_2 = x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 + \cdots$$

என எடுத்துக்கொள்வோம்.

எனவே $y = a_0 y_1 + a_1 y_2$ என மாறுகிறது.

தொடர் y_1 க்கு விகிதச் சோதனையைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\left|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = \left|\frac{-(p-2n)(p-2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}x^2\right|$$

$$= \left|\frac{\left(\frac{p}{n}-2\right)\left(\frac{p}{n}-2+\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}x^2\right|$$

p முழு எண் அல்ல எனவும் $n \to \infty$ எனவும் கொண்டால்

$$\left|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right| \to |x|^2.$$

எனவே x இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர் y_1 இன் ஒருங்கல் ஆரம் மிகை மதிப்புடையது. இது போலவே $2n$ க்கு பதில் n எனபிரதியிட

$$\left|\frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n}\right| \to |x|^2$$

என்பதால் தொடர் y_2 இன் ஒருங்கல் ஆரம் மிகை மதிப்புடையது. இவற்றிலிருந்து நாம் அறிவது என்னவெனில் ஆனது a_0 மற்றும் a_1 இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கு (7)-க்கு

(10) ஒரு செல்லத்தக்க தீர்வாகும். மேலும் y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன சிறப்புத்தீர்வுகளாகும்.

குறிப்பு: **(1)** மேற்கண்ட கணக்கின் தீர்வு ஏற்கனவே தெரிந்த சார்பின் விரிவாக்கம் அல்ல என்பதை நாம் நன்கு அறிவோம்.

குறிப்பு: **(2)** சமன்பாடு (10) இல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகள் லெஜண்டர் சார்புகள் எனப்படும். மேலும் அவை எப்போதும் எளிதான சார்புகள் அல்ல.

குறிப்பு: **(3)** p ஒரு மிகை முழு எண் எனில் y_1 அல்லது y_2 இவற்றில் ஒன்று முடிவுறு தொடராக மாறும். உதாரணமாக p ஒரு இரட்டைப்படை முழு எண் எனில் y_1 ஒரு முடிவுறு தொடராகவும், p ஒரு ஒற்றைப்படை எண் எனில் y_2 ஒரு முடிவுறு தொர்டராகவும் அமையும். இக்குறிப்பிலிருந்து அறிவது என்னவெனில் (7) ன் சிறப்புத்தீர்வுகளை லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்போம்.

தேற்றம் A:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{11}$$

என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் சாதாரணப் புள்ளி (regular point) x_0 என்க. மேலும் a_0 மற்றும் a_1 என்பன எதேச்சை மாறிலிகள் எனில் $y(x_0) = a_0$ மற்றும் $y'(x_0) = a_1$ என்ற தொடக்க நிபந்தனைகளை நிவர்த்தி செய்யக்கூடியதும் x_0 புள்ளியிடத்து ஒழுங்கானதும் அதன் ஒரு அண்மையில் ஒழுங்கானதுமான ஒரு ஒருமைத்தன்மையுடைய சார்பு (unique function) $y(x)$ என்ற தீர்வு சமன்பாட்டுக்கு உண்டு. மேலும் $R > 0, |x - x_0| < R$ என்ற இடைவெளியில் $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ ஆகியனவற்றின் அடுக்குக்குறி விரிவாக்கம்

செல்லத்தக்கது எனில் அதே இடைவெளியில் இத்தீர்வின் அடுக்குக்குறி விரிவாக்கமும் செல்லத்தக்கது.

நிருபணம்: நம் வசதிக்கு ஏற்றாற்போலவும் மற்றும் எளிமைக்காகவும் $x_0 = 0$ என எடுத்துக் கொள்வோம். இதனால் பொதுமைத் தன்மை (without loss of generality) மாறாது. அடுக்குக்குறி விரிவாக்கத்தை $(x - x_0)$ - ல் எழுதுவதற்கு பதில் x-ல் எழுதலாம். இத்தகைய சிறிய எளிமையான சுருக்கத்தினால் $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ ஆகியன ஆதியில் ஒழுங்கான சார்புகளாகவும், மேலும் அவற்றின் அடுக்குக்குறி விரிவாக்கம்

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots \qquad (12)$$

மற்றும்

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots \qquad (13)$$

எனவும் அமையும். மேலும் அவ்விரிவாக்கங்கள் $|x - x_0| = |x| < R, (R > 0)$ - ல் ஒருங்கும் தன்மை உடையன. தொடக்க நிபந்தனைகளை நினைவில் நிறுத்தி (11) க்கு, ஒருங்கல் ஆரம் R உடையதும்

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (14)$$

என்ற வடிவிலானதுமான தீர்வை காண முற்படுவோம். (14) ஐ வகையீடு செய்ய

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \qquad (15)$$

மீண்டும் (15) ஐ வகையீடு செய்ய

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + \cdots \qquad (16)$$

இப்போது

$$P(x)y' = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$
$$= \left[P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \cdots\right]\left[a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots\right]$$
$$= P_0 a_1 + \left(P_1 a_1 + P_0 2a_2\right)x + \left(P_2 a_1 + P_1 \cdot 2a_2 + P_0 \cdot 3a_3\right)x^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{n}\left[\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(k+1)a_{k+1}\right]x^n \qquad (17)$$

இதுபோலவே

$$Q(x)y = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} a_k\right]x^n \qquad (18)$$

(16) (17), மற்றும் (18)ஐ (11) ல் பிரதியிட்டு உறுப்பு வரிசைகிரமமாக கூட்ட கிடைப்பது

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(k+1)a_{k+1}\right]x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right]x^n = 0$$

அதாவது

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(k+1)a_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right]x^n = 0$$

இருபுறமும் குணகங்களைச் சமன்படுத்த கிடைப்பது

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(k+1)a_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k = 0$$

அதாவது

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}(k+1)a_{k+1} + q_{n-k}a_k\right] \qquad (19)$$

என்ற a_n-க்கு மீள வரும் சூத்திரம் (recursion formula) கிடைக்கும்.

இப்போது $a_2, a_3, a_4, \cdots$ ஆகியவற்றை பின்வருமாறு a_0 மற்றும் a_1 ல் விரித்து எழுதுவோம்.

$$\begin{aligned}
2a_2 &= -(p_0 a_1 + q_0 a_0) \\
2\cdot 3a_3 &= -(p_1 a_1 + 2p_0 a_2 + q_1 a_0 + q_0 a_1) \\
3\cdot 4a_4 &= -(p_2 a_1 + 2p_1 a_2 + 3p_0 a_3 + q_2 a_0 + q_1 a_1 + q_0 a_2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

மேற்கண்ட தேவைகளுக்குகிணங்க ஆனது, கொடுக்கப்பட்ட தொடக்க நிபந்தனைகளை நிவர்த்தி செய்யக்கூடிய சமன்பாடு (11) ன் ஒருமைத்தீர்வாகும்.

தேற்றத்தை முழுவதும் நிறைவு செய்ய $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ ஆகியன $|x| < R, R > 0$ எனும் போது ஒருங்கினால் அதே இடைவெளியில், a_0, a_1 −ன் எதேச்சை மதிப்புகளுக்கு

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ஒருங்கும் என நிருபிக்க வேண்டும்.

r என்ற மிகை எண் $r < R$ என இருக்கட்டும். எனவே $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ ஆகியன $|x| = r$ எனும் போது ஒருங்கும் தொடர்கள் ஆகும். மேலும் அத்தொடர்களின்

உறுப்புகள் பூச்சியத்தை நெருங்குவதால், $M>0$ என்ற மாறிலி, எல்லா $n-$ க்கும்

$$|p_n|r^n \le M \text{ எனவும்} \tag{20}$$

$$|q_n|r^n \le M \text{ எனவும்} \tag{21}$$

இருக்கும். இச்சமனிலிகள் (20) மற்றும் (21) ஐ (19)-ல் பிரதியிட

$$\left|(n+1)(n+2)a_{n+2}\right| = \left|-\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k\right]\right|$$

அதாவது

$$(n+1)(n+2)\left|a_{n+2}\right| \le \frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\left|a_{k+1}\right| + \left|a_k\right|\right]r^k$$

$$\le \frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\left|a_{k+1}\right| + \left|a_k\right|\right]r^k + M\left|a_{n+1}\right|r \tag{22}$$

இப்போது $b_0 = |a_0|$ எனவும் $b_1 = |a_1|$ எனவும் மற்றும் $n \ge 0$-க்கு

$$(n+1)(n+2)b_{n+2} = \frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)b_{k+1} + b_k\right]r^k + Mb_{n+1}r \tag{23}$$

எனவும் $b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots$ ஆகியனவற்றை வரையறுப்போம். எல்லா $n-$ க்கும் $0 \le |a_n| \le b_n$ என்பது தெளிவு.

இப்போது

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{24}$$

என்ற தொடர் $x-$ன் எம்மதிப்புகளுக்கும் ஒருங்கும் என காண்போம். (23) ல் $n-$ க்கு பதில் முதலில் $(n-1)$ எனவும் பிறகு $(n-2)$ எனவும் பிரதியிட

$$n(n+1)b_{n+1} = \frac{M}{r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1) b_{k+1} + b_k \right] r^k + M b_n r \qquad (25)$$

எனவும்

$$(n-1)nb_n = \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1) b_{k+1} + b_k \right] r^k + M b_{n-1} r \qquad (26)$$

எனவும் கிடைக்கும்.

(25) ஐ r-ஆல் பெருக்க

$$rn(n+1)b_{n+1} = \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1) b_{k+1} + b_k \right] r^k + M b_n r^2$$

$$= \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1) b_{k+1} + b_k \right] + rM(nb_n + b_{n-1}) + M b_n r^2 \qquad (27)$$

(26) ஐ (27) ல் பயன்படுத்த

$$rn(n+1)b_{n+1} = (n-1)nb_n - M b_{n-1} r + rM(nb_n + b_{n-1}) + M b_n r^2$$

$$= \left[(n-1)n + rMn + Mr^2 \right] b_n \qquad (28)$$

(28)-லிருந்து

$$\left| \frac{b_{n+1} x^{n+1}}{b_n x^n} \right| = \left| \frac{(n-1)n + rMn + Mr^2}{rn(n+1)} \right| |x| = \frac{|x|}{r}$$

$|x| < r$ என்பதால் விகிதச் சோதனைப்படி (ratio test)

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

என்ற தொடர் ஒருங்கும் தொடராகும். மேலும் $0 \le |a_n| \le b_n$ என்பதால் ஒப்பீட்டுச் சோதனைப்(comparision test) படி

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

என்ற தொடர் ஒருங்கும் தொடராகும்.

r என்பது ($|r|<R$ எனில்) ஒரு ஏதேச்சை எண் என்பதால்

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

என்ற தொடர் $|x|<R$ எனில் ஒருங்கும் தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: $(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$ என்ற சமன்பாட்டின் பொதுவான அடுக்குக்குறி தொடர் தீர்வைக் காண். இத்தீர்வை எளிய சார்புகளாக எழுத முடியுமா?

தீர்வு:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் அடுக்குக்குறி தொடர் தீர்வு என்க.

எனவே,

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$$

இந்த y' மற்றும் y'' ன் விரிவுகளை கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$ – ல் பிரதியிட

$$(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^n+2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

இருபுறமும் x^n – ன் குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = -(n-1)na_n - 2na_n + 2a_n$$

$$= -\left[n^2 - n + 2n - 2\right]a_n$$

$$= -(n^2 + n - 2)a_n = -(n+2)(n-1)a_n$$

$$a_{n+2} = \frac{-(n+2)(n-1)a_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{-(n-1)}{n+1}a_n$$

$a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots$ ஆகியவையற்றின் மதிப்பை a_0 அல்லது a_1 ல் பின்வருமாறு காணலாம்.

$$a_2 = a_0$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{3}a_0$$
$$a_5 = -\frac{2}{4}a_3 = 0$$
$$a_6 = -\frac{3}{5}a_4 = \frac{1}{5}a_0$$
$$a_7 = -\frac{4}{6}a_5 = 0$$
$$a_8 = -\frac{5}{7}a_6 = -\frac{1}{7}a_0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

இக்கெழுக்களின் மதிப்புகளை

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots - \text{ ல்}$$

பிரதியிட

$$y = a_0 + a_1 x + a_0 x^2 - \frac{a_0}{3}x^4 + \frac{a_0}{5}x^6 - \frac{a_0}{7}x^8 + \cdots$$

$$= a_0\left(1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^8 + \cdots\right) + a_1 x$$

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

$$y_1 = 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^8 + \cdots \text{ மற்றும்}$$

$$y_2 = x$$

என எடுத்துக் கொள்.

$y = a_0 y_1 + a_1 y_2$ என மாறும். a_0 மற்றும் a_1 ன் எந்த மதிப்புகளுக்கும் $y = a_0 y_1 + a_1 y_2$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஆகும். $a_0 = 1$ மற்றும் $a_1 = 0$ என எடுத்துக்கொண்டால் y_1 ஆனதுகொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடின் தீர்வு ஆகும். இதுபோலவே $a_0 = 0$ மற்றும் $a_1 = 1$ என எடுத்துக்கொண்டால் y_2 ஆனது சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும். அதாவது y_1 மற்றும் y_2 ஆகியன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வுகள் ஆகும். $\tan^{-1} x$ ன் விரிவு

$$\tan^{-1} x = 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} + \cdots$$

என அறிவோம். எனவே பொதுத்தீர்வு

$$y = a_0 \tan^{-1} x + a_1 x$$

என மாறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4: $y'' + y' - xy = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு மூன்று உறுப்புகள் கொண்ட மீளவரும் வரும் சூத்திரம் உடையது என்பதை சரிபார். மேலும்

a) $y_1(0)=1, y_1'(0)=0$

b) $y_2(0)=0, y_2'(0)=1$

என உள்ளவாறு $y_1(x)$ மற்றும் $y_2(x)$ என்ற இரு அடுக்கு குறி தொடர் தீர்வுகளைக் காண்க.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$y''+y'-xy=0 \tag{1}$$

இச் சமன்பாட்டின் அடுக்குக்குறி தொடர் தீர்வு

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{2}$$

என்போம்.

எனவே

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \tag{3}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n \tag{4}$$

(2), (3), (4), ஐ (1) ல் பிரதியிட

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

அதாவது

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

x^n – ன் குணகங்களை சமப்படுத்த கிடைப்பது

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=-(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}$$

அதாவது

$$a_{n+2}=\frac{-(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \tag{5}$$

(5) ஆனது மூன்று உறுப்புகள் கொண்ட மீள வரும் சூத்திரம் ஆகும். எனவே கணக்கின் முதல் பகுதி சரிபார்க்கப்படுகிறது.

$$a_2 = -\frac{a_1}{2}$$

$$a_3 = \frac{-2a_2 + a_0}{2\cdot 3} = \frac{-a_2}{3} + \frac{a_0}{2\cdot 3} = \frac{a_1}{2\cdot 3} + \frac{a_0}{2\cdot 3}$$

$$a_4 = \frac{-3a_3 + a_1}{3\cdot 4} = \frac{-a_3}{4} + \frac{a_1}{3\cdot 4} = \frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4}$$

$$a_5 = \frac{-4a_4 + a_2}{4\cdot 5} = \frac{-a_4}{5} + \frac{a_2}{2\cdot 5} = \frac{-4a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

இக்கெழுக்களின் மதிப்புகளை

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \text{ ல்}$$

பிரதியிட

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_1}{2}x^2 + \left(\frac{a_1}{2\cdot 3} + \frac{a_0}{2\cdot 3}\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4}\right)x^4 + \left(\frac{-4a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right)x^5 + \cdots$$

அதாவது

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} - \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{4x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right]$$

எனவும்,

$$y_2 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{4x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$ எனவும்

எடுத்துக் கொள்ள, a_0, a_1 ன் எந்த மதிப்புகளுக்கும்

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2$$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வாகிறது.

$a_0 = 1, a_1 = 0$ எனில் y_1 கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

$a_0 = 0, a_1 = 1$ எனில் y_2 கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

மேலும் $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ மற்றும் $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ எனவும் உள்ளது.

பயிற்சி-7

1. $(1 - x^2) y'' - xy' + p^2 y = 0$, ($p$ ஒரு மாறிலி) என்ற செபிச்செவ் (Chebyshev) சமன்பாட்டுக்கு $|x| < 1$ எனில் செல்லுபடியாகும் ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகளைக் காண்.

2. $y'' - 2xy' + 2py = 0$ (p ஒரு மாறிலி) என்ற ஹெர்மைட் சமன்பாட்டின் (Hermite equation) பொதுத்தீர்வு $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, இங்கு

$$y_1(x) = 1 - \frac{2p}{2!} x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!} x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!} x^6 + \cdots$$

மற்றும்

$$y_2(x) = x - \frac{2(p-1)}{2!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5$$

$$- \frac{2^3(p-1)(p-5)(p-7)}{7!}x^7 + \cdots$$

எனக் காட்டு.

3. $y'' + xy' + y = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்ற $y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ என்ற வடிவிலான தீர்வைக் காண்க. இங்கு $y_1(x)$ மற்றும் $y_2(x)$ என்பன அடுக்குக்குறி தொடர்கள்.

4. $y'' + y' - xy = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு மூன்று உறுப்புகள் கொண்ட மீள வரும் சூத்திரம் உடையது என்பதை சரிபார். மேலும்

a) $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$

b) $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$

என உள்ளவாறு $y_1(x)$ மற்றும் $y_2(x)$ என்ற இரு அடுக்கு குறி தொடர் தீர்வுகளைக் காண்க.

அத்தியாயம் 8

ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளிகள்- I
(Regular singular points)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி x_0- யிடத்து $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ இவற்றில் குறைந்தபட்சம் ஒன்று ஒழுங்கானது அல்ல எனில் x_0 ஐ ஒருமைப் புள்ளி என்போம். x_0 ஒருமைப் புள்ளி எனில் அப்புள்ளியிடத்து முந்தைய பாடத்தின் முறைகளை பயன்படுத்த இயலாது. இது மிகவும் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டியதாகும். வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளில் ஒருமைப் புள்ளிகளை விலக்க விரும்பினால், அப்புள்ளிகள் மிகமுக்கியத்துவம் பெறுகிறது. உதாரணமாக

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$$

என்ற சமன்பாடுக்கு $x = 0$ என்பது ஒருமைப் புள்ளி ஆகும். மேலும் $y_1 = x, y_2 = \dfrac{1}{x^2}$ ஆகியன $x > 0$ எனில் ஒன்றைஒன்று சாராத இரு தீர்வுகள் ஆகும். இதனால் $y = c_1x + c_2x^{-2}$ என்பது $x > 0$ என்ற இடைவெளியில் பொதுத்தீர்வாகும். பூச்சியத்து அருகில் வரம்புடைய தீர்வுகளைப் பற்றி அறிய விரும்பினால் அது பொதுத்தீர்வில் $c_2 = 0$ என பிரதியிடக் கிடைக்கும். $(x - x_0)P(x)$ மற்றும் $(x - x_0)^2Q(x)$ ஆகியன ஒழுங்கான சார்புகள் எனில் x_0 என்ற ஒருமைப் புள்ளி சமன்பாடு (1) -ன் ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி என அழைக்கப்படும். உதாரணமாக

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$$

என்ற லெஜன்டர் சமன்பாட்டை கருதுவோம்.

இங்கு

$$P(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, Q(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2}$$ ஆகும்.

$x_0 = 1$ எனில்

$$(1-x)P(x) = -\frac{2x}{1+x}$$

ஆனது $x_0 = 1$ இடத்து ஒழுங்கானது.

இது போலவே $x_0 = 1$, எனில் $(1-x)^2 Q(x) = \frac{-2x(1-x)}{1+x}$. ம் x_0 இடத்து ஒழுங்கானது. எனவே $x_0 = 1$ என்பது லெஜன்டர் சமன்பாட்டின் ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி ஆகும். இது போலவே $x_0 = -1$- ம் ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி ஆகும். மற்றொரு எடுத்துக்காட்டாக பின்வரும் பெசல் சமன்பாட்டை கருதுவோம்.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \qquad (2)$$

இதனை

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0$$

என எழுதலாம்.

$xP(x) = 1, x^2Q(x) = x^2 - p^2$ ஆகிய இரண்டும் $x = 0$ இடத்து ஒழுங்கானவை. என்வே $x = 0$ என்பது பெசல் சமன்பாட்டின்

ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி ஆகும்.

$x = 0$ என்ற புள்ளியிடத்து ஒரு ஒழுங்கு சார்பானது $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ என்ற வடிவில் இருக்கும். எனவே

$$P(x) = \cdots + \frac{b_{-2}}{x^2} + \frac{b_{-1}}{x} + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

$$Q(x) = \cdots + \frac{c_{-2}}{x^2} + \frac{c_{-1}}{x} + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

இவற்றில் x- ன் குறையடுக்குகளில் ஏதேனும் ஒரு கெழு பூச்சியமல்ல எனில் $x = 0$ என்பது சமன்பாடு (1) ன் ஒருமைப் புள்ளி ஆகும். இனி சமன்பாடு (1) க்கு

$$y = x^m \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \cdots \tag{3}$$

(இங்கு m என்பது குறை முழு எண் அல்லது பின்ன எண் அல்லது விகிதமுறா எண்) என்ற வடிவில் தீர்விளை காண விழைவோம். பின்வரும் ஆய்லர் சமன்பாட்டை (Euler equation) கருதுவோம்.

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0 \tag{4}$$

இதனை

$$y'' + \frac{p}{x} y' + \frac{q}{x^2} y = 0 \tag{5}$$

என எழுதலாம். எனவே $xP(x) = p$ மற்றும் $x^2 Q(x) = q$, p, q ஆகிய இரண்டும் பூச்சியம் அல்ல எனில் சமன்பாட்டுக்கு பூச்சியமானது ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி ஆகும். இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் பொதுவாக எல்லா கணக்குகளையும் தீர்க்க பாலமாக அமைகிறது. இத்தகைய பொதுத்தீர்வுகளைக் காண $z = \log x$ என்ற மாற்றத்தைப் பயன்படுத்த சமன்பாடு ஆனது மாறிலிகளை கெழுக்களாகக் கொண்ட சமன்பாடாக மாறுகிறது. இப்போது $z = \log x, x > 0$, எனில்

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dz}\frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$$

y' மற்றும் y'' ஐ சமன்பாடு (4) ல் பிரதியிட

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + \frac{dy}{dz}p + qy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (p-1)\frac{dy}{dz} + qy = 0 \qquad (6)$$

(6) ன் சிறப்புச் சமன்பாடு

$$m^2 + (p-1)m + q = 0 \qquad (7)$$

(7) க்கு m_1, m_2 என்ற இருவேறு தீர்வுகள் உண்டு எனில் (6) ன் தீர்வுகள் $e^{m_1 z} = \left(e^z\right)^{m_1} = x^{m_1}$ மற்றும் $e^{m_2 z} = \left(e^z\right)^{m_2} = x^{m_2}$ ஆகும்.

(7)-க்கு $m_1 = m_2$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு எனில் (7)-ன் தீர்வுகள் x^{m_1} மற்றும் $x^{m_1} \log x$ ஆகும். $x<0$ எனில் $t=-x$ என பிரதியிட்டு சமன்பாட்டை $t>0$ க்கு தீர்க்க வேண்டும்.

மேற்கண்ட ஆய்லர் சமன்பாடும் அதன் தீர்வுகளையும் இரு காரணங்களுக்காக கொடுக்கப்பட்டது. முதல் காரணம், ஆதியை ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளியாக கொண்ட பொதுவான வகைக்கெழு சமன்பாடு என்பது சமன்பாடு (5)-ஐ குறிக்கும். இங்கு p மற்றும் q ஆகியன அடுக்குக்குறி தொடர்களால் மாற்றப்படுகின்றன. அதாவது

$$y'' + \frac{(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots)}{x} y' + \frac{(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots)}{x^2} y = 0 \quad (8)$$

இரண்டாவது காரணம் (5) லிருந்து (8) க்கு மாற, மாறிகளுக்கு பதில் அடுக்குக் குறி தொடர்களை பயன்படுத்த முடியுமெனில் (7) லிருந்து (8) ன் தீர்வுகளுக்கு மாற x^m க்கு பதில் தொடர் (3) ஐப் பிரதியிட வேண்டும். எனவே (8) க்கு ஒன்றையொன்று சாராத (3) வடிவில் உள்ள இரு தீர்வுகள் உண்டு என்று எதிர்பார்க்கலாம் அல்லது ஒரு தீர்வு இந்த வடிவிலும் மற்றது

$$y = x^m \log x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots), x>0 \quad (9)$$

என்ற வடிவிலும் எதிர்பார்க்கலாம். இப்போது $a_0 = 0$ எனில் மற்றும் (9) ல் உள்ள விரிவாக்கத்தில் x – ன் முழு எண் அடுக்கை அடுக்குக்குறி தொடர்களாக காரணிப்படுத்த முடியும் மேலும் அவற்றை x^m உடன் சேர்க்க முடியும். எனவே நாம் எப்போதும் $a_0 \neq 0$ என எடுத்துக் கொள்வோம். (3)- ல் தொடர் "ஃபிரபினஸ் தொடர்" (**Frobenius Series**)

எனப்படும். இந்த வகை தொடர் தீர்வுகளை காணும் முறைக்கு "ஃபிரபினஸ் காரணிப்படுத்தல் முறை" எனப்படும். $m=0$ அல்லது மிகை முழு எண் எனில் ஃபிரபினஸ் தொடரானது அடுக்குக்குறி தொடர்களை உள்ளடக்கியது. இம்முறை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு மூலம் விளக்கப்படுகிறது.

இதற்கு

$$2x^2y''+x(2x+1)y'-y=0 \tag{10}$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இச்சமன்பாட்டை பின்வரும் வடிவில் எழுதுவோம்.

$$y''+\frac{\frac{1}{2}+x}{x}y'+\frac{-\frac{1}{2}}{x^2}y=0 \tag{11}$$

எனவே, $P(x)=\dfrac{\frac{1}{2}+x}{x}$ மற்றும் $Q(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}}{x^2}$ ஆகும். இதனால்

$xP(x)=\dfrac{1}{2}+x$ எனவும் $x^2Q(x)=-\dfrac{1}{2}$ எனவும் ஆகிறது.

இதிலிருந்து $x=0$ என்பது ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி ஆகும். இப்போது ஃபிரபினஸ் தொடர் வடிவ தீர்வை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$y=x^m\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^m+a_1x^{m+1}+a_2x^{m+2}+\cdots \tag{12}$$

எனவே

$$y'=a_0mx^{m-1}+a_1(m+1)x^m+a_2(m+2)x^{m+1}+\cdots$$

மற்றும்

$$y''=a_0m(m-1)x^{m-2}+a_1(m+1)mx^{m-1}+a_2(m+2)(m+1)x^m+\cdots$$

எனவும் கிடைக்கிறது. y, y', y'' ஆகியவற்றை சமன்பாடு (11) ல் பிரதியிட கிடைப்பது.

$$\left[a_0 m(m-1)x^{m-2} + a_1(m+1)mx^{m-1} + a_2(m+2)(m+1)x^m + \cdots\right]$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}+x}{x}\left[a_0 m x^{m-1} + a_1(m+1)x^m + a_2(m+2)x^{m+1} + \ldots\right]$$

$$+ \frac{-\frac{1}{2}}{x^2}\left[a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \cdots\right] = 0$$

அதாவது

$$\left[a_0 m(m-1) + +a_1(m+1)mx + a_2(m+2)(m+1)x^2 + \cdots\right]$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}+x}{x}\left[a_0 m x + a_1(m+1)x^2 + a_2(m+2)x^3 + \cdots\right]$$

$$+ \frac{-\frac{1}{2}}{x^2}\left[a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \cdots\right] = 0$$

இருபுறமும் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த கிடைப்பது.

$$\left.\begin{aligned}
&a_0\left[m(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\right] = 0\\
&a_1\left[(m+1)m + \frac{1}{2}(m+1) - \frac{1}{2}\right] + a_0 m = 0\\
&a_2\left[(m+2)(m+1) + \frac{1}{2}(m+2) - \frac{1}{2}\right] + a_1(m+1) = 0\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

ஏற்கனவே கூறியதைப் போல் $a_0 \neq 0$ என்பதால்

$$m(m+1)+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}=0 \qquad (14)$$

சமன்பாடு (14) உள்ளார்ந்த சமன்பாடு (Indicial equation) எனப்படும். சமன்பாடு (14)-ன் தீர்வுகள் $m_1=1, m_2=-\frac{1}{2}$. மேலும் (12)-ல் உள்ள அடுக்கு m – ன் முடியுமான தீர்வுகள் ஆகும்.

m – ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் (13)-ன் இதர சமன்பாடு களிலிருந்து $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளை a_0 ல் காண்போம்.

$m=1$ எனில்

$$a_1=\frac{-a_0 m}{(m+1)m+\frac{1}{2}(m+1)-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{5}a_0$$

$$a_2=\frac{-a_1(m+1)}{(m+2)(m+1)+\frac{1}{2}(m+2)-\frac{1}{2}}=\frac{4}{35}a_0$$

$$\vdots$$

$m=-\frac{1}{2}$ எனில்

$$a_1=\frac{-a_0 m}{(m+1)m+\frac{1}{2}(m+1)-\frac{1}{2}}=-a_0$$

$$a_2=\frac{-a_1(m+1)}{(m+2)(m+1)+\frac{1}{2}(m+2)-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}a_0$$

$$\vdots$$

இம்மதிப்புகளை சமன்பாடு (12) ல் பிரதியிட, $m=1$ எனில்

$$y=x^m\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)$$

ஆனது

$$y=x\left(a_0-\frac{2}{5}a_0x+\frac{4}{35}a_0x^2+\cdots\right)=a_0x\left(1-\frac{2}{5}x+\frac{4}{35}x^2+\cdots\right)$$

என ஆகிறது.

இப்போது $a_0=1$ எனில்

$$y_1=x\left(1-\frac{2}{5}x+\frac{4}{35}x^2+\cdots\right) \tag{15}$$

ஆகும். இது போலவே $m=-\frac{1}{2}$ எனில்

$$y_2=x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\right) \tag{16}$$

ஆகும். தீர்வுகள் (15) மற்றும் (16) ஆகியன $x>0$ எனில் ஒன்றையொன்று சாராதவை. எனவே $x>0$ எனில் சமன்பாடு (10) ன் பொதுத்தீர்வு

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$x^3(x-1)y''-2(x-1)y'+3xy=0$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் ஒருமைப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்து வகைப்படுத்து.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3(x-1)y'' - 2(x-1)y' + 3xy = 0$$

இச்சமன்பாட்டை

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

என்ற வடிவில் எழுத

$$y'' - \frac{2}{x^3}y' + \frac{3}{x^2(x-1)}y = 0$$

எனவே, $P(x) = -\frac{2}{x^3}, Q(x) = \frac{3}{x^2(x-1)}$. சமன்பாட்டின் ஒருமைப் புள்ளிகள் 0 மற்றும் 1 ஆகும். $x_0 = 0$ என்ற ஒரு ஒருமைப் புள்ளியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$(x-x_0)P(x) = xP(x) = -\frac{2}{x^2}$$

மற்றும்

$$(x-x_0)^2Q(x) = x^2Q(x) = \frac{3}{x-1}.$$

$xP(x)$ மற்றும் $x^2Q(x)$ ஆகிய இரண்டும் $x=0$ ல் பகுமுறைச் சார்புகள் (analytic function) அல்ல. எனவே $x=0$ என்பது ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி அல்ல (irregular singular point).

இப்போது $x_0 = 1$ என்ற ஒருமைப்புள்ளியைக் கருதுவோம்.

$$(x-x_0)P(x) = (x-1)\left(\frac{-2}{x^2}\right) = \frac{-2(x-1)}{x^2}$$

மற்றும்

$$(x-x_0)^2Q(x) = (x-1)^2\left(\frac{3}{x^2(x-1)}\right) = \frac{3(x-1)}{x^2}$$

ஆகிய இரண்டும் $x=1$ இடத்து பகுமுறைச் சார்புகள் ஆகும். எனவே $x=1$ என்பது ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி (regular singular point) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$x=0$ என்பது $y''+(\sin x)y=0$ என்ற சமன்பாட்டின் எத்தகைய புள்ளி என்பதை ஆராய்க.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$y''+(\sin x)y=0$$

இச்சமன்பாட்டை

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

உடன் ஒப்பிட

$P(x)=0, Q(x)=\sin x$ என கிடைக்கிறது. $x=0$ என்பது ஒரு ஒருமைப் புள்ளி. மேலும்

$$(x-x_0)P(x)=xP(x)=0$$

மற்றும்

$$(x-x_0)^2Q(x)=x^2Q(x)=0.$$

எனவே, $xP(x)$ மற்றும் $x^2Q(x)$ ஆகிய இரண்டும் $x=0$ இடத்து பகுமுறைச் சார்புகள் (analytic function) ஆகும். எனவே $x=0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு ஒரு ஒழுங்கான ஒருமை புள்ளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: $x^4 y'' + (\sin x) y = 0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு $x = 0$ என்ற புள்ளியின் தன்மையைக் காண்க.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^4 y'' + (\sin x) y = 0$$

இச்சமன்பாட்டை

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$$

என்ற வடிவில் எழுத

$$y'' + \frac{\sin x}{x^4} y = 0$$

எனவே, $P(x) = 0, Q(x) = \frac{\sin x}{x^4}$.

$x = 0$ எனில்

$$(x - x_0) P(x) = x P(x) = 0$$

மற்றும்

$$(x - x_0)^2 Q(x) = x^2 Q(x) = \frac{\sin x}{x^2},$$

$x \to 0$ எனில் $x^2 Q(x) = \frac{\sin x}{x^2} \to \infty$. எனவே $x^2 Q(x)$ ஆனது $x = 0$ இடத்து பகுமுறைச் சார்பு அல்ல என்பதால் $x = 0$ என்பது ஒழுங்கற்ற ஒருமைப்புள்ளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

$4x^2 y'' + (2x^4 - 5x) y' + (3x^2 + 2) y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் உள்ளார்ந்த சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்து அதன் தீர்வுகளைக் காண்க.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$4x^2y'' + (2x^4 - 5x)y' + (3x^2 + 2)y = 0$$

இச்சமன்பாட்டை

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

என்ற வடிவில் எழுத

$$y'' + \frac{2x^4 - 5x}{4x^2}y' + \frac{3x^2 + 2}{4x^2}y = 0$$

எனவே, $P(x) = \dfrac{2x^4 - 5x}{4x^2} = \dfrac{2x^3 - 5}{4x}, Q(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{4x^2}$.

$xP(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{4}, x^2Q(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{4}$ ஆகிய இரண்டும் $x = 0$ இடத்து பகுமுறைச்சார்புகள். எனவே $x = 0$ என்பது ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி ஆகும்.

$y = x^m\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\right)$ என்க.

$$y = a_0x^m + a_1x^{m+1} + a_2x^{m+2} + \cdots$$

இப்போது வகையிட

$$y' = a_0mx^{m-1} + a_1(m+1)x^m + a_2(m+2)x^{m+1} + \cdots$$

மற்றும்

$$y'' = a_0m(m-1)x^{m-2} + a_1(m+1)mx^{m-1} + \cdots$$

y, y' மற்றும் y'' ஆகியவற்றை கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு x^{m-2} ஆல் இருபுறமும் வகுக்க கிடைப்பது

$$\left[a_0 m(m-1)+a_1(m+1)mx+a_2(m+2)(m+1)x^2+\cdots\right]$$
$$+\left(\frac{2x^3-5}{4}\right)\left[a_0 m+a_1(m+1)x+a_2(m+1)x^2+\cdots\right]$$
$$+\left(\frac{3x^2+2}{4}\right)\left[a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right]=0$$

உள்ளார்ந்த சமன்பாட்டுக்கு, இருபுறமும் மாறிலிகளச் சமப்படுத்த

$$a_0\left[m(m-1)-\frac{5}{4}m+\frac{2}{4}\right]=0$$

$a_0 \neq 0$ என்பதால் உள்ளார்ந்த சமன்பாடு

$$m(m-1)-\frac{5m}{4}+\frac{2}{4}=0$$

ஆகும். இதன் மூலங்கள் $m_1=2, m_2=\frac{1}{4}$ ஆகும்.

பயிற்சி-**8**

1. பின்வரும் வகைக்கெழு சமன்பாடுகளுக்கு ஒருமைப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்து வகைப்படுத்துக.

   (a) $x^2(x^2-1)^2y''-x(1-x)y'+2y=0$

   (b) $x^2y''+(2-x)y'=0$

2. பின்வரும் வகைக்கெழு சமன்பாடுகளுக்கு $x=0$ என்பதன் தன்மையை ஆராய்க.

   (a) $y''+(\sin x)y=0$

   (b) $x^3y''+(\sin x)y=0$

   (c) $xy''+(\sin x)y=0$

3. பின்வரும் வகைக்கெழு சமன்பாடுகளுக்கு $x=0$ என்பது ஒருமைப் புள்ளி எனக் காட்டி அவற்றிற்கு ஒன்றையொன்று சாராத இரு ஃபிரபின்ஸ் தீர்வுகளைக் காண்க.

(a) $4xy'' + 2y' + y = 0$

(b) $2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0$

4. பெசல் சமன்பாட்டில் $p=0$ எனில் $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$. இச் சமன்பாட்டின் உள்ளார்ந்த சமன்பாட்டுக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டும் உண்டு எனக் காட்டி இப்பாடத்தில் பயின்ற முறைப்படி

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

என்பது ஃபிரபினஸ் தொடர் தீர்வு எனக் கொணர்க.

5. $x^3y'' + (\cos 2x - 1)y' + 2xy = 0$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் உள்ளார்ந்த சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்து அதன் மூலங்களைக் காண்க.

அத்தியாயம் 9

ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளிகள் II

இப்பாடத்தில் பின்வரும் பொதுவான இரண்டாம் வரிசை நேரியில் வகைக்கெழு சமன்பாட்டை தீர்ப்பதைப் பற்றி பார்ப்போம்.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

குறிப்பாக $x = 0$ என்ற ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளியின் அருகில் (1) ன் தீர்வைப் பற்றி விவாதிப்போம். முந்தைய பாடத்தில் கண்டதின் படி (1) க்கு

$$y = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \qquad (2)$$

என்ற ஃபிரபினஸ் தொடர் அமைப்பிலான தீர்வைக் காண்போம். சமன்பாடு (2) ல் $a_0 \neq 0$ மற்றும் m தீர்மானிக்கப்பட வேண்டிய எண். $x > 0$ என்ற இடைவெளியில் தீர்வின் இயல்பைப் பற்றியே விவரிப்போம்; ஏனெனில் $x < 0$ என்ற இடைவெளியில் தீர்வின் இயல்பை அறிய $t = -x$ என பிரதியிட்டு கிடைக்கக் கூடிய சமன்பாட்டிற்கு $t > 0$ க்கு தீர்வு கண்டால் போதும்.

$xP(x)$ மற்றும் $x^2Q(x)$ ஆகியன $x = 0$ இடத்து ஒழுங்கானவை. மேலும் அவற்றிற்கு $|x| < R, (R > 0)$ எனில்

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \; x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \qquad (3)$$

என்ற அடுக்குக் குறி தொடர் விரிவாக்கங்கள் உண்டு என்ற எடுகோளை எடுத்துக்கொள்வோம். முந்தைய பாடத்தில் கண்ட முறைப்படி (2)-ல் உள்ள m - ன் வெவ்வேறு

மதிப்புகளுக்கு $a_0, a_1, a_2, \cdots$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை கணக்கிட வேண்டும். (2) ஐ பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}$$

இப்போது வகையிட

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n-1}$$

$$= x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m+n-1) x^{m+n-2}$$

$$= x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m+n-1) x^{m+n}$$

(1) ல் உள்ள $P(x)y'$ மற்றும் $Q(x)y$ ஆகியவற்றை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$P(x)y' = \frac{1}{x}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right]\left[x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n}\right]$$

$$= x^{-2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n}\right]$$

$$= x^{m-2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^n\right]$$

$$= x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} a_k (m+k)\right) x^n$$

$$= x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k} a_k (m+k) + p_0 a_n (m+n)\right] x^n$$

$$Q(x)y = \frac{1}{x^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}\right]$$

$$= x^{m-2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]$$

$$= x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right)x^n = x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}a_k + q_0 a_n\right]x^n$$

இப்போது $y'', P(x)y', Q(x)y$ ஆகியவற்றை (1) ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m+n)(m+n-1)x^n$$

$$+x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k}a_k(m+k) + p_0 a_n(m+n)\right]x^n$$

$$+x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}a_k + q_0 a_n\right]x^n = 0$$

இப்போது x^{m-2} ஐ நீக்க

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{a_n\left[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0\right]$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right]\Big\}x^n = 0$$

எனக் கிடைக்கும்.

x^n ன் குணகங்களை சமப்படுத்த கிடைப்பது, a_n - ல் கீழ்க் கண்ட மீள வரும் சூத்திரம் ஆகும்

$$a_n\left[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0\right]$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right] = 0 \qquad (4)$$

(4) லிருந்து கிடைப்பது

$$a_0\left[m(m-1)+mp_0+q_n\right]=0$$
$$a_1\left[(m+1)m+(m+1)p_0+q_0\right]+a_0\left(mp_1+q_1\right)=0$$
$$a_2\left[(m+2)(m+1)+(m+2)p_0+q_0\right]+a_0\left(mp_2+q_2\right)$$
$$+a_1\left[(m+1)p_1+q_1\right]=0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_n\left[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0\right]+a_0(mp_n+q_n)$$
$$+\cdots+a_{n-1}\left[(m+n-1)p_1+q_1\right]=0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$f(m)=m(m-1)+mp_0+q_0$ என பிரதியிட, மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு மாறுகின்றன.

$$a_0 f(m)=0$$
$$a_1 f(m+1)+a_0\left(mp_1+q_1\right)=0$$
$$a_2 f(m+2)+a_0\left(mp_2+q_2\right)+a_1\left[(m+1)p_1+q_1\right]=0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_n f(m+n)+a_0(mp_n+q_n)+\cdots+a_{n-1}\left[(m+n-1)p_1+q_1\right]=0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$a_0\neq 0$ என்பதால் மேற்கண்ட சமன்பாடுகளில் முதல் சமன்பாட் டிலிருந்து

$$m(m-1)+mp_0+q_0=0 \tag{5}$$

எனக்கிடைக்கிறது. இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் m_1, m_2 எனில் இவை சமன்பாடு (1) ன், $x=0$ என்ற ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளியிடத்து அடுக்குகள் (exponents) ஆகும்.

தேற்றம் A: சமன்பாடு (1) ன் ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி $x=0$ எனவும் $|x|<R,(R>0)$- ல் $xP(x)$ மற்றும் $x^2Q(x)$ அடுக்குக்குறி விரிவாக்கங்கள் செல்லத்தக்கது எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம். உள்ளார்ந்த சமன்பாடு (5) ன் தீர்வுகள் m_1, m_2 மற்றும் $m_2 \le m_1$ எனில் சமன்பாடு (1)-க்கு குறைந்தபட்சம் ஒரு தீர்வாவது, $0<x<R$ என்ற இடைவெளியில்

$$y_1 = x^{m_1}\sum a_n x^n, \; (a_0 \neq 0) \tag{6}$$

என்றவாறு இருக்கும். மீள வரும் சூத்திரம் (4)-ல் m க்கு பதில் m_1 ஐ எழுத a_n-கள் a_0-ல் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. மேலும் தொடர் $\sum a_n x^n$ ஆனது $|x|<R$ எனில் ஒருங்கும் தொடர் ஆகும். $m_1 - m_2$ ஆனது பூச்சியமாகவோ அல்லது மிகை முழு எண்ணாகவோ இல்லையெனில் சமன்பாடு (1)க்கு அதே இடைவெளியில்

$$y_2 = x^{m_2}\sum a_n x^n, \; (a_0 \neq 0) \tag{7}$$

என்ற வடிவில் இரண்டாவது தீர்வு உண்டு. இங்கு முன்பு போலவே (4)-ல் m க்கு பதில் m_2 ஐ எழுத a_n-ஆனது a_0-ல் தீர்மானிக்கப்படும், $\sum a_n x^n$ ஆனது $|x|<R$ எனில் ஒருங்கும் தொடர்.

வகை 1: $m_1 = m_2$ எனில் இரண்டாவது ஃபிரபினஸ் தீர்வு கிடையாது. $m_1 - m_2$ மிகை முழு எண் எனில் சூத்திரம் (4)-ல் $m_1 = m_2$ என எழுத கிடைப்பது

$$a_n f(m_2+n) = -a_0(m_2 p_n + q_n) - \cdots - a_{n-1}[(m_2+n-1)p_1 + q_1] \tag{8}$$

சில மிகைமுழு எண்களுக்கு $f(m_2+n)=0$ எனும் போது a_n – களை கணக்கிடுவது கடினம். இதனை அடுத்த இரு வகைகளில் காண்போம்.

வகை **2**: $f(m_2+n)=0$ என்பது சமன்பாடு (8)-வலப்புறம் பூச்சியத்திற்கு சமம் இல்லை எனில் கணக்கை தொடர்வது கடினம். எனவே இரண்டாவது ஃபிரபினஸ் தொடர் தீர்வு இருக்காது. $f(m_2+n)=0$ என்பது (8)-ன் வலதுபுறம் பூச்சியம் எனில் a_n- எந்த மதிப்பையும் பெறும். குறிப்பாக $a_n=0$ என எடுத்துக்கொண்டு கடினம் இல்லாமல் குணங்களை கணக்கிடலாம். எனவே இந்த வகையில் இரண்டாவது ஃபிரபினஸ் தொடர் தீர்வு உண்டு.

பின்வரும் கணக்கிலிருந்து மேற்கண்ட மூன்று வகைகளையும் விவரிக்கலாம். பின்வரும் கணக்கீடு m_1-m_2 பூச்சியமாகவோ அல்லது மிகை முழு எண்ணாகவோ இருக்கும் போது இரண்டாவது தீர்வின் அமைப்பை காண உதவுகிறது. k என்ற மிகை முழு எண்ணை $k=m_1-m_2+1$ என

வரையறுத்தால் சமன்பாடு (5) - ஆனது பின்வருமாறு மாறுகிறது.

$$(m-m_1)(m-m_2)=m^2-(m_1+m_2)m+m_1m_2=0$$

இதில் m- ன் குணகங்களை சமப்படுத்த

$$p_0-1=-(m_1+m_2)$$

அல்லது

$$m_2=1-p_0-m_1$$

எனவே $k=2m_1+p_0$ ஆகும்.

$y_1 = x^{m_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$ எனில் இரண்டாவது தீர்வு $y_2 = vy_1$, இங்கு

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx}$$

$$= \frac{1}{x^{2m_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2} e^{-\int\left(\frac{p_0}{x} + p_1 \cdots\right)dx}$$

$$= \frac{1}{x^{2m_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2} e^{-(p_0 \log x - p_1 x - \cdots)}$$

$$= \frac{1}{x^{2m_1 + p_0}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2} e^{(-p_1 x - \cdots)}$$

$$= \frac{1}{x^k(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2} e^{(-p_1 x - \cdots)}$$

$$= \frac{1}{x^k} g(x)$$

இங்கு $g(x)$ ஆனது $x = 0$ இடத்து பகுமுறைச் சார்பு ஆகும். மேலும் $g(0) = \frac{1}{a_0^2}$. எனவே பூச்சியத்தை உள்ளடக்கிய ஒரு இடைவெளியில்

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, b_0 \neq 0 \text{ ஆகும்.} \tag{9}$$

இப்போது

$$v' = \frac{1}{x^k} g(x) = \frac{1}{x^k}(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)$$

$$= b_0x^{-k} + b_1x^{1-k} + b_2x^{2-k} + \cdots + b_{k-1}x^{-1} + b_kx^0 + \cdots$$

தொகையிட

$$v = \frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1} + \frac{b_1x^{-k+2}}{-k+2} + \cdots + b_{k-1}\log x + b_kx + \cdots$$

எனவே இரண்டாவது தீர்வு

$$
\begin{aligned}
y_2 &= vy_1 \\
&= y_1\left(\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1}+\frac{b_1x^{-k+2}}{-k+2}+\cdots+b_{k-1}\log x+b_kx+\cdots\right) \\
&= b_{k-1}y_1\log x+x^{m_1}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\left(\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1}+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

$$y_2=b_{k-1}y_1\log x+x^{m_2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\left[\because m_2=m_1-k+1\right] \qquad (10)$$

எடுத்துக்காட்டு (2) $x^2y''-3xy'+(4x+4)y=0$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டுக்கு ஒரே ஒரு ஃபிரபின்ஸ் தொடர் தீர்வு மட்டுமே உண்டு எனக்காட்டி மேலும் அதனைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2y''-3xy'+(4x+4)y=0$

$$y=x^m\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)$$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு ஃபிரபினஸ் தொடர் தீர்வு என்க.

இச்சமன்பாட்டில் $xP(x)=-3, x^2Q(x)=(4x+4)$. எனவே $x=0$ என்பது ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி.

$y-$ ஐ வகையீடு செய்ய

$$y'=a_0mx^{m-1}+a_1(m+1)x^m+a_2(m+2)x^{m+1}+\cdots$$

மேலும் வகையீடு செய்ய

$$y''=a_0m(m-1)x^{m-2}+a_1(m+1)mx^{m-1}+a_2(m+2)(m+1)x^m+\cdots$$

y,y',y'' ஆகியவற்றை கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு x^{m-2} ஐ நீக்க கிடைப்பது

$$\left[a_0 m(m-1) + a_1(m+1)mx + a_2(m+2)(m+1)x^2 + \cdots\right]$$
$$+(-3)\left[a_0 m + a_1(m+1)x + a_2(m+2)x^2 + \cdots\right]$$
$$+(4x+4)\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right] = 0$$

எனவே உள்ளார்ந்த சமன்பாடு ($a_0 \neq 0$ என்பதால்)

$$m(m-1) - 3m + 4 = 0$$
$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

இதன் தீர்வுகள் $m_1 = 2, m_2 = 2$. $m_1 = m_2$ என்பதால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு இரண்டாவது ஃபிரபினஸ் தொடர் தீர்வு இல்லை. அதாவது ஒரே ஒரு பிரபினஸ் தீர்வு மட்டுமே உண்டு.

$x, x^2, x^3, \cdots$ ன் குணகங்களை சமப்படுத்த

$$a_1\left[(m+1)m - 3(m+1) + 4\right] + 4a_0 = 0$$
$$a_2\left[(m+2)(m+1) - 3(m+2) + 4\right] + 4a_1 = 0$$
$$a_3\left[(m+3)(m+2) - 3(m+3) + 4\right] + 4a_2 = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$m = 2$ எனில்

$$a_1 = -4a_0$$
$$a_2 = -a_1 = 4a_0$$
$$a_3 = -\frac{4a_2}{9} = -\frac{16}{9}a_0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

எனவே தீர்வு

$$y_1 = x^m\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right)$$

$m = 2$ என்பதால்

$$y_1 = x^2\left(a_0 - 4a_0x + 4a_0x^2 - \frac{16}{9}x^2 + \cdots\right)$$

$a_0 = 1$ எனில்

$$y_1 = x^2\left(1 - 4x + 4x^2 - \frac{16}{9}x^3 + \cdots\right)$$

பயிற்சி-9

1. $4x^2y'' - 8x^2y' + (4x^2+1)y = 0$ என்ற வகைக் கெழு சமன்பாட்டுக்கு ஒரே ஒரு ஃபிரபினஸ் தொடர் தீர்வு மட்டுமே உண்டு எனக் காட்டி அதைக் கண்டுபிடி.

2. பின்வரும் வகைக் கெழு சமன்பாடுகளுக்கு ஒன்றையொன்று சாராத இரு ஃபிரபினஸ் தொடர் தீர்வுகளைக் கண்டுபிடி.

   a) $xy'' + 2y' + xy = 0$
   b) $x^2y'' - x^2y' + (x^2-2)y = 0$
   c) $xy'' - y' + 4x^3y = 0$

3. $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$ என்ற, வரிசை $p = 1$ உடைய பெசல் சமன்பாட்டுக்கு $m_1 - m_2 = 0$ எனக் காட்டி அதற்கு ஒரே ஒரு ஃபிரபினஸ் தொடர் தீர்வு மட்டுமே உண்டு எனக் காட்டு. மேலு\ம் அத்தீர்வைக் கண்டுபிடி.

4. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ என்ற, வரிசை $p = \frac{1}{2}$ உடைய பெசல் சமன்பாட்டுக்கு $m_1 - m_2 = 1$ எனக் காட்டு. அதே நேரத்தில் இதற்கு ஒன்றையொன்று சாராத இரு ஃபிரபினஸ் தொடர் தீர்வுகள் உண்டு எனக் காட்டு. மேலும் அத்தீர்வுகளைக் கண்டுபிடி.

அத்தியாயம் 10

காஸின் அதிவரை கணித சமன்பாடு

(Gauss's Hypergeometric Equation)

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0 \qquad (1)$$

(இங்கு a,b,c மாறிலிகள்) என்ற பெருமை வாய்ந்த காஸின் அதிவரை கணித சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இச் சமன்பாட்டை

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

உடன் ஒப்பிட

$$P(x)=\frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)} \text{ மற்றும்}$$

$$Q(x)=\frac{-ab}{x(1-x)} \text{ எனக் கிடைக்கிறது.}$$

எனவே $x=0$ மற்றும் $x=1$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளும் ஒருமைப்புள்ளிகள் ஆகும்.

$$xP(x)=\frac{c-(a+b+1)x}{1-x} \text{-ம்}$$

$$x^2Q(x)=\frac{-abx}{1-x} \text{-ம்}$$

$x=0$ இடத்து பகு முறைச் சார்புகள் என்பதால் $x=0$ என்பது ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி ஆகும். இது போலவே $x=1$ என்பதும் ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி ஆகும். $x=0$ இடத்து

$$xP(x)=\frac{c-(a+b+1)}{(1-x)}$$
$$=[c-(a+b+1)x][1+x+x^2+\cdots]$$
$$=c+[c-(a+b+1)x+\cdots]$$

மற்றும்

$$x^2Q(x)=\frac{-abx}{1-x}=-abx[1+x+x^2+x^3+\cdots]$$
$$=-abx-abx^2-abx^3+\cdots$$

இப்போது $xP(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n$ மற்றும் $x^2Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^2$ எனில்

$p_0=c$ மற்றும் $q_0=0$ எனவும் கிடைக்கிறது.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் உள்ளார்ந்த சமன்பாடு

$m(m-1)+mp_0+q_0=0$ என்பது

$$m(m-1)+mc=0$$

அல்லது

$m[m-(1-c)]=0$ என ஆகிறது.

இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m_1=0, m_2=1-c$ ஆகும். முந்தைய பாடத்தின் தேற்றம் A ன் படி $m_2-m_1=1-c$ ஒரு மிகை முழு எண் அல்ல (அதாவது $c\neq 0$ அல்லது C ஒரு குறை முழுஎண் அல்ல) எனில் சமன்பாட்டுக்கு

$$y=x^m(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)$$

என்ற வடிவில் ஃபிரபினஸ் தொடர் தீர்வு உண்டு என அறிவோம். இங்கு $m=0$ என்பதால்

$$y=x^0(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \quad (2)$$

இங்கு a_0 ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலி,(2) ஐ (1) பிரதியிட்டு x^n-ன் குணகத்தை பூச்சியத்திற்கு சமப்படுத்த பின்வரும் மீள வரும் சூத்திரம் கிடைக்கும்.

$$a_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} a_n$$

$a_0 = 1$ என எடுத்துக்கொண்டால் (3)

$$a_1 = \frac{ab}{1 \cdot c}$$

$$a_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2c(c+1)}$$

$$a_3 = \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3c(c+1)(c+2)}$$

$$\vdots$$

இக்கெழுக்களை சமன்பாடு (2)-ல் பிரதியிட $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ ஆனது

$$y = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$$

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)b(b+1)(b+2)+\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}x^n$$

என மாறுகிறது.

(4)

தொடர் (4)ஐ அதிவரை கணிதத்தொடர் (hypergeometric series) என்போம். மேலும் இத்தொடரை $F(a,b,c,x)$ எனக் குறிப்போம்.இதனை இவ்வாறு அழைக்கக் காரணம் $a=1$ மற்றும் $c=b$ எனில்

$$F(1,b,b,x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

என்ற தெரிந்த பெருக்குத்தொடர் கிடைப்பதனால் ஆகும்.

a அல்லது b இவற்றில் ஒன்று பூச்சியமாகவோ அல்லது குறை முழு எண்ணாகவோ இருந்தால் தொடர்(4)ஆனது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக மாறும். அப்படியில்லையெனில் விகிதச் சோதனைப்படி, (3)லிருந்து, $|x|<1$ எனில்

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}\right||x|\to 0$$

எனவே $|x|<1$ எனில் தொடர் (4) ஒருங்கும் தொடராகும். இதேபோல cன் மதிப்பு பூச்சியமாகவோ அல்லது குறை முழு எண்ணாகவோ இல்லையெனில் $F(a,b,c,x)$ ஒரு பகுமுறைச் சார்பு ஆகும்.இதனை அதிவரைகணித சார்பு எனப்படும், இதுவே அதிவரை கணித சமன்பாட்டின் மிக எளிய வடிவிலான சிறப்புத் தீர்வு ஆகும்.

$1-c$ன் மதிப்பு பூச்சியமாகவோ அல்லது குறை முழு எண்ணாகவோ (அதாவது c மிகை முழு எண்)அல்ல எனில் அதே தேற்றத்தின் படி $x=0$ன் அருகில் சமன்பாட்டுக்கு முந்தையத் தீர்வைச் சாராத இரண்டாவது தீர்வு உண்டு. இதன் அடுக்கு $m_2=1-c$ ஆகும்.இத் தீர்வினை

$$y = x^{1-c}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

என (1) -ல் நேரடியாக பிரதியிட அடைய முடியும்.

சமன்பாடு (1) ல் உள்ள சார்ந்த மாறி y ஐ z ஆக பின்வரும் மாற்றத்தின் மூலம் மாற்றுவோம்.

அதாவது (1) ல் $y = x^{1-c} z$ என பிரதியிட (1) பின்வருமாறு மாறும்.

$$x(1-x)z'' + [(2-c) - ([a-c+1] + [b-c+1] + 1)x]z' - (a-c+1)(b-c+1)z = 0 \quad (5)$$

(5) ஆனது (1) ல் a, b, c களுக்கு பதில் முறையே $a-c+1, b-c+1$ மற்றும் $2-c$ என பிரதியிட கிடைப்பதால் (5) - ம் அதிவரை கணித சமன்பாடு ஆகும், எனவே

$$z = F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

என்பது பூச்சியத்தின் அருகில் (5) க்கு ஒரு அடுக்கு குறி தொடர் தீர்வாகும். எனவே நாம் விரும்பிய இரண்டாவது தீர்வு

$$\begin{aligned} y &= x^{1-c} z \\ &= x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \end{aligned}$$

ஆகும். இங்கு c ஒரு முழு எண் அல்ல. எனவே அதிவரை கணித சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு

$$y = c_1 F(a, b, c, x) + c_2 x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \quad (6)$$

இந்த பொதுத்தீர்வு பூச்சியத்தின் அருகில் மட்டுமே செல்லத்தக்கது. இப்போது $x = 1$ என்ற ஒருமைப்புள்ளிக்கு அருகில் சமன்பாடு(1) ஐத் தீர்ப்போம். ஏற்கனவே கண்டு பிடித்த தீர்விலிருந்து இத் தீர்வினைக் காண t என்ற புதிய சார்ந்த மாறியை $t = 1 - x$ என அறிமுகப்படுத்துவோம்.

இதனால் $x=1$ எனும் போது $t=0$ என ஆகும். மேலும்(1) ஆனது

$$t(1-t)y''+[(a+b-c+1)-(a+b+1)t]y'-aby=0$$

என மாறுகிறது. இங்கு y ன் வகையீடுகள் t ஐப் பொறுத்தது. இது ஒரு அதிவரை கணித சமன்பாடு என்பதால் இதன் தீர்வை $t=0$ ன் அருகில் (6)ஐ ப் பயன்படுத்தி காணலாம். அதாவது(6)ல் x க்கு பதில் t, c க்கு பதில் $a+b-c+1$ எனவும் எழுத கிடைக்கும். பிறகு t க்கு பதில் $1-x$ என எழுத $x=1$ க்கு அருகில் பொதுத்தீர்வு

$$y=c_1F(a,b,a+b-c+1,1-x) \tag{7}$$
$$+c_2(1-x)^{c-a-b}F(c-b,c-a,c-a-b+1,1-x)$$

இங்கு முக்கியமாக அறிய வேண்டியது $c-a-b$ ஒரு முழு எண் அல்ல என்பதாகும்.

குறிப்பாக

$$(x-A)(x-B)y''+(C+Dx)y'+Ey=0 \tag{8}$$

(இங்கு $A\neq B$) ன் தீர்வு காண x க்கு பதில் t என்ற சாராத மாறியை

$$t=\frac{x-A}{B-A}$$

ஆல் வரையறுக்க $x=A$ என்பது $t=0$ எனவும் $x=B$ எனில் $t=1$ எனவும் குறிக்கும். இத்தகைய உருமாற்றத்தால் (8)ஆனது

$$t(1-t)y''+(F+Gt)y'+Hy=0$$

என மாறுகிறது. இங்கு F,G,H என்பன சில மாறிலிகளின் சேர்ப்பு ஆகும். a,b,c களை

$$F=c, G=-(a+b+c), H=-ab$$

என வரையறுக்க இதுவும் ஒரு அதிவரை கணித சமன்பாடு ஆகும். எனவே $t=0$ மற்றும் $t=1$ (அதாவது $x=A$ மற்றும் $x=B$) இடத்து இதனைத் தீர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு1. பின்வரும் சமன்பாட்டில் இடப்புறத்தின் விரிவாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி சரிபார்.

$$\log(1+x) = xF(1,1,2,-x)$$

தீர்வு: $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ என அறிவோம்.

$$F(a,b,c,x)=1+\frac{ab}{1!c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots$$

எனவும் அறிவோம். எனவே $a=1, b=1, c=2$ எனில்

$$F(1,1,2,-x)=1-x+\frac{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{2!2\cdot 3}x^2 - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{3!2\cdot 3\cdot 4}x^3+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3!2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^3+\cdots$$

$$F(1,1,2,-x)=1-x+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots$$

$$\therefore xF(1,1,2,-x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

$$\therefore \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு**2**. $e^x=\lim_{b\to\infty}F\left(a,b,a,\frac{x}{b}\right)$ எனக் காட்டு

தீர்வு:

$$F(a,b,c,x)=1+\frac{ab}{1!c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{2!c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots$$

c க்கு பதில் a வும் x க்கு பதில் $\frac{x}{b}$ என பிரதியிட

$$F\left(a,b,a,\frac{x}{b}\right)=1+\frac{ab}{1!a}\frac{x}{b}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!a(a+1)}\left(\frac{x}{b}\right)^2$$
$$+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!a(a+1)(a+2)}\left(\frac{x}{b}\right)^3+\cdots$$

$$F\left(a,b,a,\frac{x}{b}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}\frac{(b+1)}{b}+\frac{x^3}{3!}\frac{(b+1)(b+2)}{b^2}+\cdots$$
$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\left(1+\frac{1}{b}\right)+\frac{x^3}{3!}\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{2}{b}\right)+\cdots$$

$$\lim_{b\to\infty}F\left(a,b,a,\frac{x}{b}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\left(1+\frac{1}{b}\right)+\frac{x^3}{3!}\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{2}{b}\right)+\cdots\right)$$
$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x$$

எடுத்துக்காட்டு 3

$x(1-x)y''+\left(\frac{3}{2}-2x\right)y'+2y=0$ என்ற வகைக் கெழு சமன்பாட்டுக்கு $x=0$ என்ற ஒருமைப் புள்ளி அருகில் பொதுத் தீர்வினைக் காணக

விடை

$$x(1-x)y''+\left[c-(a+b+1)x\right]y'-aby=0$$

என்ற அதிவரை கணித சமன்பாட்டுக்கு $x=0$ என்ற ஒருமைப் புள்ளிக்கு அருகில் பொதுத்தீர்வு

$$y=c_1F(a,b,c,x)+c_2x^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c,x)$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x(1-x)y''+\left(\frac{3}{2}-2x\right)y'+2y=0$$

எனவே $c=\frac{3}{2}; a+b+1=2; ab=-2$.

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க $a=2, b=-1$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

$$y=c_1F\left(2,-1,\frac{3}{2},x\right)+c_2x^{-\frac{1}{2}}F\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},x\right)$$

ஆனால்

$$F(a,b,c,x)=1+\frac{ab}{1!c}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2$$
$$+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots$$

$$F\left(2,-1,\frac{3}{2},x\right)=1-\frac{2}{\frac{3}{2}}x+\frac{2\cdot3\cdot-1\cdot0}{2!\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}x^2+\frac{2\cdot3\cdot-1\cdot0\cdot1}{3!\frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}x^3+\cdots$$
$$=1-\frac{4}{3}x$$

$\therefore$ பொதுத்தீர்வு

$$y=c_1\left(1-\frac{4x}{3}\right)+c_2x^{-\frac{1}{2}}F\left(\frac{3}{2},\frac{-3}{2},\frac{1}{2},x\right)$$

பயிற்சி-10

1. பின்வரும் கணக்குகளின் இடப்பக்கத்தின் விரிவாக்கத்தைக் கொண்டு சமன்பாட்டை சரிபார்.

(a) $\sin^{-1}x=xF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right)$

(b) $\tan^{-1} x = xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2\right)$

(c) $\sin x = x\left[\lim_{a\to\infty} F\left(a, a, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4a^2}\right)\right]$

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளில் அதன் அருகே கொடுக்கப்பட்ட ஒருமைப்புள்ளிகளின் அருகில் பொதுத்தீர்வைக் காண்.

   (a) $(2x^2 + 2x)y'' + (1 + 5x)y' + y = 0; x = 0$

   (b) $(x^2 - 1)y'' + (5x + 4)y' + y = 0; x = -1$

   (c) $(x^2 - x - 6)y'' + (5 + 3x)y' + y = 0; x = 3$

3. $F'(a, b, c, x) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, x)$ எனக் காட்டு.

4. $\left(1 - e^x\right)y'' + \frac{1}{2}y' + e^x y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வை $x = 0$ என்ற ஒருமைப் புள்ளியிடத்து $t = e^x$ என்ற மாற்றத்தின் மூலம் சாரா மாறியை மாற்றி காண்,

5. $(1 - x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0$, ($p$ ஒரு குறையெண் அல்லாத மாறிலி) என்ற செபிசெவ் சமன்பாட்டை $t = \frac{1-x}{2}$ என்ற மாற்றத்தின் மூலம் அதிவரை கணித சமன்பாடாக மாற்று.மேலும் அதற்கு $x = 1$ என்ற புள்ளியின் அருகில் பொதுத்தீர்வு

$$y = c_1 F\left(p, -p, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} F\left(p + \frac{1}{2}, -p + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$$

என நிருபி.

அத்தியாயம் 11

முடிவிலி புள்ளி

(The point at infinity)

சுத்த கணிதம் மற்றும் பௌதிகத்தில், சாராத மாறியின் மிகப்பெரிய மதிப்புகளுக்கு

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வின் தன்மையைப் பற்றி இப்பாடத்தில் பார்ப்போம். முந்தைய பாடத்தில் படித்த முறையையே இங்கு முடிவிலி புள்ளியின் அருகில் உள்ள தீர்வைப் பற்றி அறிய பயன்படுத்துவோம். இதற்கு

$$t = \frac{1}{x} \tag{2}$$

என்ற எளிய உருமாற்றத்தைப் பயன்படுத்துவோம். (2)ஐ (1) ல் பயன்படுத்தி $t = 0$ ன் அருகில் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து பிறகு $t = \frac{1}{x}$ என பிரதியிட சமன்பாடு (1) க்கு x-ன் அதிக மதிப்புகளுக்கு அருகில் தீர்வு கிடைக்கும். இத்தகைய மாற்றத்தால்

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{dy}{dt}\left(-t^2\right) = -t^2\frac{dy}{dt} \tag{3}$$

மற்றும்

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \left(-t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(-t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt}\right)\left(-t^2\right) \qquad (4)$$

(2), (3), (4) ஐ (1) ல் பிரதியிட

$$\left(-t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt}\right)\left(-t^2\right) + P\left(\frac{1}{t}\right)\left(-t^2 \frac{dy}{dt}\right) + Q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0$$

$$t^4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} - t^2 P\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dy}{dt} + Q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\right]\frac{dy}{dt} + \frac{Q\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4} y = 0$$

அதாவது

$$y'' + \left(\frac{2}{t} - \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\right) y' + \frac{Q\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4} y = 0 \qquad (5)$$

சமன்பாடு (1)-ல் $x = \infty$ என்ற புள்ளி சமன்பாடு-ல் $t = 0$ -க்கு இணையான புள்ளி, எனவே சமன்பாடு (5)ல் என்பது சாதாரண புள்ளி,ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி (மற்றும் அடுக்குகளுடன்) அல்லது ஒழுங்கற்ற ஒருமைப்புள்ளியாக இருப்பின் அதே தன்மையுடன் என்பது சமன்பாடு (1) க்கு அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$$y'' + \frac{4}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0 \qquad (6)$$

என்ற ஆய்லர் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள். இதில் $x = \infty$ என்ற ஒருமைப்புள்ளியின் தன்மையை காண்.

விடை: $x = \frac{1}{t}$ என பிரதியிட சமன்பாடு (6) ஆனது பின்வருமாறு மாறும்.

$$y'' - \frac{2}{t} y' + \frac{2}{t^2} y = 0 \qquad (7)$$

இங்கு $y-$ன் வகையீடுகள் $t-$ஐ பொறுத்தது. $t = 0$ என்பது (7)-ன் ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி ஆகும். எனவே (7)-ன் உள்ளார்ந்த சமன்பாடு

$$m(m-1) - 2m + 2 = 0$$

மற்றும் இதன் தீர்வுகள் $m_1 = 2, m_2 = 1$. இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில் $x = \infty$ என்பது அடுக்குகள் **2** மற்றும் **1** உடைய, சமன்பாடு (6) க்கு ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு**2**

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \qquad (8)$$

என்ற அதிவரைகணித சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள். இதன் ஒருமைப்புள்ளி $x = \infty$-ன் தன்மையைக் காண்.

விடை

சமன்பாடு (8)-க்கு $x = 0$ என்ற ஒருமைப்புள்ளி 0 மற்றும் $1-c$ என்ற அடுக்குகளுடனும் $x = 1$ என்ற ஒருமைப்புள்ளி 0 மற்றும் $c-a-b$ என்ற அடுக்குகளுடனும் உண்டு. $x = \infty$ என்ற ஒருமைப் புள்ளியின் தன்மையைக் காண $x = \frac{1}{t}$ என பிரதியிடுவோம்.

அப்போது

$$y' = -t^2 \frac{dy}{dt}; y'' = t^4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt}$$

எனக் கிடைக்கும். இவற்றை கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிட அச்சமன்பாடு பின்வருமாறு மாறும்.

$$y'' + \left[\frac{(1-a-b)-(2-c)t}{t(1-t)} \right] y' + \frac{ab}{t^2(1-t)} = 0$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் $t = 0$ என்பது ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி ஆகும். அதன் உள்ளார்ந்த சமன்பாடு

$$m(m-1) + (1-a-b)m + ab = 0$$

அல்லது

$$(m-a)(m-b) = 0$$

இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் a மற்றும் b அதாவது $t-$ன் அடுக்குகள் மற்றும் . எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு X=∞என்பது அடுக்குகள் a மற்றும் b உடைய ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி ஆகும்.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட அதிவரைக்கணித சமன்பாட்டின் ஒருமைப்புள்ளிகள் 0,1,∞ ஆகியவற்றின் அடுக்குகள் முறையே 0,1-c மற்றும் 0,c-a-b மற்றும் a மற்றும் b ஆகியன.

எடுத்துக்காட்டு3

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0 \tag{9}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு $x = \infty$ என்ற புள்ளியின் தன்மையைக் காண்.

தீர்வு:

$$s(1-s)\frac{d^2y}{ds^2} + [c-(a+b+1)s]\frac{dy}{ds} - aby = 0 \tag{10}$$

என்ற சாதாரண அதிவரை கணித சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம் இதில் சாராத மாறி s ஐ x க்கு $x = bs$ என மாற்றம் செய்ய சமன்பாடு பின்வருமாறு மாறும்

$$x\left(1-\frac{x}{b}\right)y'' + \left[(c-x) - \frac{(a+1)x}{b}\right]y' - ay = 0 \tag{11}$$

இங்கு $y-$ வகையீடுகள் $x-$ ஐப் பொறுத்தவை. சமன்பாடு (11)-ன் ஒருமைப் புள்ளிகள் $x = 0, x = b$ மற்றும் $x = \infty$ ஆகியன.

$x = b$ என்ற புள்ளியில் சமன்பாடு (11) ஆனது சமன்பாடு (10) லிருந்து வேறுபடுகிறது. $b \to \infty$ என சமன்பாடு (11)-ல் எடுத்துக் கொண்டால் சமன்பாடு (11) ஆனது சமன்பாடு (9) ஆக மாறும்.

எடுத்துக்காட்டு 4

$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ என்ற லெஜன்டர் சமன்பாட்டில்

$x = \infty$ என்ற முடிவிலி புள்ளியின் தன்மையை ஆராய்க.

விடை

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$

$x=\frac{1}{t}$ எனப் பிரதியிட

$$y'=-t^2\frac{dy}{dt};\ y''=t^4\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}$$

எனவே

$$\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\left(t^4\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}\right)-\frac{2}{t}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right)+p(p+1)y=0$$

$$t^2(t^2-1)\frac{d^2y}{dt^2}+\left(2t\left(t^2-1\right)+2t\right)\frac{dy}{dt}+p(p+1)y=0$$

$$t^2(t^2-1)\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}+p(p+1)y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2t}{t^2-1}\frac{dy}{dt}+\frac{p(p+1)}{t^2\left(t^2-1\right)}y=0$$

$t=0$ என்பது மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி. எனவே $x=\infty$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி ஆகும். மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் உள்ளார்ந்த சமன்பாடு

$$m(m-1)-p(p+1)=0$$
$$m^2-m-p^2-p=0$$
$$(m+p)(m-p)-(m+p)=0$$
$$(m+p)(m-p-1)=0$$
$$m=-p,\ p+1$$

$\therefore x=\infty$ என்பது அடுக்குகள் $-p$ மற்றும் $p+1$ அடுக்குகள் கொண்ட ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி.

பயிற்சி-11

1. $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ என்ற பெசல் சமன்பாட்டில் $x = \infty$ என்ற புள்ளியின் தன்மையை ஆராய்க

2. $xy'' + (c - x)y' - ay = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $x = \infty$ ஒரு ஒழுங்கற்ற ஒருமைப்புள்ளி எனக் காட்டு.

3. $xy'' + (c - x)y' - ay = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $x = 0$ என்ற புள்ளி அடுக்குகள் 0 மற்றும் $1 - c$ கொண்ட ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி எனக் காட்டு.

அலகு-III

கணித இயற்பியலின் சில சிறப்புச் சார்புகள் (Some special functions of Mathematical Physics)

அத்தியாயம் 12

லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவை

(Legendre Polynomials)

இந்த அத்தியாயத்திலும் அடுத்த அத்தியாயத்திலும் லெஜண்டர் பல்லுறுப்புக் கோவையை எவ்வாறு வரையறுப்பது என்பது பற்றியும் அதன் சிறப்பு பண்புகளை பற்றியும் பார்ப்போம். கணித இயற்பியலில் லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக்கோவை மிகவும் அதிகப் பயன்பாடுடையது. மேலும் இந்த அத்தியாயத்தில் மாணவர்களின் கவனத்ததை ஈர்க்கும் சில விஷயங்களையும் பார்ப்போம். உதாரணமாக காமா (Gamma) சார்பு மற்றும் $\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$ என்ற சூத்திரம் ஆகியவற்றைப் பார்ப்போம்.

லம்பார்டின் (Lambart's continued fraction) டேஞ்சன்ட்டுக்கான தொடர் பின்னம்

$$\tan x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \dots}}}}$$

மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ போன்ற சில சிறப்புத்தன்மை வாய்ந்த தொடர்களை பதினெட்டாம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில் ஆய்லாரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இத்தகைய தொடர்கள் பெசல் சார்புகளின் பூச்சியங்களுடன்ஆச்சரியப்படும் படியான தொடர்பு உடையன.

இனி நாம் அதிவரை கணித சமன்பாடுமூலம் லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவையை அடைவோம். லெஜன்டர் சமன்பாட்டை பின் வரும் வடிவில் எழுதுவோம்.

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \tag{1}$$

இங்கு n ஒரு குறையற்ற முழு எண். இதன் அடுக்குத் தொடர் தீர்வு

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_n$$

$$=a_0\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\cdots\right]$$

$$+a_1\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+\cdots\right]$$

என அறிவோம். மேலும் இத்தீர்வு $|x|<1$ என்ற இடைவெளியில் பகுமுறைச் சார்பு ஆகும். இருந்த போதிலும் $x=1$ க்கு அருகில் வரம்புடைய தீர்வுகளே அதிகப் பயன்பாடுடையன. நம் வசதிக் கேற்ப சாராத மாறி x ஐ t –ல் $t=\frac{1-x}{2}$ என்ற மாற்றத்தால் மாற்ற $x=1$ என்பது $t=0$ ஐ குறிக்கும். எனவே சமன்பாடு (1) ஆனது பின் வருமாறு மாறும்.

$$t(1-t)y''+(1-2t)y'+n(n+1)y=0 \tag{2}$$

இங்கு y ன் வகையீடுகள் t –ஐப் பொறுத்தவை. சமன்பாடு ஆனது $a=-n, b=n+1$ மற்றும் $c=1$ என்ற அதிவரை கணித சமன்பாடு ஆகும். அதனால் $t=0$ ன் அருகில்

$$y_1 = F(-n, n+1, 1, t) \tag{3}$$

என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை தீர்வு உடையது.பூச்சியம் இடத்து சமன்பாடு (2) ன் அடுக்குகள் இரண்டுமே பூச்சியம் என்பதால் சமன்பாடு (1) ன் இரண்டாவது தீர்வைக் காண முயல்வோம். இந்த இரண்டாவது தீர்வு $y_2 = v_1 y_1$ எனக் கொடுக்கப்படும்.

இங்கு

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dt} = \frac{1}{y_1^2} e^{\int \frac{2t-1}{t(1-t)} dt}$$

$$= \frac{1}{y_1^2 t(1-t)} = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{y_1^2 (1-t)}\right]$$

இங்கு y_1^2 ஆனது மாறிலி உறுப்பு 1 ஐ உடைய பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் வலப்புறத்தில் அடைப்புக் குறிக்குள் உள்ள $\frac{1}{y_1^2(1-t)}$ ஆனது $1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ என்ற வடிவில் உள்ள பகுமுறை சார்பு ஆகும்

எனவே

$$v' = \frac{1}{t}\left(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{t} + a_1 + a_2 t + \cdots$$

$$v = \log t + a_1 t + \cdots$$

$$\therefore y_2 = v y_1 = y_1 \left(\log t + a_1 t + \cdots\right) \text{ ஆகும்.}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{4}$$

y_2-ன் விரிவாக்கத்தில் $\log t$ என்ற உறுப்பு உள்ளதால் $t = 0$ க்கு அருகில் சமன்பாடு (4) வரம்புடையதாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $c_2 = 0$ ஆகும். சமன்பாடு (3)-ல் t –க்கு பதில் $\frac{1-x}{2}$ என பிரதியிட $x = 1$ க்கு அருகில் சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வு வரம்புடையதாகும். மேலும் அது $F\left(-n, n+1, 1, \frac{1}{2}(1-x)\right)$ ன் மாறிலிப் பெருக்கலாக அமையும். இந்த விவரங்களிலிருந்து படி n உடைய லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவை $P_n(x)$ஐ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$P_n(x) = F\left[-n, n+1, 1, \frac{1}{2}(1-x)\right]$$

$$= 1 + \frac{(-n)(n+1)}{1!1}\left(\frac{1-x}{2}\right) + \frac{(-n)(-n+1)(n+1)(n+2)}{2!1\cdot 2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$

$$+ \frac{(-n)(-n+1)(-n+2)(n+1)(n+2)(n+3)}{3!1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1-x}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{n(n+1)(x-1)}{(1!)^2 2} + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2 2^2}(x-1)^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)(n+2)(n+3)}{(3!)^2 2^3}(x-1)^3 + \cdots \tag{5}$$

$$+ \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}(x-1)^n + \cdots$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் வலப்புற விரிவாக்கம் n ஒரு இரட்டைப் படை எண் எனில் இரட்டைப் படை படிகளை மட்டுமே கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது n ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருப்பின் ஒற்றைப்படை படிகளை மட்டுமே கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். எனவே $P_n(x)$ ஐ பொதுவாக பின்வரும் வடிவில் எழுதலாம்.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + \cdots \quad (6)$$

$n-$ இரட்டைப்படை எண் எனில் சமன்பாடு (6)-ன் கடைசி உறுப்பு a_0 ஆகும். இது போல $n-$ ஒற்றைப் படை எண் எனில் சமன்பாடு (6)-ன் கடைசி உறுப்பு a_1x ஆகும். சமன்பாடு (5)-ல் $x=1$ எனப் பிரதியிட கிடைப்பது, எல்லா $n-$க்கும் $P_n(1)=1$ எனவும், சமன்பாடு (6)-ல், $x=-1$ எனப் பிரதியிட கிடைப்பது, எல்லா $n-$க்கும் $P_n(-1) = (-1)^n$ ஆகும்.

சூத்திரம் (5) ஐ உபயோகித்து $P_n(x)$ ன் பண்புகளைப் பற்றி அறிவது மிகவும் கடினம், எனவே (5) ஐ விரித்து எழுதி x ன் குணகங்களை ஒன்று சேர்த்து சமன்பாடு (6) ன் வடிவில் எழுதுவோம். ஆனால் இதுவும் தேவையில்லாத அதிகப்படியான வேலையாகும். எனவே (5) லிருந்து a_n ஐக் கண்டு, பிறகு $a_{n-2}, a_{n-4}, a_{n-6}, \cdots$ ஆகியனவற்றை a_n -ல் எழுதலாம். லெஜன்டர் சமன்பாடு

$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y=0$ க்கு

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ தீர்வு எனில்

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

என நாம் அறிவோம். இப்போது p க்கு பதில் n மற்றும் n க்கு பதில் $k-2$ ஐயும் பிரதியிட

$$a_k = -\frac{(n-k+2)(n+k-1)}{(k-1)k} a_{k-2}$$

அதாவது

$$a_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n+k-1)} a_k$$

இப்போது $k = n, n-2, n-4, \cdots$ என பிரதியிட

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} a_n$$

$$a_{n-6} = -\frac{(n-4)(n-5)}{6(2n-5)} a_{n-4} = -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\cdot 4\cdot 6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} a_n$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

இக் கெழுக்களை சமன்பாடு (6) -ல் பயன்படுத்த

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} + \cdots$$

$$= a_n x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} a_n x^{n-4} + $$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\cdot 4\cdot 6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} a_n x^{n-6} + \cdots$$

$$= a_n \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} \right.$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\cdot 4\cdot 6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} x^{n-6} + \cdots$$

$$\left. +(-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)} x^{n-2k} + \cdots \right] \qquad (7)$$

ஆனால்

$$(2n-2k+1)(2n-2k+3)\cdots(2n-3)(2n-1)$$

$$=\frac{(2n-2k+1)(2n-2k+2)(2n-2k+3)\cdots(2n-3)(2n-2)(2n-1)2n}{(2n-2k+2)(2n-2k+4)(2n-2k+6)\cdots(2n-4)(2n-2)(2n)}$$

$$=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-2k+1)}{2^k n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}\cdot\frac{(2n-2k)(2n-2k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-k)(n-k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$$\times\frac{(n-k)(n-k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{(2n-2k)(2n-2k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{(2n)!(n-k)!}{2^k n!(2n-2k)!}$$

மற்றும் (5) லிருந்து $a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$ என அறிவோம். சமன்பாடு லிருந்து x^{n-2k} –ன் குணகத்தை பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2k+1)(-1)^k}{2^k k!(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)}$$

$$=\frac{(-1)^k n(n-1)(n-2)\cdots(n-2k+1)}{\dfrac{k!(2n)!(n-k)!}{(2n-2k)!2^k n!}}$$

$$=\frac{(2n-2k)!2^k n!(-1)^k}{k!(2n)!(n-k)!}\times\frac{n!}{(n-2k)!}$$

$$=\frac{(-1)^k(2n-2k)!2^k(n!)^2}{k!(2n)!(n-k)!(n-2k)!}$$

சமன்பாடு (7) ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{8}$$

இங்கு $\left[\frac{n}{2}\right]$ என்பது $\frac{n}{2}$ ஐ விட குறைவாக உள்ள மிகப்பெரிய முழு எண் ஆகும். இப்போது

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-2k}\right)=(2n-2k)(2n-2k-1)(2n-2k-2)\cdots(n-2k+1)x^{n-2k}$$
$$=\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}$$

எனவே (8) ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-2k}\right)$$
$$=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-2k}\right)$$
$$=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2\right)^{n-k}$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{k}\left(x^2\right)^{n-k}(-1)^k$$

$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{k}\left(x^2\right)^{n-k}(-1)^k$ ல் k ன் வீச்சு எல்லையை n வரை நீட்டிப்போமானால், வரக்கூடிய புதிய உறுப்புகளின் படி n ஐ விட குறைவாக இருப்பதால் அவற்றின் $n-$ஆவது வகைக்கெழு பூச்சியமாகும். இதனால் $P_n(x)$ ல் எந்த மாற்றமும் எற்படாது. எனவே

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^2\right)^{n-k}(-1)^k.$$

ஆனால் ஈருறுப்புத் தேற்றப் படி

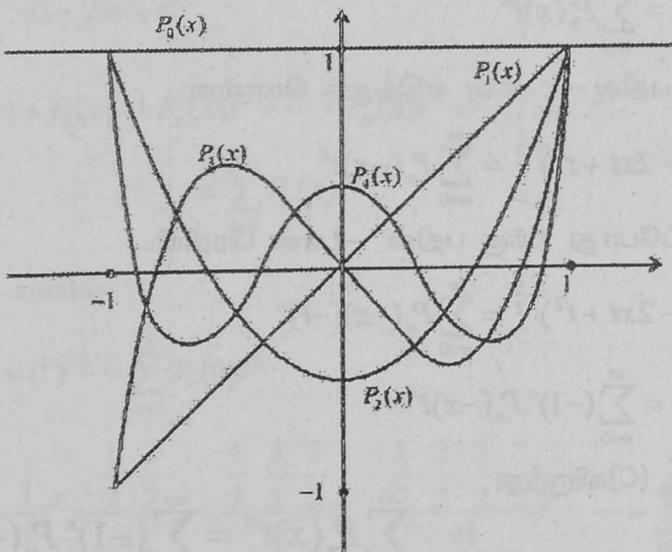
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^2\right)^{n-k}(-1)^k=(x^2-1)^n$ ஆகும் . எனவே

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]. \tag{9}$$

$P_n(x)$-ன் இந்த விரிவாக்கத்தை ரோட்ரிக்கின் சூத்திரம் என்போம். இச்சூத்திரம் மூலம் லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எளிய முறையில் கணக்கிடலாம். உதாரணத்திற்கு

$$P_0(x) = 1; P_1(x) = x; P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right); P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

என எளிதாக காணலாம்.



எடுத்துக்காட்டு

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \cdots + P_n(x)t^n + \cdots$$

என்பதை உண்மை என எடுத்துக் கொண்டு

(a) $P_n(t) = 1$ மற்றும் $P_n(-1) = (-1)^n$ என சரிபார்

(b) $P_{2n+1}(0)=0$ மற்றும் $P_{2n}(0)=\dfrac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}$

என நிருபி

குறிப்பு: $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ என்பது லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவையின்உருவாக்கும் சார்பு என்போம்.

விடை:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$=P_0(x)+P_1(x)t+P_2(x)t^2+\cdots+P_n(x)t^n+\cdots,|x|<t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \qquad \text{(A)}$$

xக்கு பதில் $-x$ என எடுத்துக் கொள்ள

$$(1+2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-x)t^n \qquad \text{(B)}$$

இப்போது tக்கு பதில் $-t$ என பிரதியிட

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-x)(-t)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P_n(-x)t^n \qquad \text{(C)}$$

(A), (C)லிருந்து

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P_n(-x)t^n$$

இருபுறமும் t^n-ன் குணகங்களை சமப்படுத்த

$$P_n(x)=(-1)^n P_n(-x)$$

இங்கு $x=1$ எனில் $P_n(1)=(-1)^n P_n(-1)$ என சரிபார்க்கப்படுகிறது.

(A)-ல் $x=1$ எனில்

$$(1-2t+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$$

$$(1-t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$$

அ தா வ து $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$ இ ரு பு ற மு ம் t^n - ன் குணகங்களைச் சமப் படுத்த $P_n(1)=1$ என்பது சரிபார்க்கப் படுகிறது.

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= P_0(x)+P_1(x)t+P_2(x)t^2+\cdots+P_n(x)t^n+\cdots, |x|<t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

$x=0$, எனில்

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n$$

$$1-\frac{1}{2}t^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}t^4-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}t^6+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{4!}t^8-\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n$$

இருபுறமும் t^{2n+1} ன் குணங்களை சமப்படுத்த கிடைப்பது $P_{2n+1}(0)=0$ மேலும் t^{2n} ன் குணகங்களை சமப்படுத்த

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{(2n-1)}{2}}{n!} = \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}$$

எடுத்துக்காட்டு

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$ என்ற உறவிலிருந்து

(a) இருபுறமும் வகையிடுவதன் மூலம்

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$ எனக்காட்டு.

(b) (a) ல்கண்டபடி இருபுறமும் t^n-ன் குணகங்களை சமப்படுத்தி

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

என்ற மீள வரும் சூத்திரத்தை தருவி.

(c) $P_0(x)=1, P_1(x)=x$ என எடுத்துக் கொண்டு (b)ஐ பயன் படுத்தி $P_2(x), P_3(x)$ மற்றும் $P_5(x)$ ஆகியவற்றை காண்க.

விடை

(a)

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

இருபுறமும் t ஐப் பொறுத்து வகையிட

$$-\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)nt^{n-1}$$

$$(x-t)\frac{1}{(1-2xt+t^2)\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)nt^{n-1}$$

$$(x-t)\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)nt^{n-1}$$

(b) மேற்கண்ட(a)- ல் t^n-ன் குணகங்களை சமப்படுத்த

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

$$\therefore (n+1)P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x) + 2xnP_n(x) - (n-1)P_{n-1}(x)$$
$$= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

(c) $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ என (b) ல் கண்டோம். $n=1$ எனப்பிரதியிட

$$2P_2(x) = 3xP_1(x) - P_0(x) = 3x \cdot x - 1 = 3x^2 - 1$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$n = 2$ எனப்பிரதியிட

$$3P_3(x) = 5xP_2(x) - 2P_1(x)$$
$$= 5x\left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) - 2x$$
$$= \frac{5}{2}(3x^3 - x) - 2x = \frac{15}{2}x^3 - \frac{9}{2}x$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$n = 3$ எனப்பிரதியிட

$$4P_4(x) = 7xP_3(x) - 3P_2(x)$$
$$= 7x \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) - 3 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$= \frac{1}{2}(35x^4 - 21x^2 - 9x^2 + 3)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

இதுபோலவே $n = 4$ எனில்

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$ எனக்காட்டலாம்.

பயிற்சி-12

(1) பின்வரும் படிகளைப் பயன்படுத்தி எடுத்துக்காட்டுகள்(1) மற்றும் (2) க்கு இடையேயான உருவாக்கும் தொடரை வருவி.

(a)ஈருப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \left[1-t(2x-t)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}t(2x-t)+\frac{1\cdot 3}{2^2 2!}t^2(2x-t)^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}t^3(2x-t)^3+\cdots$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}t^{n-1}(2x-t)^{n-1}+\cdots$$

(b)$(2x-t)$ன் வெவ்வேறு படிகளை விரித்து எழுதி, t^n-ன் மொத்த கெழு

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}(2x)^n - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}(2x)^{n-2}+\cdots$$

(c)மேற்குறிப்பிட்ட (b)-ன் கூடுதல்

$$P_n(x)=\sum_{n=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!x^{n-2k}}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}$$

எனக் காட்டு

(2) $\omega=(x^2-1)^n$ எனில் $(x^2-1)w'-2nx\omega=0$ என நிருவு. மேலும் இதனை $(k+1)$ முறை வகையிட்டு

$$(x^2-1)\omega^{k+2}+2(k+1)x\omega^{k+1}+(k+1)k\omega^k-2nx\omega^{k+1}-2(k+1)n\omega^k=0$$

என நிருபி.

அத்தியாயம் 13

லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைளின் பண்புகள்

(Properties of Legendre Polynomials)

செங்குத்துப்பண்பு:

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots \qquad (1)$$

என்பது லெஜண்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தொடர்முறை (Sequence) எனில்

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ எனில்} \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \text{ எனில்} \end{cases} \qquad (2)$$

நிருபணம்: $-1 \leq x \leq 1$ என்ற இடைவெளியில் சார்பு $f(x)$ க்கு குறைந்தபட்சம் தொடர்ச்சியான $n-$ வகையீடுகள் உண்டு என்போம்.

$$I = \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx \text{ என்போம்.}$$

ரோட்ரிக்கின் சூத்திரப்படி, $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$ ஆகும். எனவே,

$$I = \int_{-1}^{1} f(x) \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f(x) \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f(x) d\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2 - 1\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \left\{\left[f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2 - 1\right)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2 - 1\right)^n f'(x) dx\right\}$$

$$= \frac{-1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2 - 1\right)^n f'(x) dx$$

$$= \frac{-1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f'(x) d\left(\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2 - 1\right)^n\right)$$

$$= \frac{-1}{2^n n!} \left\{\left[f'(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2 - 1\right)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f''(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2 - 1\right)^n dx\right\}$$

$$= \frac{-1}{2^n n!} \left\{-\int_{-1}^{1} f''(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2 - 1\right)^n dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f''(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2 - 1\right)^n dx$$

இதேபோல் பகுதி தொகையீட்டை(Integration by parts) தொடர,

$$I = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f^n(x)\left(x^2 - 1\right)^n dx$$ எனக்கிடைக்கும்.

இப்போது $f(x) = P_m(x), m < n$ என எடுத்துக்கொண்டால் $f^n(x) = 0$ ஆகும். எனவே

$$I = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f^n(x)\left(x^2 - 1\right)^n dx = 0$$

இதேபோலவே $n < m$ எனில்

$$I = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{P_m(x)P_n(x)}{2^n n!} dx = 0$$ அதாவது, $m \neq n$ எனில்

$$I = \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0.$$

இப்போது $f(x) = P_n(x)$ என்போம். எனவே

$$f^n(x) = P_n^n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

எனவே

$$I = \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{f^n(x)(x^2-1)^n}{2^n n!} dx$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{(2n)!}{(2^n)^2 (n!)^2} (x^2-1)^n dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx \qquad (3)$$

$x = \sin\theta$ என பிரதியிட

$$I = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{2\cdot(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta d\theta \qquad (4)$$

$$= \frac{2\cdot(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\cdots\frac{2}{3}$$

$$= \frac{2\cdot(2n)!2^n\cdot n!}{2^{2n}n!(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots\cdot 5\cdot 3}$$

$$= \frac{2\cdot(2n)!}{2^n n!(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$$

$$= \frac{2\cdot(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^n n!(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots\cdot 5\cdot 3}$$

$$= \frac{2\cdot(2n)(2n-2)(2n-4)(2n-6)\cdots\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{2^n n!(2n+1)}$$

$$= \frac{2\cdot 2^n\cdot n!}{2^n n!(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}$$

லெஜண்டர் தொடர் (Legendre Series)

எந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையையும் லெஜண்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தொடராக எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

என்பதால் $1, x, x^2, x^3, \cdots$ போன்றவற்றை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$1 = P_0(x)$$
$$x = P_1(x)$$

$$x^2 = \frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3}P_0(x) = \frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)$$
$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x)+\frac{3}{5}x = \frac{2}{5}P_3(x)+\frac{3}{5}P_1(x) = \frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x)$$

அதாவது $P(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ என்ற முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையை

$$P(x)=b_0P_0(x)+b_1P_1(x)+b_2\left[\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)\right]$$
$$+b_3\left[\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x)\right]$$

$$=\left(b_0+\frac{b_2}{3}\right)P_0(x)+\left(b_1+\frac{3b_2}{5}\right)P_1(x)+\frac{2b_2}{3}P_2(x)+\frac{2b_3}{5}P_3(x)$$

என லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளால் எழுதலாம். அதாவது

$$P(x)=\sum_{n=0}^{3}a_nP_n(x)$$

எழுதலாம்.

பொதுவாக ஒவ்வொரு மிகை முழு எண் n-க்கும் $p_n(x)$ என்பது n-படி பல்லுறுப்பகோவை என்பதால் x^n-ஐ $p_o(x)$, $p(a)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ ஆகிய ஆகிய லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் நேரியல் சேர்க்கையாக (Linear Combination) எழுதலாம். எனவே படி உடைய எந்த பல்லுறுப்புக் கோவையையும்

$$P(x)=\sum_{n=0}^{k}a_nP_n(x)$$

என எழுதலாம். மேற்கண்ட விவரங்களிலிருந்து $f(x)$ என்ற எந்த ஒரு சார்பையும் (5)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x)$$

என எழுதலாம். இந்த விரிவாக்கத்தில் உள்ள a_n ஐ (2) ஐப் பயன்படுத்தி காண முடியும்.

(5) ன் இருபுறமும் $P_m(x)$ ஆல் பெருக்கி -1 லிருந்து 1 வரை உறுப்பு கிரமமாக தொகையிட

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_m(x)P_n(x)dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$$

ஆனால்

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \quad \text{எனில்} \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \quad \text{எனில்} \end{cases}$$

என அறிவோம். எனவே

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx = a_m \cdot \frac{2}{2m+1} = \frac{2a_m}{2m+1} \qquad (6)$$

அதாவது

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

குறிப்பு: $f(x)$-க்கு (5) வடிவிலான விரிவாக்கத்தில் இருந்து அதில் உறுப்புகிரமமாக $[-1,1]-$ ல் தொகையிட முடிந்தால் மேற்கண்ட விவரங்களை நியாயப்படுத்த முடியும். $f(x)$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருப்பின் இரு நிபந்தனைகளும் நிவர்த்தியர்கும். ஆனால் $f(x)$ வேறு ஏதேனும் சார்பாக இருந்தால், (5)ல் கூறப்பட்ட கெழுக்கள் (6)ஆல் கொடுக்க முடியுமா என்பது சந்தேகமே.

விரிவாக்கம் (5) ஆனது லேஜண்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் செங்குத்து தன்மை (2) யைப் பொறுத்து.

மீச்சிறு வர்க்க தோராயமாக்கல் (Least square approximation)

$f(x)$ என்பது இடைவெளி $-1 \le x \le 1$ ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு என்க. $f(x)$ ஐ மீச்சிறு வர்க்க முறைப்படி n படி அல்லது அதற்கு குறைவான பல்லுறுப்புக் கோவை $P(x)$- க்கு தோராயமாக்கலை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$I = \int_{-1}^{1} \left[f(x) - P(x) \right]^2 dx$$

என எடுத்துக் கொண்டால் (அதாவது I யை $P(x)$ மற்றும் $f(x)$ இன் வித்தியாசங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் எனில்) நாம் காண வேண்டியது $P(x)$ ன் தகுந்த மதிப்புக்கு I ன் மீச்சிறு மதிப்பு ஆகும். இந்த பல்லுறுப்புக் கோவை மீச்சிறுமமாக்கல் என்பது லெஜன்டர் தொடர் (5) – ல் உள்ள முதல் $(n+1)$ உறுப்புகளின் கூடுதலாகும். அதாவது

$$P(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \cdots + a_n P_n(x).$$

இங்கு $a_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$ ஆகும். இதனைப் பின்வருமாறு நிருபிப்போம்.

படி n அல்லது அதற்குக் குறைவான எந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையையும் $b_0 P_0(x) + b_1 P_1(x) + \cdots + b_n P_n(x)$ என்ற வடிவில் எழுதலாம் என நமக்குத் தெரியும். எனவே

$$I=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-P(x)\right]^2 dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}b_kP_k(x)\right]^2 dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[f(x)\right]^2 dx+\int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{n}b_k^2P_k^2(x)dx-\int_{-1}^{1}2\sum_{k=0}^{n}f(x)b_kP_k(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[f(x)\right]^2 dx+\sum_{k=0}^{n}b_k^2\int_{-1}^{1}P_k^2(x)dx-2\sum_{k=0}^{n}b_k\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[f(x)\right]^2 dx+\sum_{k=0}^{n}b_k^2\left(\frac{2}{2k+1}\right)-2\sum_{k=0}^{n}b_k\left(\frac{2a_k}{2k+1}\right)$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[f(x)\right]^2 dx+\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}\left(b_k-a_k\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}a_k^2$$

இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில் $k=0,1,2,3,\cdots$ க்கு $b_k=a_k$ எனில் I மீச்சிறுமமாகும். இதற்கு தேவையான எடுகோள்கள் $f(x)$ மற்றும் $\left(f(x)\right)^2$ - ம் தொகையிடத்தக்கன என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$2-3x+4x^2$ ஐ லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் எழுது.

விடை: $P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$ என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே $$\therefore 2-3x+4x^2=2P_0(x)-3P_1(x)+4\left(\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{2}P_0(x)\right)$$

$$=4P_0(x)-3P_1(x)+\frac{8}{3}P_2(x)$$

எடுத்துக்காட்டு **2**

லெஜன்டர் சமன்பாடு $(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$ என்பதை $\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'\right]+n\left(n+1\right)y=0$ என எழுதமுடியும். எனவே

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_m'\right]+m\left(m+1\right)P_m=0$$

மற்றும்

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right]+n\left(n+1\right)P_n=0\ .$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி $m\neq n$ எனில்

$$\int_{-1}^{1}P_m\left(x\right)P_n\left(x\right)dx=0$$

என நிறுவுக.

விடை

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_m'\right]+m\left(m+1\right)P_m=0 \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right]+n\left(n+1\right)P_n=0 \qquad (8)$$

$$7\times P_n-(8)\times P_m\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_nP_m'-P_mP_n'\right)\right]+P_mP_n\left[m\left(m+1\right)-n\left(n+1\right)\right]=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_nP_m'-P_mP_n'\right)\right]+P_mP_n\left[\left(m-n\right)\left(m+n+1\right)\right]=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_nP_m'-P_mP_n'\right)\right]=P_mP_n\left[\left(n-m\right)\left(m+n+1\right)\right]$$

-1 லிருந்து 1 வரை இருபுறமும் தொகையிட

$$\left[\left(1-x^2\right)\left(P_n P_m' - P_m P_n'\right)\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} P_m P_n \left[(n-m)(m+n+1)\right] dx$$

$$0 = (n-m)(m+n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx$$

அதாவது

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{0}{(n-m)(m+n+1)} = 0 \qquad (\because m \neq n)$$

எடுத்துக்காட்டு3 $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$ என்ற உருவாக்கும் சார்பிலிருந்து

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx\right) t^{2n}$$

என நிருபித்து $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}$

எனக் காட்டு.

விடை

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n\right]^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\left(P_n(x)\right)^2 + 2\sum_{\substack{m,n=0 \\ m\neq n}}^{\infty} t^{m+n} P_m(x) P_n(x)$$

-1 லிருந்து 1 வரை இருபுறமும் x ஐப் பொறுத்து தொகையிட

$$\int_{-1}^{1}\left(1-2xt+t^2\right)^{-1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx+2\sum_{\substack{m,n=0\\m\neq n}}^{\infty}t^{m+n}\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx \tag{9}$$

$m\neq n$ எனில் $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0$ என்பதால், மேற்கண்ட (9) சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தின் இரண்டாவது உறுப்பு பூச்சியமா கிறது. எனவே அச்சமன்பாடு பின்வருமாறு மாறும்

$$\int_{-1}^{1}\left(1-2xt+t^2\right)^{-1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx \tag{10}$$

சமன்பாடு (10)ன் இடப்புறத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\int_{-1}^{1}\left(1-2xt+t^2\right)^{-1}dx=\left[\frac{\log\left(1-2xt+t^2\right)}{-2t}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\log\left(1-2t+t^2\right)}{-2t}-\frac{\log\left(1+2t+t^2\right)}{-2t}$$

$$=-\frac{1}{2t}\left[\log(1-t)^2-\log(1+t)^2\right]$$

$$=-\frac{1}{2t}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2$$

$$=-\frac{1}{t}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)=\frac{1}{t}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

$$=\frac{1}{t}\cdot 2\left[t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\cdots\right]=2\left[1+\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}+\cdots\right]$$

$$\int_{-1}^{1}\left(1-2xt+t^2\right)^{-1}dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1} \tag{11}$$

(11) ஐ (10) ல் பிரதியிட

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx$$

இருபுறமும் t^{2n} – ன் குணகத்தை சமப்படுத்த

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$$

பயிற்சி-13

1. பின்வருவனவற்றுக்கு லெஜன்டர் தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

   (a) $f(x)=\begin{cases}0; & -1\le x\le 0 \text{ எனில்}\\ x; & 0\le x\le 1 \text{ எனில்}\end{cases}$

   (b) $f(x)=e^x$

2. $P(x)$ என்பது படி n அல்லது அதற்கு மேல் எனவும் $\int_{-1}^{1}x^kP(x)dx=0, k=0,1,2,\cdots,(n-1)$ எனவும் கொண்டு $P(x)=cP_n(x)$ எனக்காட்டு. இங்கு c ஒரு மாறிலி.

3. $P=c_0P_0+c_1P_1+c_2P_2+\cdots+c_nP_n$, (இங்கு $c_0,c_1,\cdots,c_n,P_0,P_1,\cdots,P_n$ ஆகியன மாறிலிகள்) என்பது n படியுடைய பல்லுறுப்புக் கோவை எனில்

$$c_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}P(x)P_k(x)dx.(k=0,1,2,\cdots,n)$$

   எனக் காட்டு

4. $x^4+3x^3-x^2+5x-2$ ஐ லெஜன்டர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் நேரியல் சேர்க்கையாக எழுது.

அத்தியாயம் 14

பெசல் சார்புகள் - காமா சார்பு

(Bessel functions - The Gamma function)

p குறையெண் அல்லாத மாறிலி எனில்

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \qquad (1)$$

என்பது பெசல் சமன்பாடு எனப்படும். மேலும் அதன் தீர்வுகள் பெசல் சார்புகள் எனப்படும்.

$J_p(x)$ சார்பின் வரையறை :

சமன்பாடு (1)ல் y' மற்றும் y ன் குணகங்களை x^2 ஆல் வகுக்க, $P(x) = \frac{1}{x}$ எனவும் $Q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2}$ எனவும் கிடைக்கும். இதனால் $xP(x) = 1$, $x^2Q(x) = x^2 - p^2$ என ஆகிறது. எனவே $x = 0$ என்பது சமன்பாடு (1) ன் ஒழுங்கான ஒருமைப் புள்ளி ஆகும். (1)ன் உள்ளார்ந்த சமன்பாடு $m^2 - p^2 = 0$ ஆகும். இதன் தீர்வுகள் p மற்றும் $-p$ ஆகியனவாகும். எனவே சமன்பாடு (1) ன் தீர்வு $x^p\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்ற வடிவில் இருக்கும்

(இங்கு $a_0 \neq 0$)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p} \qquad (2)$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p-1}$$

மற்றும்

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)(n+p-1)a_n x^{n+p-2}$$

y' மற்றும் y'' ஆகியவற்றை சமன்பாடு (1) ல் பிரதியிட

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+p-1)(n+p)a_n x^{n+p-2} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+p)a_n x^{n+p-1}$$
$$+(x^2-p^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+p} = 0$$

அதாவது

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+p-1)(n+p)a_n x^{n+p-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)a_n x^{n+p}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+p} - \sum_{n=0}^{\infty}p^2 a_n x^{n+p} = 0$$

x^{n+p} ன் குணகத்தை பூச்சியத்துக்கு சமப்படுத்த

$$\left[(n+p-1)(n+p)+(n+p)\right]a_n + a_{n-2} - p^2 a_n = 0 \qquad (3)$$

$$\left[n^2+p^2+2np-n-p+n+p-p^2\right]a_n = -a_{n-2}$$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(2p+n)} \qquad (4)$$

$a_0 \neq 0$ மற்றும் எதேச்சை மாறி என்பதாலும், மற்றும் $a_{-1} = 0$ என்பதாலும் (4) லிருந்து

$$a_1 = \frac{-a_{-1}}{-(2p-1)} = 0$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2p+2)}$$

$$a_3 = \frac{-a_1}{3(2p+3)} = 0$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4(2p+4)} = \frac{a_0}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{5(2p+5)} = 0$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6(2p+6)} = \frac{-a_0}{2\cdot 4\cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}$$

$$\vdots$$

எனவே

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p}$$
$$= a_0 x^p + a_1 x^{p+1} + a_2 x^{p+2} + a_3 x^{p+3} + \cdots$$
$$= a_0 x^p + a_2 x^{p+2} + a_4 x^{p+4} + a_6 x^{p+6} + \cdots$$
$$= a_0 x^p + \left(\frac{-a_0}{2(2p+2)}\right) x^{p+2} + \left(\frac{a_0}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}\right) x^{p+4}$$
$$+ \left(\frac{-a_0}{2\cdot 4\cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}\right) x^{p+6} + \cdots$$

அதாவது

$$y = a_0 x^p \left[1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \cdots\right]$$

$$= a_0 x^p \left[1 - \frac{x^2}{2^2(p+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(p+1)(p+2)} - \frac{x^6}{2^6 3!(p+1)(p+2)(p+3)} + \cdots\right]$$

$$y = a_0 x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} \cdot n!(p+1)(p+2)(p+3)\cdots(p+n)} \tag{5}$$

$a_0 = \dfrac{1}{2^p \cdot p!}$ என பிரதியிட கிடைப்பதை என $J_p(x)$ குறிப்பாம்

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p \cdot p!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} \cdot n!(p+1)(p+2)(p+3)\cdots(p+n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+p}}{2^{2n+p} \cdot n!(p+n)(p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+n)\cdot p!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{n!(p+n)!} \tag{6}$$

$J_p(x)$ ஐ வரிசை $-p$ உடைய முதல் வகை பெசல் சார்பு எனப் படும். அதிக அளவில் பயன்படும் பெசல் சார்புகளான $J_0(x)$ மற்றும் $J_1(x)$ ஆகியன பின்வருமாறு கொடுக்கப்படுகின்றன.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}$$

அதாவது,

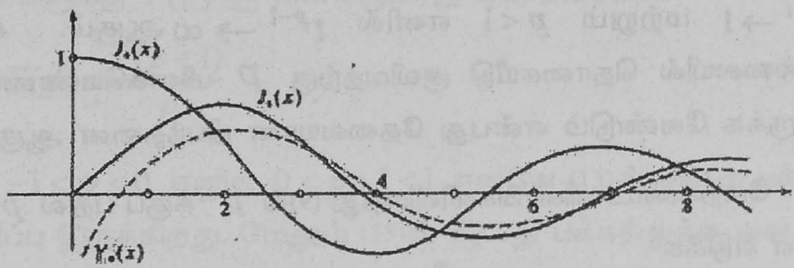
$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 \cdot (3!)^2} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \tag{7}$$

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7 + \cdots \qquad (8)$$

$J_0(x)$ மற்றும் $J_1(x)$ ன் வரைபடங்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.



$J_0(x), J_1(x)$ ன் வரைபடங்கள் அவற்றின் பல பண்புகளை காட்டுகின்றன. ஒவ்வொரு சார்பும் முடிவற்ற எண்ணிக்கையிலான மிகை பூச்சியங்களை(positive zeros) உருவாக்கும் அலைவு பண்பை கொண்டன. இந்த பூச்சியங்கள் $\sin x, \cos x$ ஆகியவற்றிற்கு உள்ளது போல மாறி மாறி அமைகின்றன.

காமா சார்பு

p ஒரு மிகை மெய்யெண்ணாக இல்லாத போது $p!$ ன் அர்த்தத்தை இப்போது புரிந்த கொள்ள முற்படுவோம். அதன் மூலம் $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ எனில் $(p+n)!$ ன் அர்த்தத்தையும் பொதுவாக அறிய முடியும். காமர சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt, \quad t>0 \tag{9}$$

$t\to\infty$ எனில் e^{-t} ஆனது மிக வேகமாக பூச்சியத்தை அடைவதால் p –ன் எந்த மதிப்புக்கும் தொகையீட்டின் மேல் எல்லையில் இந்த தகா தொகை (improper integral) குவியும் தன்மை உடையது. அதே வேளையில் கீழ் எல்லையில் $e^{-t}\to 1$ மற்றும் $p<1$ எனில் $t^{p-1}\to\infty$ ஆகும். கீழ் எல்லையில் தொகையீடு குவிவதற்கு p மிகையெண்ணாக இருக்க வேண்டும் என்பது தேவையான நிபந்தனை ஆகும்.

மேற்கண்ட விவரங்களிலிருந்து (9)ல் p –க்குப் பதில் $p+1$ என எடுக்க

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty t^p e^{-t}dt$$

$$=\int_0^\infty t^p d(-e^{-t})$$

$$=\left[-t^p e^{-t}\right]_0^\infty+\int_0^\infty pt^{p-1}e^{-t}dt$$

$$=p\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$$

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p) \tag{10}$$

$p=1$ எனில்

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1 \tag{11}$$

லிருந்து

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$$
$$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\cdot 1=2!$$
$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\cdot 2\cdot 1=3!$$
$$\Gamma(5)=4\Gamma(4)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

எனவே $n \geq 0$ எனில்

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = (n-1)! \tag{12}$$

இப்போது p ஒரு குறை எண் அல்ல என எடுத்துக் கொண்டு காமா சார்பை விளக்குவோம். $p=0$ எனில் தொகையீடு இருக்காது இருப்பினும் p-ன் பல குறை எண்களுக்கு $\Gamma(p)$ ஐ பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \tag{13}$$

$-1 < p < 0$ எனில் $0 < p+1 < 1$ எனவே (13)ன் வலது பக்க மதிப்பு இருக்கிறது. மேலும் (13)ன் இடது பக்கத்துக்கு வலது பக்க மதிப்பை சமப்படுத்துவோம். இப்போது $-2 < p < -1$ எனில் $-1 < p+1 < 0$. எனவே (13) ஐ வரையறுக்க மீண்டும் உபயோகிக்கலாம். இம்முறையை முடிவில்லாமல் தொடரலாம்.

எனவே (11) லிருந்து

$$\lim_{p\to 0}\Gamma(p) = \lim_{p\to 0}\frac{\Gamma(p+1)}{p} = \pm\infty$$

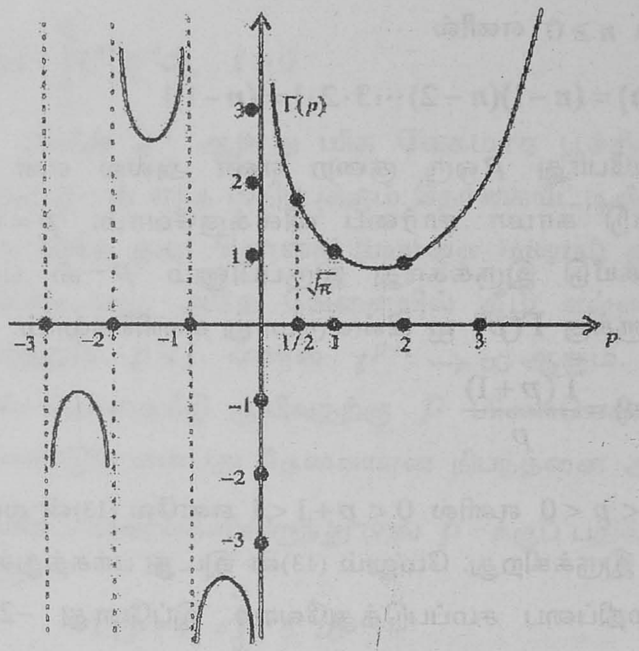
அதாவது

$$\lim_{p\to 0+}\Gamma(p) = \infty$$

மற்றும்

$$\lim_{p\to 0-}\Gamma(p) = -\infty.$$

$\Gamma(p)$ ஆனது எல்லா குறை முழு எண்களிடத்தும் ஒரே மாதிரியான பண்புடையது. இவற்றை பின்வரும் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது



நாம் $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ என தெரிந்து கொள்வோம். $\Gamma(p)$ எப்போதும் பூச்சியமாகாது என்பதால் $\frac{1}{\Gamma(p)}$ நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது ஆகும். இதற்கு $\frac{1}{\Gamma(p)}$ ன் மதிப்பை, $p = 0, -1, -2, \cdots$ க்கு பூச்சியமாக எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இத்தகைய விளக்கங்களிலிருந்து $p!$ ஐ குறை முழு எண் அல்லாத பட்சத்தில்

$$p! = \Gamma(p+1)$$

என வரையறுக்கலாம்.

இதன் தலைகீழி $\frac{1}{p!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$ என்பதும் p ன் எல்லா மதிப்புகளும் நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது. மேலும் p குறை முழுஎண் எனில் அதன் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

பெசல் சமன்பாட்டின் பொதுவான தீர்வு

(The General solution of Bessel's Equation)

இப்பாடத்தின் ஆரம்பத்தில் சன்பாடு (1) க்கு சிறப்புத் தீர்வை $m_1 = p$ எனும்போது கண்டுபிடித்து அதனை $J_p(x)$ எனக்குறிப்பிட்டோம். பொதுத் தீர்வு வேண்டுமெனில் மற்றொரு, சாராத தீர்வு காண வேண்டும். அதாவது அந்த இரண்டாவது தீர்வு $J_p(x)$ ன் மாறிலி பெருக்கமாக இருக்கக் கூடாது. அத்தகைய எந்த தீர்வும் இரண்டாம் வகை பெசல் சார்பு எனப்படும் (Bessel function of the second kind). ஆனால் அத்தகைய இரண்டாவது தீர்வை $m_2 = -p$ க்கு காணும் போது $m_1 - m_2 = 2p$ என்பது பூச்சியமாகவோ அல்லது மிகை முழு எண்ணாகவோ அமையுமெனில் நாம் அதிக சிரமங்களை எதிர் கொள்ள வேண்டியிருக்கும்.

இதனால் நாம் p ஐ முழு எண் அல்ல என எடுத்துக் கொள்வோம். இந்நிலையில் p ஐ $-p$ ஆல் நீக்க எந்தவித கடினமும் இல்லாமல் தீர்வைக் காண முடியும். ஒரேயொரு விதிவிலக்கு என்னவெனில் அங்கு கிடைத்த மீளவரும் சூத்திரம் பின்வருமாறு அமையும்.

$$a(-2p+n)a_n + a_{n-2} = 0.$$

மேலும் $p = \frac{1}{2}$ மற்றும் $n = 1$ எனில் $a_1 = 0$ என எடுக்க வேண்டிய கட்டாயம் கிடையாது, இருப்பினும் நாம் (1)-ன் சிறப்புத்தீர்வைக் காண விரும்புவதால் $a_1 = 0$ என்போம். இதேபோல $p = \frac{3}{2}$ மற்றும் $n = 3$ எனில் அதே சிரமத்தை சந்திக்க வேண்டியுள்ளது. இது போலவே பொதுவாக $-2p + n = 0$ ஆக அமையும் தருவாயில் சிரமங்கள் உண்டு.

இதனால் $0=a_1=a_3=a_5=\cdots$ என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். எனவே சமன்பாடு (1)ன் இரண்டாவது தீர்வு $m=-p$ எனும்போது

$$J_{-p}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}}{n!(-p+n)!} \tag{14}$$

எனக்கிடைக்கும் இத்தொடரின் முதல் உறுப்பு $\frac{1}{(-p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p}$ ஆகும். இதன் மூலம் அறிவது யாதெனில் $x=0$ க்கு அருகில் $J_{-p}(x)$ வரம்பற்றது. அதே சமயத்தில் $J_p(x)$ ஆனது $X=0$ க்கு அருகில் வரம்புடையது என நாம் அறிவோம். எனவே $J_p(x)$ மற்றும் $J_{-p}(x)$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத சார்புகள் ஆகும். $J_p(x)$ மற்றும் $J_{-p}(x)$ ஒன்றையொன்று சாராதவை என்பதால் சமன்பாடு (1) ன் பொதுவான தீர்வு p முழு எண்ணாக இல்லாத போது)

$$y=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x) \tag{15}$$

ஆகும்.

p என்பது $m\geq 0$ என்ற முழு எண் எனில் சூழ்நிலை மிகவும் வித்தியாசமானது ஏனெனில் சமன்பாடு (14) பின்வருமாறு மாறுகிறது.

$$J_{-m}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}}{n!(-m+n)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}}{n!(-m+n)!}+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}}{n!(-m+n)!}$$

$n < m$ எனும் போது $\frac{1}{(-m+n)!}$ ன் மதிப்பு பூச்சியமாகும். எனவே

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}}{n!(-m+n)!}$$

n க்கு பதில் $(m+n)$ என எடுக்க

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+m)-m}}{(n+m)!(-m+n+m)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}}{n!(n+m)!}$$

$$= (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}}{n!(n+m)!}$$

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

மேற்கண்ட உறவிலிருந்து $J_{-m}(x)$ ஆனது $J_m(x)$ ன் மாறிலி பெருக்கல் என்பதால் $J_{-m}(x)$ மற்றும் $J_m(x)$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சார்ந்த சார்புகள் ஆகும். இந்நிலையில்

$$y = c_1 J_{-m}(x) + c_2 J_m(x)$$

என்பது சமன்பாடு (1) ன் பொதுத்தீர்வு அல்ல. எனவே இரண்டாவது தீர்வை பின்வருமாறு காணலாம்.

y_1 என்பது சமன்பாடு (1) ன் ஒரு தீர்வு எனில் y_2 என்ற y_1-ஐச் சாராத (1) ன் இரண்டாவது தீர்வு

$$y_2 = vy_1$$
$$= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx$$
$$= J_m(x) \int \frac{1}{J_m^2(x)} \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= J_m(x) \int \frac{1}{x J_m^2(x)} dx$$

இருப்பினும் இரண்டாவது தீர்வை பின்வரும் வித்தியாசமான முறையில் காண முற்படுவோம். p ஒரு முழு எண்ணாக இல்லாத போது $c_2 \neq 0$ எனில் (15) வடிவில் உள்ள எந்த ஒரு சார்பும் இரண்டாம் வகை பெசல் சார்பு ஆகும். இது $J_{-p}(x)$ யும் உள்ளடக்கியது. இரண்டாம் வகை பெசல் சார்பின் பொதுவான வடிவம்

$$y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \qquad (16)$$

எனவே (15) ஐ பின்வருமாறு வேறுவிதமாக எழுதலாம்.

$y = c_1 J_p(x) + c_2 y_p(x)$, ($p$ முழு எண்ணாக இல்லாத போது).

எனினும் p முழு எண்ணாக இருந்தால் (16) அர்த்தமற்றதாகி விடும். அதாவது முன்னால் குறிப்பிட்ட சிரமம் இன்னமும் தீர்வுபாடில்லை. இப்போது மிக விரிவான பகுப்பாய்வுக்குப் பிறகு

$$y_m(x) = \lim_{p \to m} y_p(x)$$

என்ற சார்பு உண்டு என அறிகிறோம். மேலும் அது இரண்டாம் வகை பெசல் சார்பு ஆகும். இதன் மூலம்

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 y_p(x)$$

ஆனது பெசல் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு ஆகும். இங்கு p முழு எண்ணாகவே அல்லது அவ்வாறன்றோ இருக்கலாம்.

இப்போது $u(x)=\sqrt{x}\,y(x)$ என்ற மாற்றம் மூலம் $u(x)$ என்ற $y(x)$-ஐச் சார்ந்த மாறியை வரையறுத்தால்

$$y'(x)=\frac{\sqrt{x}u'(x)-u(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$=\frac{2xu'(x)-u(x)}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2xu'(x)-u(x)}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$y''=\frac{2x^{\frac{3}{2}}\left[2u'(x)+2xu''(x)-u'(x)\right]-\left[2xu'(x)-u(x)\right]3x^{\frac{1}{2}}}{4x^3}$$

$$=\frac{2x\left[u'(x)+2xu''(x)\right]-3\left[2xu'(x)-u(x)\right]}{4x^{\frac{5}{2}}}$$

y, y', y'' ஆகியவற்றை (1) ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$u''+\left(1+\frac{1-4p^2}{4x^2}\right)u=0 \qquad (17)$$

x மிகப் பெரியது $(x\to\infty)$ எனில் (17) ஆனது

$$u''+u=0$$

என மாறும்.

$\cos x$ மற்றும் $\sin x$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத,

$u'' + u = 0$ க்கு இரு தீர்வுகள் என நாம் அறிவோம். எனவே x மிகப் பெரியதாய் உள்ள போது பெசல் சார்பு $y(x)$ ஆனது $\frac{1}{\sqrt{x}}\cos x$ மற்றும் $\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x$ ஆகியவற்றின் நேரியல் சேர்க்கையாக அமையும். மேலும் இதனை

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_1(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$y_p(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_2(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$$

(இங்கு $r_1(x)$ மற்றும் $r_2(x)$ ஆகியன $x \to \infty$ எனும் போது வரம்புடையன) என்ற சமனிகளால் பலப்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 பின்வருவனற்றை நிருவு.

(a) $\left(x^{\alpha} J_{\alpha}\right)'(x) = x^{\alpha} J_{\alpha-1}(x)$

(b) $\left(x^{-\alpha} J_{\alpha}\right)'(x) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$

(c) $J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) = 2J'_{\alpha}(x)$

(d) $J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x} J_{\alpha}(x)$

தீர்வு (a)

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha} J_{\alpha}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left[x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}}{n!(n+\alpha)!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{\alpha}}{n!(n+\alpha)!}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2\alpha}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{\alpha}(2n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)!2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2\alpha-1}$$

$$= x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+\alpha-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2\alpha-1}$$

$$= x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x)$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right)=\frac{d}{dx}\left[x^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}}{n!(n+\alpha)!}\right]=\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!(n+\alpha)!2^{\alpha}}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}}{n!(n+\alpha)!2^{\alpha+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha-1}x^{-\alpha}}{(n-1)!(n+\alpha)!}$$

$$=-x^{-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha-1}}{(n-1)!(n+\alpha)!}$$

$(n-1)$க்கு பதில் n என பிரதியிட

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right)=-x^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+1}}{n!(n+\alpha+1)!}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right)=-x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$$

(c)

(a)லிருந்து $\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}J_{\alpha}(x)\right)=x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x)$

$$\therefore J_{\alpha-1}(x)=x^{-\alpha}\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}J_{\alpha}(x)\right)$$

$$=x^{-\alpha}\left[x^{\alpha}J'_{\alpha}(x)+\alpha x^{\alpha-1}J_{\alpha}(x)\right]$$

$$J_{\alpha-1}(x)=J'_{\alpha}(x)+\alpha x^{-1}J_{\alpha}(x) \qquad \text{(A)}$$

(b)லிருந்து $\frac{d}{dx}\left(x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right)=-x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$

$$-\alpha x^{-\alpha-1}J_{\alpha}(x)+x^{-\alpha}J'_{\alpha}(x)=-x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$$

$$-\alpha x^{-1}J_{\alpha}(x)+J'_{\alpha}(x)=-J_{\alpha+1}(x) \qquad \text{(B)}$$

(A), (B) களைக் கூட்ட $J_{\alpha-1}(x) - J'_{\alpha+1}(n) = 2J'_{\alpha}(x)$, எனவும்

(d)(A)லிருந்து (B) ஐ கழிக்க , $J_{\alpha-1}(x)+J_{\alpha+1}(x)=\frac{2\alpha}{x}J_{\alpha}(x)$ எனவும் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}e^{-s^2}ds$ எனக்காட்டி $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ நிருபி.

விடை

$$\overline{|(p)}=\int_0^{\infty}t^{p-1}e^{-t}dt, t>0$$

$p=\frac{1}{2}$ எனில் $\overline{\left|\left(\frac{1}{2}\right)\right.}=\int_0^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$

$t=s^2$ என பிரதியிட $dt=2sds$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}\frac{1}{s}2se^{-s^2}ds=2\int_0^{\infty}e^{-s^2}ds$$

இதுபோலவே $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\right)\left(2\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy\right)$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ என கோண தூரக்கூறுகளில் மாற்ற, $dxdy=rdrd\theta$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$=4\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^{\infty}$$

$$=\pi$$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

எடுத்துக்காட்டு 3

(a) $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ மற்றும்

(b) $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{n!(p+n)!}$$

என நமக்குத் தெரியும்

$p=\frac{1}{2}$ என்க.

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}}{n!\left(n+\frac{1}{2}\right)!}=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\left(n+\frac{1}{2}\right)!}$$

$$\therefore x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{x}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\left(n+\frac{1}{2}\right)!}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!\left(\frac{5}{2}\right)!}-\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)!}\left[x-\frac{x^3}{\left(\frac{3}{2}\right)2^2}+\frac{x^5}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)2^5}-\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)!}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sin x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$$

$$\therefore J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$p=-\frac{1}{2}$ என்க.

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}}}{n!\left(n-\frac{1}{2}\right)!}$$

$$\therefore x^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\sqrt{2}}{n!\left(n-\frac{1}{2}\right)!}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\left[1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}-\cdots\right]$$

$$\therefore J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

பயிற்சி-14

1. (a) $\frac{d}{dx}\left(J_0(x)\right)=-J_1(x)$ எனவும்

   (b) $\frac{d}{dx}\left(xJ_1(x)\right)=xJ_0(x)$

   எனவும் நிருபி.

2. $\left(n+\frac{1}{2}\right)!=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\cdot n!}\sqrt{\pi}$ எனக்காட்டு.

   மேலும் $\left(n-\frac{1}{2}\right)!=\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!}\sqrt{\pi}$ எனவும் காட்டு.

3. $y_m(x)=\lim_{p\to\gamma}y_p(x)$ ல் லோபிதால் விதியைப் பயன்படுத்தி

   $$y_m(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial p}J_p(x)-(-1)^m\frac{\partial}{\partial p}J_{-p}(x)\right]_{p=m}$$

   என நிருபி.

அத்தியாயம் 15

பெசல் சார்புகளின் பண்புகள்

(Properties of Bessel's functions)

எந்த ஒரு மெய்யெண் p – க்கும் பெசல் சார்பு $J_p(x)$ ஆனது

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{n!(p+n)!} \tag{1}$$

என வரையறுக்கப்பட்டது.

சார்புகளும் முற்றொருமைகளும்

$$\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(x)\right] = x^p J_{p-1}(x) \tag{2}$$

என நமக்குத் தெரியும். மேலும்

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_p(x)\right] = -x^{-p} J_{p+1}(x) \tag{3}$$

எனவும் நமக்குத் தெரியும்.

இந்த முற்றொருமைகளிலிருந்து நாம் அறிவது என்னவெனில் பெசல் சார்புகள் மற்றும் அதன் வகையீடுகளையும் மற்ற பெசல் சார்புகளால் எழுத முடியும் என்பதே.

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$$

என ஏற்கனவே நிருபித்துள்ளோம். இதில் $p = \frac{1}{2}$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) + J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x). \tag{4}$$

இதுபோல $p=\frac{3}{2}$ எனில்

$$\frac{3}{x}J_{\frac{3}{2}}(x)=J_{\frac{1}{2}}(x)+J_{\frac{5}{2}}(x) \qquad (5)$$

$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,$ என்பதால் (4) லிருந்து

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)$$

இப்போது (5) லிருந்து

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\frac{3}{x}J_{\frac{3}{2}}(x)-J_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$=\frac{3}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3\sin x}{x^2}-\frac{3\cos x}{x}-\sin x\right)$$

மேலும்

$$J_{-\frac{3}{2}}(x)=-\frac{1}{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)-J_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[-\frac{\cos x}{x}-\sin x\right]$$

மற்றும்

$$J_{-\frac{5}{2}}(x) = -\frac{3}{x}J_{-\frac{3}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$= -\frac{3}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[-\frac{\cos x}{x} - \sin x\right] - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{3\cos x}{x^2} + \frac{3\sin x}{x} - \cos x\right]$$

இதுபோன்ற கணக்கீடுகளை முடிவில்லாமல் தொடரலாம். எனவே m ஒரு முழு எண் எனில் $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$ என்பது ஒரு எளிய சார்பு ஆகும்.

சமன்பாடு (2) ஐ தொகையிட

$$\int x^p J_{p-1}(x)dx = x^p J_p(x) + c$$

இதுபோலவே (3) ஐ தொகையிட

$$\int x^{-p} J_{p+1}(x)dx = -x^{-p} J_p(x) + c$$

முதல் தொகையில் $p=1$ என எடுக்க

$$\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x) + c$$

ஆகும்.

பூச்சியங்களும் பெசல் தொடர்களும்

p ன் எந்த மதிப்புக்கும் $J_p(x)$- க்கு முடிவற்ற பூச்சியங்கள் உண்டு. குறிப்பாக $J_0(x)$க்கு இது உண்மை. இச்சார்பின் பூச்சியங்கள் மிகவும் துல்லியமானவை. இதன் மதிப்புகள் பல கணித அட்டவணைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

இந்த பூச்சியங்களின் முதல் ஐந்தின் மதிப்புகள் தோரயமாக 2.4048, 5.5201, 8.6537, 11.7915, 14.9309 அதன்

அடுத்தடுத்த வித்தியாசங்கள் 3.1153, 3.1336, 3.1378, 3.1394. இதனுடன் தொடர்புடைய $J_1(x)$ ன் பூச்சியங்கள்3.8317, 7.0156, 10.1735, 13.3237 மற்றும் இதன் தொடர்ச்சியான வித்தியாசங்கள்3.3839, 3.1579, 3.1502, 3.1469

கணித இயற்பியலில், கொடுக்கப்பட்ட சார்பை பெசல் சார்புகளில் விரித்து எழுதுவது தேவையானது. மேலும் குறிப்பிட்ட வகை விரிவாக்கம் கொடுக்கப்பட்ட கணக்கைப் பொறுத்தது. இதில் மிகவும் எளிமையானதும் மிக முக்கிய

மானதுமான விரிவாக்கம்

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_p(\lambda_nx)=a_1J_p(\lambda_1x)+a_2J_p(\lambda_2x)+a_3J_p(\lambda_3x)+\cdots \qquad (6)$$

என்ற வடிவிலான தொடர்கள் ஆகும். இங்கு $f(x)$ ஆனது $0\le x\le 1$ என்ற இடைவெளி மீது வரையறுக்கப்பட்டது. மேலும் λ_n என்பன $J_p(x), p\ge 0$ என்ற சில நிலையான பெசல் சார்புகளின் மிகை பூச்சியங்களாகும். இங்கு $0\le x\le 1$ என்ற இடைவெளி எளிமைக்காக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டது என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். ஃபூரியர் தொடர் மற்றும் லெஜன்டர் தொடரை போலவே (6)ல் உள்ள கெழுக்கள் $a_1,a_2,a_3,\cdots$ ஆகியன. $J_p(\lambda_nx)$ − ன் சில தொகையீட்டுப் பண்புகளைப் பொருத்தவை ஆகும். (6)-ஐ $xJ_p(\lambda_mx)$ ஆல் பெருக்கி 0 லிருந்து 1 வரை உறுப்புகிரமாக தொகையிட

$$\int_0^1 xf(x)J_p(\lambda_mx)dx=\frac{a_m}{2}J_{p+1}(\lambda_m)^2 \qquad (7)$$

எனக் கிடைக்கும். ஏனெனில்

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_mx)J_p(\lambda_nx)dx=\begin{cases}0; & m\ne n \text{ எனில்}\\ \frac{1}{2}J_{p+1}(\lambda_n)^2; & m=n \text{ எனில்}\end{cases} \qquad (8)$$

(7)ல் nக்கு பதில் m என பிரதியிட

$$a_n = \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x) dx \qquad (9)$$

என கிடைக்கும். தொடர் (6) ஆனது n-பெசல் தொடர் அல்லது ஃபூரியர் -பெசல் தொடர் என அழைக்கப்படும். பின்வரும் தேற்றம், தொடர் (6) ஆனது $f(x)$க்கு ஒருங்குவதற்கான நிபந்தனையை தருகிறது.

தேற்றம் A (பெசல் விரிவாக்கத் தேற்றம்)

$0 \le x \le 1$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ மற்றும் $f'(x)$ ஆகியன அதிகபட்சம் முடிவுறு தொடர்ச்சியின்மை (jump discontinuities) உடையன என்போம். $0 < x < 1$, x-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியுடையது எனில் தொடர் (6) ஆனது $f(x)$க்கு ஒருங்கும். மேலும் $f(x)$ ஆனது x- ல் தொடர்ச்சியற்றது எனில் தொடர் (6) ஆனது $\frac{1}{2}\left[f(x-)+f(x+)\right]$க்கு ஒருங்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

λ_n என்பன $J_0(x)$ன் மிகை பூச்சியங்கள் எனில் $0 \le x \le 1$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)=1$ என்ற சார்பின், $J_0(\lambda_n x)$-ல் பெசல் தொடரை காண்க.

விடை:

$f(x)$- ன் பெசல் தொடர் $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(\lambda_n x)$ என்க.

இங்கு $a_n = \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x) dx$.

$p=0$ என கொடுக்கப்பட்டது. மேலும் $f(x)=1$ என்பதால்

$$a_n = \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2}\int_0^1 xJ_0(\lambda_n x)\,dx.$$

ஆனால் $\int xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x) + c$ என நாம் அறிவோம்.

$$a_n = \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2}\int_0^1 xJ_0(\lambda_n x)\,dx$$

$$= \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2}\left[\frac{1}{\lambda_n} xJ_1(\lambda_n x)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

$$1 = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(\lambda_n x)$$

அதாவது, $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\lambda_n x)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}.$

எடுத்துக்காட்டு 2

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_m x)J_p(\lambda_n x)\,dx = \begin{cases} 0; & m \neq n \text{ எனில்} \\ \frac{1}{2}J_{p+1}(\lambda_n)^2; & m = n \text{ எனில்} \end{cases}$$

என்ற செங்குத்து அமைவு பண்பினை நிருபி.

விடை

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0 \qquad \text{(A)}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $y = J_p(x)$ என நாம் அறிவோம். a, b என்பன இரு மிகை மாறிலிகள் எனில் $u(x) = J_p(ax)$ மற்றும்

$v(x)=J_p(bx)$ ±ýÈ °¡÷Ò¸û

$$u''+\frac{1}{x}u'+\left(b^2-\frac{p^2}{x^2}\right)u=0 \qquad \text{(B)}$$

$$v''+\frac{1}{x}v'+\left(a^2-\frac{p^2}{x^2}\right)v=0 \qquad \text{(C)}$$

என்ற சமன்பாடுகளை நிவர்த்தி செய்யும். இப்போது (B)ஐ v ஆலும் (C)ஐ u ஆலும் பெருக்கி ஒன்றிலிருந்து மற்றதை கழிக்க கிடைப்பது

$$u''v-v''v+\frac{1}{x}(u'v-v'u)=\left(b^2-a^2\right)uv$$

இச்சமன்பாட்டை x ஆல் பெருக்க கிடைப்பது

$$x(u''v-v''v)+(u'v-v'u)=\left(b^2-a^2\right)xuv$$

$$\frac{d}{dx}\left[(u'v-v'v)x\right]=\left(b^2-a^2\right)xuv \qquad \text{(D)}$$

(D)ஐ 0 லிருந்து 1 வரை x –ஐப் பொறுத்து தொகையிட

$$\left[(u'v-v'u)x\right]_0^1=\left(b^2-a^2\right)\int_0^1 xuvdx$$

$$\left[\left(u'(1)v(1)-v'(1)u(1)\right)-0\right]=\left(b^2-a^2\right)\int_0^1 xuvdx$$

$u(1)=J_p(a)$ மற்றும் $v(1)=J_p(b)$ என்பதால் a,b என்பன $J_p(x)$ன் இரு தனித்த மிகை பூச்சியங்கள் λ_m மற்றும் λ_n எனில் மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் இடப்புறம் பூச்சியமாகிறது. எனவே

$$\left(b^2-a^2\right)\int_0^1 xuv\,dx=0$$

அதாவது $\int_0^1 xuv\,dx=0$

$$\int_0^1 xJ_p\left(\lambda_m x\right)J_p\left(\lambda_n x\right)dx=0$$

இப்போது $m=n$ என்போம்.

$$u''+\frac{1}{x}u'+\left(a^2-\frac{p^2}{x^2}\right)u=0$$ -ஐ

$2x^2u'$ ஆல் பெருக்க

$$2x^2u''u'+2x\left(u'\right)^2+2a^2x^2uu'-2p^2uu'=0$$

அல்லது

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\left(u'\right)^2\right)+\frac{d}{dx}\left(a^2x^2u^2\right)-2a^2xu-\frac{d}{dx}\left(p^2u^2\right)=0.$$

இதனை 0-லிருந்து 1 வரை x-ஐப் பொறுத்து தொகையிட

$$2a^2\int_0^1 xu^2dx=\left[x^2u'^2+\left(a^2x^2-p^2\right)u^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}J_p'(a)^2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)J_p(a)^2$$

$a=\lambda_n$ எனில்

$$\int_0^1 xJ_p\left(\lambda_n x\right)^2dx=\frac{1}{2}J_p'\left(\lambda_n\right)^2$$

$J_p'(x)=\frac{p}{x}J_p(x)+J_{p+1}(x)$ என்பதால்

$\int_0^1 xJ_p\left(\lambda_n x\right)^2dx=\frac{1}{2}J_{p+1}\left(\lambda_n\right)^2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு3

a) $J_0(\lambda x)$ நிவர்த்தி செய்யும் சமன்பாட்டைக் காண்க.

b) $J_\alpha(\lambda x)$ நிவர்த்தி செய்யும் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடை

a) $\lambda > 0$ என்பது ஒரு எதேச்சை மாறிலி என்க.

$z = J_0(\lambda x)$ என்க.

$t = \lambda x$ என பிரதியிட

$$t^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + t^2 z = 0$$

அதாவது $\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dz}{dt} + z = 0$

$$\frac{dz}{dt} = J_0'(t), \frac{d^2 z}{dt^2} = J_0''(t)$$

$$\therefore J_0''(t) + \frac{1}{t} J_0'(t) + J_0(t) = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \lambda J_0'(t),$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\lambda J_0'(t)\right)\frac{dt}{dx} = \lambda^2 J_0''(t)$$

J_0'' மற்றும் J_0' ஆகியவற்றை (10)ல் பிரதியிட

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{\lambda^2 x}\frac{dz}{dx} + z = 0$$

எனவே $J_0(\lambda x)$ நிவர்த்தி செய்யும் சமன்பாடு

$$z'' + \frac{1}{x} z' + \lambda^2 z = 0$$

b) $t = \lambda x, z = J_\alpha(\lambda x) = J_\alpha(t)$ என்க.

எனவே

$$\frac{d^2 z}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dz}{dt}+\left(1-\frac{\alpha^2}{t^2}\right)z=0 \tag{11}$$

இப்போது $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\lambda\frac{dt}{dx}$,

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\lambda^2\frac{d^2 z}{dt^2}$$

$\frac{dz}{dt}$ மற்றும் $\frac{d^2 z}{dt^2}$ ஆகியவற்றை (11) ல் பிரதியிட

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2 z}{dx^2}+\frac{1}{t\lambda}\frac{dz}{dx}+\left(1-\frac{\alpha^2}{\lambda^2 x^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2 z}{dx^2}+\frac{1}{\lambda^2 x}\frac{dz}{dx}+\left(1-\frac{\alpha^2}{\lambda^2 x^2}\right)=0$$

எனவே $J_\alpha(\lambda x)$ நிவர்த்தி செய்யும் சமன்பாடு

$$\frac{d^2 z}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}+\left(\lambda^2-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)z=0$$ ஆகும்.

பயிற்சி-15

1) $J_2(x), J_3(x)$ மற்றும் $J_4(x)$ ஆகியவற்றை $J_0(x)$ மற்றும் $J_1(x)$ ல் எழுதுக

2) $f(x)$ என்பது

$$f(x)=\begin{cases} 1; & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}; & x=\frac{1}{2} \\ 0; & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

என வரையறுத்தால்

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\lambda x}{2}\right)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)^2} J_0(\lambda_n x)$$ ±É ¿¢Ú×¸ .

(இங்கு λ_n என்பன $J_0(x)$ ன் மிகை பூச்சியங்கள் ஆகும்)

3) $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ ன் பொதுத்தீர்வு

$$y=x\frac{J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+cJ_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{cJ_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)-J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}$$

என எழுதலாம் என நிருபி.

அத்தியாயம் 16

முதல் வரிசை நேரியல் சமன்பாடுகள்
(First order equations)

பகுப்பாய்வு முறையின் ஒரு அடிப்படைக் கொள்கைகளில் ஒன்று வரிசை ஒன்று உடைய n வகைக்கெழு சமன்பாடுகள். $y_1(x),\ y_2(x),\cdots,y_n(x)$ என்பன தனித்த மாறி $x-$ ல் தெரியாத சார்புகள் என்க. இச் சார்புகளின் முதல் வகைக்கெழுக்கள் $y_1', y_2', \cdots, y_n'$ ஆகியவைகள் x மற்றும் $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ல் சார்புகளாகும். அதாவது

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ &\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

பின்வரும் வரிசை சமன்பாட்டைக் கருதுக.

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right) \quad (2)$$

$$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \text{ என்க.} \quad (3)$$

எனவே (2) ஆனது பின்வரும்சமன்பாட்டு அமைப்புக்கு சமானமானது.

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ \vdots\ &\quad\ \vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

(4) ஆனது (1) ன் ஒரு சிறப்பு வகையாகும். (2)ம் (4)–ம் ஒன்றுக்கொன்று சமானமானது. அதாவது (2) ன் தீர்வு $y(x)$ எனில் (3)–ஆல் வரையறுக்கப்பட்ட $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_n(x)$ ஆகியன (4)ன் தீர்வுகள் ஆகும். மறுதலையாக $y_1(n)$, $y_2(n), \ldots, y_n(x)$ ஆகியன (4)–ன் தீர்வுகள் எனில் $y(x) = y_1(x)$ என்பது (2)ன் தீர்வு ஆகும்.

மேற்கண்ட *n* வரிசை சமன்பாட்டின் *n*- முதல் வரிசை சமன்பாட்டு அமைப்பாக குறைப்பது பல வழிகளில் பயன்பாடு உடையது.

எடுத்துக்காட்டு1

$y'' - x^2 y' - xy = 0$ என்ற இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாட்டை அதற்குச் சமானமான இரண்டு முதல் வரிசை சமன்பாட்டு அமைப்பாக மாற்று.

விடை:

$$\begin{aligned} y'' - x^2 y' - xy &= 0 \\ y'' &= x^2 y' + xy \\ &= f(x, y, y') \end{aligned}$$

$y' = z$ என்க.

$$y' = \frac{dy}{dx} = z; y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$$

y', y'' ஆகியவற்றை கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$\frac{dz}{dx} - x^2 z - xy = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = x^2 z + xy$$

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டாம் வரிசை சமன்பாட்டு பின்வரும் முதல் வரிசை சமன்பாட்டு அமைப்புக்கு சமானமானது.

$$\frac{dy}{dx} = z$$
$$\frac{dz}{dx} = xy + x^2 z$$

பயிற்சி-16

$y''' = y'' - x^2 (y')^2$ என்ற மூன்றாம் வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாட்டை மூன்று முதல் வரிசை சமன்பாட்டு அமைப்பாக மாற்று.

அத்தியாயம் 17

நேரியல் சமன்பாட்டு தொகுப்புகள்
(Linear System of equations)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டு அமைப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு $a_1(t), a_2(t), b_1(t), b_2(t)$ ஆகியன t – அச்சின்மீது $[a,b]$ இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானவை ஆகும். $f_1(t)$ மற்றும் $f_2(t)$ ஆகியன பூச்சியம் எனில் ஆனது ஒருபடித்தான சமன்பாட்டு தொகுப்பு எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில் அது ஒரு படித்தானவை அல்ல. (1)-ன் தீர்வை

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

என எழுதுவோம்.

தேற்றம் A : இடைவெளி $[a,b]$ - ல் t_0 ஏதேனும் ஒரு புள்ளி மற்றும் x_0, y_0 ஆகியன ஏதேனும் இரு எண்கள் எனில் சமன்பாட்டு தொகுப்பு (1)க்கு $x = x(t), y = y(t)$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு. மேலும் இத்தீர்வு $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ எனவும் [a,b] இடைவெளியில் முழுவதும் செல்லத்தக்கது.

தேற்றம் B

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(t)x + b_1(t)y \\ \frac{dy}{dt} &= a_2(t)x + b_2(t)y \end{aligned} \qquad (2)$$

என்ற ஒரு படித்தான சமன்பாட்டு தொகுப்புக்கு $[a,b]$ ன் மீது

$$\begin{aligned} x &= x_1(t) \\ y &= y_1(t) \end{aligned}$$

மற்றும் (3)

$$\begin{aligned} x &= x_2(t) \\ y &= y_2(t) \end{aligned}$$

என்ற இரு தீர்வுகள் உண்டு எனில் c_1, c_2 என்ற எந்த இரு மாறிலிகளுக்கும்

$$\begin{aligned} x &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{aligned} \tag{4}$$

என்பது $[a,b]$ ன்மீது ஒருபடித்தான சமன்பாட்டு தொகுப்பு (2)க்கு ஒரு தீர்வு ஆகும்.

தேற்றம் C : சமன்பாட்டு தொகுப்பு (2)ன் இரு தீர்வுகள் (3)ன் ரான்ஸ்கியான் (Wornskian) மதிப்பு $[a,b]$ ன்மீது பூச்சியம் அல்ல எனில் (4) ஆனது சமன்பாட்டு தொகுப்பு (2) க்குப் பொதுத்தீர்வு ஆகும்.

தேற்றம் D : $W(t)$ என்பது சமன்பாட்டுதொகுப்பு (2)ன் இரு தீர்வுகளின் ரான்ஸ்கியான் எனில் $[a,b]$ ன்மீது முற்றிலும் பூச்சிமாகவோ அல்லது [a,b]ன் மீது எங்கும் பூச்சியமற்றதாகவோ இருக்கும்.

தேற்றம் E : சமன்பாட்டு தொகுப்பு (2)ன் இரு தீர்வுகள் $[a,b]$ ன்மீது ஒன்றையொன்று சாராதவை எனில் (3) ஆனது சமன்பாடு அமைப்பு (2)க்கு பொதுத் தீர்வு ஆகும்.

தேற்றம்Fசமன்பாட்டு தொகுப்பு (2)ன், $[a,b]$ ன்மீது ஒன்றையொன்று சாராத இரு தீர்வுகள் (3) மற்றும்

$$x = x_p(t)$$
$$y = y_p(t)$$

என்பது சமன்பாட்டு தொகுப்பு (2) ன் ஒரு சிறப்புத் தீர்வு எனில், $[a,b]$ ன் மீது

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_p(t)$$
$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$

என்பது சமன்பாட்டு அமைப்பு (2) ன் பொதுத்தீர்வு ஆகும்.

பயிற்சி-17

1 (a) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$ மற்றும் $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{-2t} \end{cases}$ என்பன $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

ஒரு படித்தான சமன்பாட்டு தொகுப்பின் தீர்வுகள் எனக்காட்டு.

(b) மேற்கண்ட(a)- ன் தீர்வுகளை, இருவேறு வழிகளில் ஒன்றையொன்று சாராதவை எனக்காட்டி, பொதுவான தீர்வை எழுது.

(c) $x(0) = 5$ மற்றும் $y(0) = 1$ எனில் a)- ன் சிறப்புத் தீர்வை காண்க.

2 (a) $\begin{cases} x = 2e^{4t} \\ y = 3e^{4t} \end{cases}$ மற்றும் $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = -e^{-t} \end{cases}$ என்பன $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$

என்ற ஒருபடித்தான சமன்பாட்டு தொகுப்பின் இருவேறு தீர்வுகள் எனக்காட்டு.

(b) மேற்கண்ட (a)- ன் தீர்வுகளை, இருவேறு வழிகளில் ஒன்றையொன்று சாராதவை எனக்காட்டி, பொதுத்தீர்வை எழுது

(c) $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -2t + 3 \end{cases}$ என்பது $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y - 5t - 2 \end{cases}$ என்ற

ஒருபடித்தானதற்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பின் சிறப்புத்தீர்வு எனக்காட்டி அதன் பொதுத் தீர்வை எழுது.

3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$ என்ற தொகுப்பின் பொதுத்தீர்வைக் காண்க.

அத்தியாயம் 18

மாறிலி கெழுக்களைக் கொண்ட ஒருபடித்தான நேரியல் சமன்பாட்டு தொகுப்பு

(Homogeneous Linear System with constant Coefficients)

a_1, b_1, a_2 மற்றும் b_2 ஆகியன கொடுக்கப்பட்ட மாறிலிகள் எனில்

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases} \qquad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்புக்கு தீர்வு காண முற்படுவோம். அடுக்குக் குறிச் சார்பு (exponential functions) களின் வகையீடுகள் அதனுடைய மாறிலி பெருக்கலாகவே அமையும் என நாம் அறிவோம். எனவே, இயற்கையாகவே (1)ன் தீர்வு

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases} \qquad (2)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும் என நாம் எதிர்பார்க்கலாம். இப்போது (2)ஐ வகையிட

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ame^{mt} \\ \dfrac{dy}{dt} = Bme^{mt} \end{cases}$$

எனக் கிடைக்கும். $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை-(1)-ல் பிரதியிட

$$Ame^{mt} = a_1 Ae^{mt} + b_1 Be^{mt}$$
$$Bme^{mt} = a_2 Ae^{mt} + b_2 Be^{mt}$$

எனக் கிடைக்கும். இவற்றை e^{mt} ஆல் வகுக்க கிடைப்பது

$$Am = a_1 A + b_1 B$$
$$Bm = a_2 A + b_2 B$$

அதாவது

$$\begin{aligned} (a_1 - m)A + b_1 B = 0 \\ a_2 A + (b_2 - m)B = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

$A = B = 0$ எனில் சமன்பாட்டு தொகுப்பு அற்பத்தீர்வு (Trivial solution) உடையது. இதனால் (2) – ம் அற்பத்தீர்வை உடையது என நாம் அறியலாம். ஆனால் (1)-க்கு நாம் அற்பமற்ற (non-trivial)தீர்வைக் காண விரும்புவதால் மேற்கண்ட தீர்வு உபயோக மற்றதாகிவிடுகிறது. இருப்பினும்

$$\begin{vmatrix} a_1 - m & b_1 \\ a_2 & b_2 - m \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமெனில் (3) க்கு அற்பமற்ற தீர்வு உண்டு. மேற்கண்ட அணிக்கோவையை விரித்து எழுத

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \qquad (4)$$

என்ற தெரியாத மதிப்பு m-ல் ஒரு இருபடிச்சமன்பாடு கிடைக்கிறது. சமன்பாடு (4) ஐ (1) ன் துணைச்சமன்பாடு (auxillary equation) என்போம். சமன்பாடு (4) ன் தீர்வுகள் $m = m_1, m = m_2$ என்போம். இப்போது (3)ல் m ஐ m_1 ஆல் நீக்க

$$(a_1 - m_1)A + b_1 B = 0$$
$$a_2 A + (b_2 - m_1)B = 0$$

எனக் கிடைக்கிறது. மேலும் இதன் தீர்வுகள் அற்பமற்ற தீர்வுகள் ஆகும். அவற்றை A_1, B_1 என்போம். எனவே

$$\begin{cases} x = A_1 e^{m_1 t} \\ y = B_1 e^{m_1 t} \end{cases} \tag{5}$$

என்பது (1)ன் அற்பமற்ற தீர்வு ஆகும். இது போலவே m ஐ m_2 ஆல் நீக்க

$$\begin{cases} x = A_2 e^{m_2 t} \\ y = B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \tag{6}$$

என்ற (1)ன் மற்றொரு அற்பமற்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

நாம் இரண்டு ஒன்றையொன்று சாராத தீர்வுகளை கண்டுபிடித்துள்ளோம் என்பதை உறுதி செய்ய மற்றும் பொதுத்தீர்வை காண பின்வரும் மூன்று வகைகளையும் தனித்தனியே விரிவாக ஆராய வேண்டும்.

முதல் வகை தீர்வுகள்: m_1 மற்றும் m_2 என்பன இரு வேறு மெய்யெண்கள் என்போம். இதனால்

$\begin{cases} x = A_1 e^{m_1 t} \\ y = B_1 e^{m_1 t} \end{cases}$ மற்றும் $\begin{cases} x = A_2 e^{m_2 t} \\ y = B_2 e^{m_2 t} \end{cases}$ என்பன ஒன்றையொன்று சாராத (1)ன் இரு தீர்வுகள் ஆகும். எனவே (1)ன் பொதுத்தீர்வு

$$\begin{aligned} x &= c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y &= c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{aligned} \tag{7}$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases} \tag{8}$$

என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பைத் தீர்.

தீர்வு:

$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases}$ என்க.

எனவே (8)-ன் சிறப்புச் சமன்பாடு (துணைச் சமன்பாடு)

$$\begin{aligned} (1-m)A + B &= 0 \\ 4A + (-2-m)B &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

$\begin{vmatrix} 1-m & 1 \\ 4 & -2-m \end{vmatrix} = 0$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது $m^2 + m - 6 = 0$. இதன் தீர்வுகள் $m_1 = -3, m_2 = 2$ ஆகும். இங்கு m_1 மற்றும் m_2 ஆகியன இரு வேறு மெய்யெண்கள். எனவே $m = -3$ என (9)ல் பிரதியிட $\begin{cases} 4A + B \\ 4A + B = 0 \end{cases}$ எனக் கிடைக்கும். இதன் எளிய அற்பமற்ற தீர்வு $A = 1, B = -4$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எனவே (8)-ன் அற்பமற்ற தீர்வு

$$\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = -4e^{-3t} \end{cases} \tag{10}$$

இது போலவே $m=2$ எனில் (9) லிருந்து $\begin{cases}-A+B=0\\4A-4B=0\end{cases}$ எனக் கிடைக்கும். இதன் எளிய அற்பமற்ற தீர்வு $A=1, B=1$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.192-எனவே(8)- ன் அற்பமற்ற தீர்வு

$$\begin{cases}x=e^{2t}\\y=e^{2t}\end{cases}\tag{11}$$

மேலும்(10) மற்றும் (11) ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத தீர்வுகள் ஆகும்.எனவே (8) -ன் பொதுத்தீர்வு

$$\begin{cases}x=c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}\\y=-4c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}\end{cases}$$

ஆகும்.

இரண்டாம் வகை தீர்வுகள்: m_1 மற்றும் m_2 என்பன இரு வேறு கலப்பு(கற்பனை) எண்கள் என்க. அவை $a\pm ib, b\neq 0$ என்ற வடிவில் இருக்கும். எனவே லிருந்து A மற்றும் B ஆகியன கற்பனை எண்களாகும். எனவே $A=A_1+iA_2$ எனவும் $B=B_1+iB_2$ எனவும் எழுதலாம். இப்போது $m=a\pm ib$ எனில்

$$\begin{cases}x=(A_1+iA_2)e^{(a+ib)t}\\y=(B_1+iB_2)e^{(a+ib)t}\end{cases};\begin{cases}x=(A_1+iA_2)e^{(a-ib)t}\\y=(B_1+iB_2)e^{(a-ib)t}\end{cases}\tag{12}$$

என இரண்டு தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன. அதாவது

$$\begin{cases}x=(A_1+iA_2)e^{at}e^{ibt}=(A_1+iA_2)e^{at}(\cos bt+i\sin bt)\\y=(B_1+iB_2)e^{at}e^{ibt}=(B_1+iB_2)e^{at}(\cos bt+i\sin bt)\end{cases}\tag{13}$$

அல்லது

$$\begin{cases} x = e^{at}\left[\left(A_1\cos bt - A_2\sin bt\right) + i\left(A_1\sin bt + A_2\cos bt\right)\right] \\ y = e^{at}\left[\left(B_1\cos bt - B_2\sin bt\right) + i\left(B_1\sin bt + B_2\cos bt\right)\right] \end{cases}$$

மெய்யெண் கெழுக்களைக் கொண்ட ஒரு இணை கற்பனை சார்புகள் சமன்பாடு (1)க்கு தீர்வு எனில் அவற்றின் இரு மெய்பகுதிகள் மற்றும் இரு கற்பனைப்பகுதிகளும் (1)ன் மெய்த்தீர்வுகளாகும். இதிலிருந்து அறிவது என்னவெனில் (13)லிருந்து சமன்பாடு (8) க்கு

$$\begin{cases} x = e^{at}\left(A_1\cos bt - A_2\sin bt\right) \\ y = e^{at}\left(B_1\cos bt - B_2\sin bt\right) \end{cases} \tag{14}$$

மற்றும்

$$\begin{cases} x = e^{at}\left(A_1\sin bt + A_2\cos bt\right) \\ y = e^{at}\left(B_1\sin bt + B_2\cos bt\right) \end{cases} \tag{15}$$

என்ற இரு மெய்யெண் தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன. மேலும் இந்த இருதீர்வுகளும் ஒன்றையொன்று சாராதவை. எனவே சமன்பாடு (8) ன் பொதுத்தீர்வு

$$\begin{cases} x = e^{at}\left[c_1\left(A_1\cos bt - A_2\sin bt\right) + c_2\left(A_1\sin bt + A_2\cos bt\right)\right] \\ y = e^{at}\left[c_1\left(B_1\cos bt - B_2\sin bt\right) + c_2\left(B_1\sin bt + B_2\cos bt\right)\right] \end{cases} \tag{16}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 பொதுத்தீர்வைக் காண்.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases} \tag{17}$$

தீர்வு: $\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases}$ எனில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு (17)ன்

துணைச் சமன்பாடு

சிறப்புச்சமன்பாடு) $\begin{cases} (4-m)A - 2B = 0 \\ 5A + (2-m)B = 0 \end{cases}$ லிருந்து

$\begin{vmatrix} 4-m & -2 \\ 5 & 2-m \end{vmatrix} = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. அதாவது

$m^2 - 6m + 18 = 0$. இதன் தீர்வுகள் $3 \pm i3$ ஆகும். அதாவது

$m_1 = 3 + i3, m_2 = 3 - i3$ ஆகும். எனவே தீர்வு

$$\begin{aligned} x &= (A_1 + iA_2)e^{(a+ib)t} \\ &= (A_1 + iA_2)e^{(3+i3)t} \\ &= (A_1 + iA_2)e^{3t}(\cos 3t + i\sin 3t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (B_1 + iB_2)e^{(a+ib)t} \\ &= (B_1 + iB_2)e^{(3+i3)t} \\ &= (B_1 + iB_2)e^{3t}(\cos 3t + i\sin 3t) \end{aligned}$$

அதாவது

$$x = e^{3t}\left[(A_1 \cos 3t - A_2 \sin 3t) + i(A_1 \sin 3t + A_2 \cos 3t)\right]$$
$$y = e^{3t}\left[(B_1 \cos 3t - B_2 \sin 3t) + i(B_1 \sin 3t + B_2 \cos 3t)\right]$$

ஆகும். மேற்கண்ட தீர்வுலிருந்து

$$x = e^{3t}(A_1 \cos 3t - A_2 \sin 3t)$$
$$y = e^{3t}(B_1 \cos 3t - B_2 \sin 3t)$$

மற்றும்

$$x = e^{3t}\left(A_1 \sin 3t + A_2 \cos 3t\right)$$
$$y = e^{3t}\left(B_1 \sin 3t + B_2 \cos 3t\right)$$

என்ற இரண்டு மெய்த்தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன. இத்தீர்வுகள் இரண்டும் ஒன்றையொன்று சாராதவை. எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பின் பொதுத்தீர்வு

$$x = e^{3t}\left[c_1\left(A_1 \cos 3t - A_2 \sin 3t\right) + c_2\left(A_1 \sin 3t + A_2 \cos 3t\right)\right]$$
$$y = e^{3t}\left[c_1\left(B_1 \cos 3t - B_2 \sin 3t\right) + c_2\left(B_1 \sin 3t + B_2 \cos 3t\right)\right]$$

$m = 3 \pm i3$ எனில்

$$\left[4 - (3 + i3)\right]A - 2B = 0$$
$$5A + \left(2 - (3 + i3)\right)B = 0$$

இங்கு $A = 2, B = 1$ என்பது ஒரு எளிய தீர்வு.

எனவே

$$A_1 + iA_2 = 2 \Rightarrow A_2 = 0, A_1 = 2$$
$$B_1 + iB_2 = 1 - i3 \Rightarrow B_2 = -3, B_1 = 1$$

எனவே பொதுத் தீர்வு

$$x = e^{3t}\left[2c_1 \cos 3t + 2c_2 \sin 3t\right]$$
$$y = e^{3t}\left[c_1\left(\cos 3t + 3\sin 3t\right) + c_2\left(\sin 3t - 3\cos 3t\right)\right]$$

மூன்றாவது வகை தீர்வுகள்: $m_1 = m_2$ என்க. இதனால்

$$\begin{cases} x = A_1 e^{m_1 t} \\ y = B_1 e^{m_1 t} \end{cases}$$

மற்றும்

$$\begin{cases} x = A_2 e^{m_1 t} \\ y = B_2 e^{m_1 t} \end{cases}$$

ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத தீர்வுகள் அல்ல. எனவே

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases} \tag{18}$$

என்ற ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டும் உண்டு. இரண்டாவது சாராத தீர்வு

$$\begin{cases} x = Ate^{mt} \\ y = Bte^{mt} \end{cases}$$

நாம்

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = (B_1 + B_2 t)e^{mt} \end{cases} \tag{19}$$

என்ற வடிவிலான இரண்டாவது தீர்வையும்

$$\begin{cases} x = c_1 Ae^{mt} + c_2 (A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = c_1 Be^{mt} + c_2 (B_1 + B_2 t)e^{mt} \end{cases} \tag{20}$$

என்ற பொதுத்தீர்வையும் எதிர் நோக்குவோம். இங்கு (19)−ன் மூலம் A_1, A_2, B_1 மற்றும் B_2 ன் மதிப்புகளை அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3: பின்வரும் சமன்பாட்டு அமைப்பைத்தீர்.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases}$$

தீர்வு எனில்

$$(3-m)A-4B=0 \qquad (22)$$
$$A+(-1-m)B=0$$

(22) விருந்து துணைச்சமன்பாடு $m^2-2m+1=(m-1)^2=0$.

எனவே துணைச்சமன்பாட்டின் தீர்வு $m_1=m_2=1$.

$m=1$ எனில் (22) ஆனது

$$2A-4B=0$$
$$A-2B=0$$

இதிலிருந்து $A=2, B=1$ என்ற எளிய தீர்வு கிடைக்கும்.

$$\therefore x=Ae^{mt}=2e^t \qquad (23)$$
$$y=Be^{mt}=e^t$$

என்று ன் பூச்சியமற்ற தீர்வு ஆகும். நாம்

$$\begin{cases} x=(A_1+A_2t)e^t \\ y=(B_1+B_2t)e^t \end{cases} \qquad (24)$$

என்ற வடிவிலான, முந்தையத் தீர்வைச் சாராத தீர்வைக்

-197- காண வேண்டும்.

(24) ஐ (21)ல் பிரதியிட

$$(A_1+A_2t+A_2)e^t=3(A_1+A_2t)e^t-4(B_1+B_2t)e^t$$
$$(B_1+B_2t+B_2)e^t=(A_1+A_2t)e^t-(B_1+B_2t)e^t$$

எனக் கிடைக்கும். அதாவது

$$(2A_2-4B_2)t+(2A_1-A_2-4B_1)=0$$
$$(A_2-2B_2)t+A_1-2B_1-B_2=0$$

எனக் கிடைக்கிறது. மேற்கண்டவற்றின் கெழுக்களை

இருபுறமும் சமப்படுத்த

$$2A_2 - 4B_2 = 0; 2A_1 - A_2 - 4B_1 = 0$$
$$A_2 - 2B_2 = 0; A_1 - 2B_1 - B_2 = 0$$

எனக் கிடைக்கிறது. மேலே உள்ள சமன்பாடுகளில் $2A_2 - 4B_2 = 0; A_2 - 2B_2 = 0$ என்பதிலிருந்து $A_2 = 2, B_2 = 1$ எனவும் $2A_1 - A_2 - 4B_1 = 0;$ அதாவது $A_1 - 2B_1 - B_2 = 0$ என்பதிலிருந்து $A_1 = 0, B_1 = 0$ எனவும் கிடைக்கிறது. இம்மதிப்புகளை (24)ல் பிரதியிட

$$\begin{cases} x = (1+2t)e^t \\ y = te^t \end{cases} \tag{25}$$

என்ற இரண்டாவது தீர்வு கிடைக்கிறது. எனவே பொதுத்தீர்வு

$$\begin{cases} x = 2c_1e^t + c_2(1+2t)e^t \\ y = c_1e^t + c_2te^t \end{cases}$$

ஆகும்.

பயிற்சி-18

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வுகளைக் காண்க.

(a) $\dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y$

$\dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y$

$\dfrac{dy}{dt} = -x + 3y$

(c) $\dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y$

$\dfrac{dy}{dt} = 8x - 6y$

(d) $\frac{dx}{dt} = x - 4y$

$\frac{dy}{dt} = 4x + 5y$

2. சமன்பாடு (1)ஆனது இரு ஒன்றையொன்று சாராத வடிவிலான தீர்வுகளை கொண்டிருக்க $a_2 b_1 > 0$ என்பது போதுமான நிபந்தனை ஆனால் தேவையான நிபந்தனை அல்ல என நிரூபி.

3. தீர்வுகள் (15) மற்றும் (16)ன் ரான்ஸ்கியான் $W(t) = (A_1 B_2 - B_1 A_2) e^{2at}$ எனவும் $A_1 B_2 - B_1 A_2 \neq 0$ எனவும் நிரூபி.

அத்தியாயம் 19

n-வரிசை ஒரு படித்தான சமன்பாடுகள்

(Homogeneous Equations of order n)

இரண்டாம் வரிசை ஒரு படித்தான் சமன்பாடுகள்

(The second order homogeneous equations)

$$y' + ay = 0 \qquad (1)$$

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

என்பன முறையே முதல் வரிசை, இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாடுகள். இப்போது சமன்பாடு (2)ஐப் பற்றிப் பார்ப்போம். இங்கு a_1, a_2 ஆகியன மாறிலிகள் ஆகும். (2)ஐ இரண்டாம் வரிசை ஒருபடித்தான சமன்பாடு என்போம். முதல் வரிசை சமன்பாடு $y' + ay = 0$ என்பதில் உள்ள m-ஆனது $m + a = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும். e^{mx} என்ற சார்பின் எந்த வரிசை வகைக்கெழுவும் அதன் மாறிலி பெருக்கலாகவே அமையும் என்பதால்(இங்கு m- மாறிலி), ஏதோ தகுந்த r-ன் மதிப்புகளுக்கு e^{mx} ஆனதுசமன்பாடு (2)ன் தீர்வு ஆகும் என நாம் எதிர்பார்க்கலாம். அது சரிதானா என்று இங்கு முயன்று பார்ப்போம். $y' = me^{mx}, y'' = m^2 e^{mx}$ என்பதால்

$$L(e^{mx}) = m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_2 e^{mx}$$
$$= (m^2 + a_1 m + a_2) e^{mx}$$

$m^2+a_1m+a_2=0$ எனில் e^{mx} ஆனது சமன்பாடு (1)ன் தீர்வு ஆகும். $m^2+a_1m+a_2$ என்பதை சிறப்புப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனவும்அழைப்போம். $m^2+a_1m+a_2$ என்பதை $P(m)$ எனக்

குறிப்பிட்டால் சமன்பாடு (2)லிருந்து

$$L\left(e^{mx}\right)=P(m)e^{mx} \tag{3}$$

$P(m)$ க்கு இரு தீர்வுகள் உண்டு. அதனை m_1 மற்றும் m_2 என்போம். $m_1 \neq m_2$ எனில் $L(y)$-க்கு e^{m_1x} மற்றும் e^{m_2x} ஆகியனஇரு வெவ்வேறு தீர்வுகள் ஆகும். $m_1=m_2$ எனில் $L(y)$-க்கு இருதீர்வுகளைக் காண முடியும். $P(m)$ க்கு $m=m_1$ என்பது ஒரு இரட்டைதீர்வு (root of multiplicity two) என்பதால்

$$P(m_1)=0 \text{ மற்றும் } P'(m_1)=0$$

ஆகும். எனவே (3)ஐ m ஐப் பொறுத்து வகையிட

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(L\left(e^{mx}\right)\right)=L\left(\frac{\partial}{\partial m}e^{mx}\right)=L\left(xe^{mx}\right).$$

இதனால் $L\left(xe^{mx}\right)=\left[P'(m)+xP(m)\right]e^{mx}$

இப்போது $m=m_1$ எனில் $L\left(xe^{mx}\right)=0$ எனக் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்துதெரிவது என்னவெனில் $m_1=m_2$ எனும்போது xe^{m_1x}-ம் ஒரு தீர்வு ஆகும். இதனை பின்வரும் தேற்றத்தின் வாயிலாக விவரிக்கலாம்.

தேற்றம் A: $L(y)=y''+a_1y'+a_2y=0$ என்க. இங்கு a_1 மற்றும் a_2 ஆகியன மாறிலிகள். இச்சமன்பாட்டின் சிறப்புச் சமன்பாடு $P(r)=r^2+a_1r+a_2=0$ ன் இரு வேறு மூலங்கள் r_1 மற்றும் r_2 எனில்

$$\phi_1(x)=e^{r_1x},\phi_2(x)=e^{r_2x} \qquad (4)$$

என்ற சார்புகள் $L(y)=0$ன் தீர்வுகளாகும். r_1 என்பது இரட்டைத்தீர்வு எனில்

$$\phi_1(x)=e^{r_1x},\phi_2(x)=xe^{r_1x} \qquad (5)$$

என்பன $L(y)=0$ -ன் மூலங்கள்.

இனி $L(y)=0$ -ன் எல்லா தீர்வுகளையும் கணிப்போம். இச்சமன்பாட்டின் எந்த ஒரு தீர்வும், $m_1 \neq m_2$ எனில், (4)ஆல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\phi_1(x),\phi_2(x)$ன் நேரியல் சேர்க்கையாகவும், $m_1 = m_2$ எனில் (5)ஆல் \

கொடுக்கப்பட்ட $\phi_1(x),\phi_2(x)$ -ன் நேரியல் சேர்க்கையாகவும் இருக்கும். c_1, c_2 என்பன இரு மாறிலிகள் என்க. $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ எனில்

$$\begin{aligned}
L(\phi) &= L(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) \\
&= (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)'' + a_1(c_1\phi_1 + c_2\phi_2)' + a_2(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) \\
&= c_1\phi_1'' + c_2\phi_2'' + a_1c_1\phi_1' + c_2a_1\phi_2' + a_2c_1\phi_1 + a_2c_2\phi_2 \\
&= c_1(\phi'' + a_1\phi_1' + a_2\phi_1) + c_2(\phi_2'' + a_1\phi_2' + a_2\phi_2) \\
&= c_1L(\phi_1) + c_2L(\phi_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

எனவே $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ -ம் $L(y)$ன் தீர்வு ஆகும்.

குறிப்பாக எல்லா x -க்கும் $\phi(x)=0$ எனில்என்பது

$L(y)$இன் அற்பத்தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: தீர்க்க: $y'' + y' - 2y = 0$

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புச் சமன்பாடு

$$P(m)=m^2+m-2=0$$

சிறப்புச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m_1=-2$ மற்றும் $m_2=1$.

$m_1 \neq m_2$ என்பதால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\phi_1(x)=e^{-2x}$ மற்றும் $\phi_2(x)=e^x$. மேலும் இதன் பொதுத்தீர்வு

$$\phi(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^x.$$

எடுத்துக்காட்டு 2: தீர்க்க: $y''+16y=0$

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புச் சமன்பாடு

$$P(m)=m^2+16=0$$

சிறப்புச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\pm 4i$.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\phi_1(x)=e^{4ix}$ மற்றும் $\phi_2(x)=e^{-4ix}$. மேலும் இதன் பொதுவான த்தீர்வு

$$\phi(x)=c_1e^{4ix}+c_2e^{-4ix}.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 தீர்க்க $y''-8y'+16y=0$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புச் சமன்பாடு $P(m)=m^2-8m+16=0$. இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m_1=m_2=4$. எனவே கொடுக்கப்பட்டச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\phi_1(x)=e^{4x}$, $\phi_2(x)=xe^{4x}$. மேலும் இதன் பொதுத் தீர்வு $\phi(x)=c_1e^{4x}+c_2xe^{4x}$

$n-$வரிசை ஒருபடித்தான சமன்பாடுகள்

(Homogeneous equation of order n)

$$L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny \qquad (6)$$

இங்கு $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ என்பன மாறிலிகள். $L(y)=0$ என்பது $n-$வரிசை ஒருபடித்தான சமன்பாடு எனப்படும். இரண்டாம் வரிசை சமன்பாட்டுக்கு e^{mx} ஒரு தீர்வு என்று கண்டது போல (6)ன் தீர்வைக் காண்போம்.

$$L(e^{mx})=P(m)e^{mx} \qquad (7)$$

இங்கு $P(m)=m^n+a_1m^{n-1}+a_2m^{n-2}+\cdots+a_n=0$ என்பது $L-$ன் சிறப்புச் சமன்பாடு எனப்படும். $P(m)$ன் ஒரு தீர்வு m_1 எனில் $L(e^{m_1x})=0$. எனவே e^{m_1x} என்பது $L(y)=0$ன் தீர்வாகும். இது போலவே m_1 என்பது r_1 முறை $P(m)$ ன் தீர்வு எனில்(root of multiplicity of r_1)

$$P(m_1)=0, P'(m_1)=0, P''(m_1)=0,\cdots,P^{(r_1-1)}(m_1)=0$$

ஐ k முறை m ஐப் பொறுத்து வகையிட

$$=\left[P^{(k)}(m)+kP^{(k-1)}(m)x+\frac{k(k-1)}{2!}P^{(k-2)}(m)x^2+\cdots+P(m)x^k\right]$$

$$k=0,1,2,3,\cdots,(m_1-1).$$

$$\frac{\partial^k L(e^{mx})}{\partial m^k}=L\left(\frac{\partial^k(e^{mx})}{\partial m^k}\right)=L(x^ke^{mx})$$

இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில் $x^ke^{m_1x}$ ஆனது $L(y)=0$-ன் தீர்வாகும். இதனை பின்வரும் தேற்றமாக கூறலாம்.

தேற்றம் B

$P(m)=0$ க்கு $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_s$ என்பன முறையே $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_s$ முறைத் தீர்வுகள், இங்கு $(r_1+r_2+r_3+\cdots+r_s=n)$ எனில் பின்வரும் n சார்புகள்

$$e^{m_1x}, xe^{m_1x}, x^2e^{m_1x}, \cdots, x^{r_1-1}e^{m_1x}$$

$$e^{m_2x}, xe^{m_2x}, x^2e^{m_2x}, \cdots, x^{r_2-1}e^{m_2x}$$

....

....

....

$$e^{m_sx}, xe^{m_sx}, x^2e^{m_sx}, \cdots, x^{r_s-1}e^{m_sx}$$

$L(y)=0$ ன் தீர்வுகள் ஆகும்.

தேற்றம் C

முந்தைய தேற்றம் (B) ல் கொடுக்கப்பட்ட $L(y)=0$ ன் n தீர்வுகள் எந்த ஒரு இடைவெளியிலும் ஒன்றையொன்று சாராதவை.

நிருபணம்

ஒரு இடைவெளி I மீது $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ என்ற சார்புகள், எல்லா $c_1, c_2, \cdots, c_n$ களும் ஒரே நேரத்தில் பூச்சியமல்லாத போது,

$$c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)+\cdots+c_n\phi_n(x)=0$$

எனில் அவை அந்த இடைவெளி I மீது ஒன்றை ஒன்று சாராத தீர்வுகள் என்போம்.

முடிந்தால் $c_{ij}\,(i=1,2,\cdots,s,\ j=0,1,2,\cdots,r_i-1)$ என்ற n மாறிலிகள் இடைவெளி I மீது

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} x^j e^{m_i x} = 0 \qquad (8)$$

என இருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது ஒரு நிலையாக குறிப்பிட்ட i – ன் ஒரு மதிப்புக்கு (8)ஐ j ன்மீது கூடுதல் காண

$$P_i(x) = \sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} x^j \quad \pm \acute{y} . .$$

அல்லது $P_i(x)$ என்பது $e^{m_i x}$ – ன் பல்லுறுப்புக் கோவை குணகமாகும். எனவே I ன் மீது

$$P_1(x)e^{m_1 x} + P_2(x)e^{m_2 x} + \cdots + P_s(x)e^{m_s x} = 0 \qquad (9)$$

முடிந்தால் எல்லா c_{ij}-யும் பூச்சியம் அல்ல என்போம். இதனால் குறைந்தபட்சம் ஒரு P_i – ஆவது I -ன் மீது முற்றிலும் பூச்சியமாக இருக்காது. தேவையானால் மூலங்கள் m_i – களை மறுவரிசைப்படுத்தி (relabeling) P_s ஆனது முற்றிலும் பூச்சியமல்ல என்போம். எனவே (9)லிருந்து, I-ன்மீது

$$P_1(x) + P_2(x)e^{(m_2-m_1)x} + P_3(x)e^{(m_3-m_1)x} + \cdots + P_s(x)e^{(m_s-m_1)x} = 0 \qquad (10)$$

எனக் கிடைக்கும். (10)ஐ போதுமான அளவுக்கு பலமுறை(அதிகபட்சம் m_1 முறை) வகையீடு செய்து $P_1(x)$ ஐ பூச்சியமாக குறைக்கலாம். இந்த முறையினால், $e^{(m_i-m_1)x}$ ஐ பெருக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி மாறாது. அதுபோலவே எந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியமாகாத் தன்மையும் மாறாது. இப்போது

$$Q_2(x)e^{(m_2-m_1)x} + Q_3(x)e^{(m_3-m_1)x} + \cdots + Q_s(x)e^{(m_s-m_1)x} = 0$$

அல்லது

$$Q_2(x)e^{m_2x}+Q_3(x)e^{m_3x}+\cdots+Q_s(x)e^{m_sx}=0$$

என்ற விரிவாக்கம் கிடைக்கும் இங்கு Q_i என்பன I - ன் மீது $\deg Q_i=\deg P_i$ என உள்ள, முற்றிலும் பூச்சியமாகாத பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகும். இம்முறையை தொடர்ச்சியாக செய்வோமானால் இறுதியாக

$$R_s(x)e^{r_s(x)}=0 \tag{11}$$

என்ற வரிவாக்கம் கிடைக்கும். இங்கு I -ன்மீது R_s என்பது $\deg R_s=\deg P_s$ என உள்ள, முற்றிலும் பூச்சியமாகாத பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். $e^{r_sx}\neq 0$ என்பதால் (11)லிருந்து $R_s(x)=0$ எனக்கிடைக்கிறது. அதாவது I-ல் எல்லா x-க்கும், $R_s(x)=0$ ஆகும். இது ஒரு முற்றிலும் பூச்சியமாகாத பல்லுறுப்புக் கோவை என்பதற்கு முரணானது. எனவே I-ன் எல்லா x-க்கும் $p_s(x)=0$ ஆகும். மேலும் எல்லா $c_{ij}=0$ ஆகும். எல்லா c_{ij} - களும் பூச்சியம் என்பதால் வரையறைப்படி எல்லா தீர்வுகளும் ஒன்றையொன்று சாராதவை ஆகும். இதனால் தேற்றம் நிருபணமாகிறது.

$c_1,c_2,\cdots,c_m$ என்பன ஏதேனும் m மாறிலிகள் மற்றும் இடைவெளி I ன் மீது $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m$ என்பன $L(y)=0$ க்கு m தீர்வுகள் எனில்

$$\phi=c_1\phi_1+c_2\phi_2+\cdots+c_m\phi_m$$

என்பதும் I ன்மீது $L(y)=0$ க்கு ஒரு தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 தீர்க்க: $y'''-3y'+2y=0$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புச் சமன்பாடு $m^3-3m+2=0$ ஆகும். இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m_1=1, m_2=1, m_3=-2$, அதாவது 1 இருமுறை வரும் தீர்வு(இரட்டைத் தீர்வு) ஆகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு

$$e^x, xe^x, e^{-2x}$$

ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத மூன்று தீர்வுகள் ஆகும். மேலும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

$$\begin{aligned} y &= c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x} \\ &= (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{-2x} \end{aligned}$$

ஆகும். இங்கு c_1, c_2, c_3 ஆகியன மாறிலிகள்

எடுத்துக்காட்டு 2 தீர்க்க $y''' - 5y'' + 6y' = 0$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புச் சமன்பாடு $m^3-5m^2+6m=0$. இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m_1=0, m_2=3, m_3=2$. எனவே $e^{0x}=1, e^{3x}, e^{2x}$ என்பன ஒன்றையொன்று சாராத தீர்வுகள் ஆகும். எனவே பொதுத்தீர்வு $\phi(x) = c_1 + c_2e^{3x} + c_3e^{2x}$. இங்கு c_1, c_2, c_3 மாறிலிகள்

எடுத்துக்காட்டு 3 தீர்க்க $y''' - 8y = 0$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்பு சமன்பாடு $m^3-8=0$. இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$m_1 = 2, m_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, m_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

எனவே $e^{2x}, e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x}, e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x}$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு ஒன்றையொன்று சாராத தீர்வுகள் ஆகும். எனவே பொதுத்தீர்வு $\phi(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + c_3e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x}$. இங்கு c_1, c_2, c_3 ஆகியன மாறிலிகள்

எடுத்துக்காட்டு 4 தீர்க்க $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புச் சமன்பாடு $m^3 - 9m^2 + 27m - 27 = 0$. இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $m_1 = m_2 = m_3 = 3$. அதாவது 3 என்பது மூன்று முறை வரும் மூலம் (multiplicity of three). எனவே $e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}$ ஒன்றையொன்று சாராத தீர்வுகள் ஆகும். பொதுத் தீர்வு $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + c_3x^2e^{3x}$, c_1, c_2, c_3 என்பன மாறிலிகள்.

பயிற்சி-19

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க. மேலும் பொதுத்தீர்வை எழுது.

   (a) $3y'' + 2y' = 0$

   (b) $y'' - 4y' + 5y = 0$

   (c) $y'' + (3i - 1)y' - 3iy = 0$

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து பொதுத் தீர்வை காண்க.

   (a) $y^{(100)} + 100y = 0$

   (b) $y^{(4)} - 16y = 0$

   (c) $y''' - 3y' - 2y = 0$

   (d) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$

அலகு-V

அத்தியாயம் 20

மூலங்கள் இருத்தல் மற்றும் தனித்தன்மை

Existence and uniqueness of solutions

முதல்வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் பொதுவான அமைப்பு

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

இவ்வகை சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே ஒரு எதேச்சை மாறிலியைக் கொண்ட தீர்வு உண்டு. இருப்பினும்

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

என்ற முதல்வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாட்டுக்கு மெய்தீர்வுகளே இல்லை, மற்றும்

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$$

என்ற முதல்வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாட்டுக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு $y = 0$ ஆகும். இத்தீர்வில் மாறிலிகளே கிடையாது. இப்போது

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y); y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு $f(x, y)$ என்ற எதேச்சை சார்பு (x_0, y_0) என்ற புள்ளியின்

அண்மையில் வரையறுக்கப்பட்டது மற்றும் தொடர்ச்சியுடையது. சமன்பாடு (1) ஆனது முதல் வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தொடக்க நிலை மதிப்பு அல்லதுஆரம்ப மதிப்பு கணக்கு (Initial value problem of first order differential equation) எனப்படும்.

தொடர்ச்சியான தோராய மதிப்பு முறை (The method of successive approximation)

சமன்பாடு (1)ஐ நிவர்த்தி செய்யக் கூடியதும், (x_0, y_0) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதுமான $y = f(x)$ என்ற சார்பை காண முற்படுவோம். இம்முறை மற்ற முறைகளிலிருந்து முற்றிலும் மாறுப்பட்டது. இம்முறையில் முக்கியமரன விஷயம் என்ன எனில் தொடக்க மதிப்பு கணக்கு (1)ஐ அதற்கு பின்வரும் சமானமான தொகையீட்டு சமன்பாடாக எழுதலாம்.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\,dt \qquad (2)$$

மேற்கண்ட சமன்பாடு (2)ஐ தொகையீட்டுச் சமன்பாடு என அழைக்கக் காரணம் தெரியாத சார்பு தொகையீட்டுக் குறிக்குள் இருப்பதாலேயாகும். $y(x)$ என்பது சமன்பாடு (1)ன் தீர்வு என எடுத்துக்கொண்டால் அது தானாகவே தொடர்ச்சியான சார்பாகிறது. மேலும்

$$y'(x) = f[x, y(x)]$$

என்ற சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தில் உள்ள சார்பானது x-ல் தொடர்ச்சியான சார்பாகிறது. மேலும் இதனை x_0- லிருந்து x-வரை தொகையிட்டு $y(x_0) = y_0$ என எடுத்துக் கொண்டால், விளைவு சமன்பாடு (2) ஆக மாறுகிறது. அதாவது $y(x)$ என்பது சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வு எனில் அது சமன்பாடு (2)க்கும்

தீர்வாகிறது. இதுபோலவே $y(x)$ என்பது சமன்பாடு (2)-ன் ஒரு தொடர்ச்சியுடைய தீர்வு எனில் $y(x_0)=x_0$. ஏனெனில் $x=x_0$ எனும் போது தொகையீடு பூச்சியமாகிறது, பிறகு அதை வகையீடு செய்ய $y'(x)=f\left[x,y(x)\right]$ கிடைக்கிறது. அதாவது $y(x)$ ஆனதுசமன்பாடு (2)-ன் தீர்வாக இருந்தால் அது சமன்பாடு (1)க்கும் தீர்வாகிறது. சுருக்கமாக கூறினால் சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஒன்றுக்கொன்று சமானமான சமன்பாடுகள் ஆகும்.

இனி சமன்பாடு (2)ஐ படிப்படியான முறை (iteration process) யைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதைப் பார்ப்போம். அதாவது சமன்பாட்டுக்கு ஏதோ ஒரு தோராய தீர்வை எடுத்துக் கொண்டு அத்தீர்வை படிப்படியாக எவ்வாறு சமன்பாட்டுக்கு முழுமையான தீர்வாக (exact solution) உயர்த்துவது என்பதைப் பார்ப்போம்.

$y_0(x)=y_0$ என்ற மாறிலிச் சார்பை தீர்வின் தோராய மதிப்பாக எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு $y_0(x)=y_0$ என்பது (x_0,y_0) என்ற புள்ளி வழியாக செல்லும் கிடைமட்ட கோடு(horizontal line) ஆகும். இந்த தோராய மதிப்பை சமன்பாடு (2)-ன் வலப்புறத்தில் சேர்த்து எழுதுவோம். இதனால் y_0 லிருந்து y_1 என்ற புதிய தீர்வை (y_0-லும் சிறந்த தீர்வை) பின்வருமாறு காண முடியும்.

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,dt$$

இதற்கடுத்த படியில் $y_1(x)$ஐப் பயன்படுத்தி $y_2(x)$ என்ற y_1-ஐக் காட்டிலும் சிறந்த தோராய மதிப்பினை முன்பு போலவே காண முடியும்.

$$y_2(x)=y_1+\int_{x_0}^{x} f(t,y_1)\,dt .$$

இம்முறையில் n ஆவது படியில்

$$y_n(x)=y_{n-1}+\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1})\,dt \tag{3}$$

எனக்கிடைக்கும். இந்த முறையை பிக்கார்டின் தொடர்ச்சியான தோராய மதிப்புகள் முறை (Picard's method of successive approximation) என்போம். இம்முறையை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $y'=y, y(0)=1$ என்க. இச்சமன்பாட்டுக்கு $y=e^x$ என்பது வெளிப்படையான தீர்வு (obvious solution) ஆகும். எனவே இச்சமன்பாட்டுக்கு இணையான தொகையீட்டுச் சமன்பாடு

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$$

$$=1+\int_{x_0}^{x} y(t)\,dt$$

ஆகும். பிக்கரர்டின் தொடர்ச்சியான தோராய மதிப்புகள் முறைப்படி

$$y_n(x)=y_{n-1}+\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))\,dt$$

$$=1+\int_{x_0}^{x} y_{n-1}(t)\,dt$$

$n=1$ எனில்

$$y_1=y_0+\int_{0}^{x} y_0(t)\,dt$$

$$=1+\int_{0}^{x} 1\cdot dt=1+x$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x y_1(t)\,dt = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x y_2(t)\,dt$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

இதுபோலவே $y_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ எனக் காணலாம்.

இந்த தொடர்ச்சியான தோராய மதிப்புகள் முழுமைத் தீர்வுக்கு குவியும் (ஒருங்கும்). அதாவது இந்த பகுதி கூடுதல்களின் தொடர் e^x ன் பகுதி கூடுதல்களின் தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

தீர்க்க: $y' = x + y, y(0) = 1$ (4)

தீர்வு $y' - y = x$

இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு $y = -x - 1 + ce^{-x}$.

$x = 0, y = 1$ எனில் $c = 2$

$\therefore$ தீர்வு $y = -x - 1 + 2e^{-x}$

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாட்டுக்கு இணையான தொகையீட்டுச் சமன்பாடு

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

$$= 1 + \int_{0}^{x} [t + y(t)]\,dt$$

மேலும்

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt = 1 + \int_{0}^{x} [t, y_{n-1}(t)]\,dt.$$

பிக்கார்டின் முறைப்படி

$$y_1(x) = y_0 + \int_{0}^{x} f(t + y_0(t))\,dt$$

$$= 1 + \int_{0}^{x} (t+1)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_{0}^{x} (t + y_1(t))\,dt$$

$$= 1 + \int_{0}^{x} \left(t + 1 + t + \frac{t^2}{2!} \right) dt$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_{0}^{x} \left(1 + 2t + t^2 + \frac{t^3}{3!} \right) dt$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!}$$

$$y_4(x)=1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5}$$

பொதுவாக

$$y_n(n)=1+x+2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

மேலே உள்ள சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தில் உள்ளது

$1+x+2(e^x-x-1)+0=2e^x-x-1$க்கு ஒருங்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3

$y'=y^2,\quad y(0)=1$ என்ற தொடக்க மதிப்பு கணக்கில் $y_1(x), y_2(x), \quad y_3(x)$ ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடித்து முழுமைத் தீர்வுடன் ஒப்பிடு.

தீர்வு

$y'=y^2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $y=\dfrac{-1}{x+c}$

$x=0$ எனில் $y=1$ எனவே $c=-1$

$$\therefore y=\frac{-1}{x-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots,|x|<1$$

என்பது முழுமைத் தீர்வு. இப்போது பிக்கார்டின் முறைப்படி தீர்வின் தோராய மதிப்புகளைக் காண்போம்.

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt \;=1+\int_{0}^{x} y(t)^2\,dt$$

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x \left(y_{n-1}(t)\right)^2 dt$$

மற்றும்

$$y_1 = 1 + \int_0^x \left(y_o(t)\right)^2 dt$$

$$= 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(y_1(t)\right)^2 dt$$

$$= 1 + \int_0^x (1+t)^2 dt$$

$$= 1 + \frac{(1+x)^3}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= 1 + \frac{x^3}{3} + x^2 + x = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left(y_2(t)\right)^2 dt = 1 + \int_0^x \left(1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3}\right)^2 dt$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 + t^2 + t^4 + \frac{t^6}{9} + 2t + 2t^2 + \frac{2t^3}{3} + 2t^3 + \frac{2t^4}{3} + \frac{t^5}{3}\right) dt$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + 3t^2 + \frac{8t^3}{3} + \frac{5t^4}{3} + \frac{t^5}{3} + \frac{t^6}{9}\right) dt$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63}$$

பயிற்சி-20

1. $y' = 2x(1+y),\ y(0)=0$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் முழுமைத் தீர்வைக் காண்க. மேலும் பிக்கார்டின் முறைப்படி $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ மற்றும் $y_4(x)$ ஆகியவற்றைக் காண்க. இவற்றைமுழுமைத் தீர்வுடன் ஒப்பிடுக.

2. தீர்க்க

   a) $y' = x + y,\ y_0(x) = e^x$

   b) $y' = x + y,\ y_0(x) = 1 + x$

3. பின்வரும் தொடக்க மதிப்பு கணக்குகளை தீர்க்க.

   a) $y' = x + y,\ y_0(x) = e^x$

   b) $y' = x + y,\ y_0(x) = \cos x$

   c) $y' = x + y,\ y_0(x) = 1 + x$

அத்தியாயம் 21

பிக்கரர்டின் தேற்றம்

(Picard's Theorem)

பிக்கார்டின் தொடர்ச்சியான தோராய மதிப்புகளின் முதன்மை மதிப்பு அது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் கொள்கைக்கு அளிக்கும் பங்கில் அடங்கியுள்ளது. இத்தகைய பங்களிப்பு பின்வரும் தேற்றத்தின் மூலம் தெளிவாகக் காட்டப்படுகிறது.

தேற்றம் (பிக்கார்டின் தேற்றம்)

அச்சுகளுக்கு இணையாக பக்கங்களைக் கொண்ட மூடிய செவ்வகம் R-ன் மீது $f(x,y)$ மற்றும் $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ என்பன x மற்றும் y ல் தொடர்ச்சியான சார்புகள் என்க. (x_0, y_0) என்பது R-ன் உள்ளே உள்ள புள்ளி எனில் $h > 0$ என்ற எண் $|x - x_0| \le h$ என்ற இடைவெளி மீது

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

என்ற தொடக்க மதிப்பு கணக்குக்கு $y = y(x)$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வு அமையுமாறு இருக்கும்.

நிருபணம்

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$$

என்ற வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{2}$$

என்ற தொகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு சமமானது என நாம் அறிவோம். எனவே (1)ன் ஒவ்வொரு தீர்வும் (2)க்கும் ஒரு தொடர்ச்சியுடைய தீர்வாகும். மேலும் (2)ன் ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியுடைய தீர்வும் (1)க்கும் தீர்வாகும். இதிலிருந்து நாம் அறிவதுஎன்னவெனில் $|x - x_0| \leq h$ என்ற இடைவெளியின் ÁÐ (1)ì Ì ' Ö¨ Áò ¾¢Õ× (unique solution) இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அதே இடைவெளியில் (2)- க்கு ஒருமைத் தீர்வு உண்டு என்பதாம். இதற்கு முந்தைய அத்தியாயத்தில் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்ட $y_n(x)$ என்ற சார்புகளின் ¦ ¾¡ ¼÷Ó ¨ È (sequence of functions) சமன்பாடு (2)-ன் தீர்வுக்கு ஒருங்கும் என நாம் காண்பேரம்.

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 \\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt \\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)dt \\
y_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt \\
&\vdots \\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

மேலும் $y_n(x)$ என்பது

$$
y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x)\right] = y_0(x) + \left[y_1(x) - y_0(x)\right]
$$

$$
+\left[y_2(x) - y_1(x)\right] + \cdots\cdots + \left[y_n(x) - y_{n-1}(x)\right] + \cdots \qquad (4)
$$

என்ற சரர்புகளின் தொடரின் n-ஆவது பகுதி கூடுதல் ஆகும். எனவே (3)ன் ஒருங்கல் தன்மை (4)ன் ஒருங்கல் தன்மைக்கு சமானமானது ஆகும். தேற்றத்தை நிவர்த்தி செய்ய $|x-x_0|\le h$ என்ற இடைவெளியை வரையறுக்கும் $h>0$ என்ற எண்ணை முதலில் உருவாக்க வேண்டும். பிறகு அந்த இடைவெளியின் பின்வரும் வாக்கியங்கள் உண்மையெனக் காட்ட வேண்டும்.

(i) தொடர் ஆனது $y(x)$ என்ற சார்புக்கு ஒருங்கும்.

(ii) $y(x)$ என்பது சமன்பாடு (2)க்கு ஒரு தொடர்ச்சியுடைய தீர்வு

(iii) $y(x)$ என்பது மட்டுமே சமன்பாடு (2)க்கு தொடர்ச்சியுடைய தீர்வு அதாவது ன் ஒரே ஒரு தொடர்ச்சியுடைய தீர்வு . $y(x)$.

தேற்றத்தின் எடுகோள்கள் $h>0$ என்ற எண்ணை உருவாக்க பின்வருமாறு உதவுகின்றன. $f(x,y)$ மற்றும் $\frac{\partial f}{\partial y}$ ஆகிய சார்புகள் இரண்டும் செவ்வகம் R-ன் மீது தொடர்ச்சியான சார்புகள் என அனுமானித்துள்ளோம் (assumed). ஆனால் R என்பது அதன் எல்லைகளை உள்ளடக்கியது. என்ற விதத்தில் அது மூடியது. மேலும் வரம்புடையது. அதாவது மூடிய வரம்புடைய செவ்வகம் ஆகும். இதனால் $f(x,y)$ மற்றும் $\frac{\partial f}{\partial y}$ ஆகிய ஒவ்வொரு சார்பும் R-ன் மீது வரம்புடையவை. அதாவது M மற்றும் k என்ற மாறிலிகள் எல்லா $(x,y)\in R$க்கும்

$$|f(x,y)| \leq M \tag{5}$$

மற்றும்

$$|f(x,y)| \leq k \tag{6}$$

என்றவாறு இருக்கும்.

இப்போது x மதிப்புகள் சமமாக உடையதும் R-உள் உள்ளதுமான இரு புள்ளிகள் (x, y_1) மற்றும் (x, y_2) எனில் சராசரி மதிப்புத் தேற்றப்படி (Mean Value Theorem)

$$\left|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x, y^*)\right| |y_1 - y_2| \tag{7}$$

ஆகும். இங்கு y^* என்பது $y_1 < y^* < y_2$ என்றவாறு இருக்கும்.

(6) மற்றும் (7) லிருந்து R- உள்ள எல்லா (x, y_1) மற்றும் (x, y_2)- க்கும்

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leq k|y_1 - y_2| \tag{8}$$

அதாவது ஒரே செங்குத்துக் கோட்டில் உள்ள R-ன் எல்லா புள்ளி களுக்கும் (8) உண்மை. இப்போது R' என்ற இடைவெளியை $|x - x_0| \leq h$ என்ற சமனிலிகளால் வரையறுத்து h என்ற எண்ணை

$$kh < 1 \tag{9}$$

என்றவாறும் $|y - y_0| \leq Mh$ என்பதை R-ன் உள்ளிருக்குமாறும் தெரிவு செய்வோம். (x_0, y_0) என்பது R-ன் உட்புறத்தில் உள்ள புள்ளி என்பதால் மேற்கண்ட நிபந்தனைகளுடன் h ஐ தெரிவு செய்வது கடினமல்ல. இந்நிலையிலிருந்து $|x - x_0| \leq h$ என்ற இடைவெளி மீது நமது கவனத்தை நிலை நிறுத்துவோம்.

முதலில் (i) ஐ நிருபிப்போம். (i) ஐ நிருபிப்பதற்கு பதில்

$$|y_0(x)|+|y_1(x)-y_0(x)|+|y_2(x)-y_1(x)|+\cdots$$
$$+|y_n(x)-y_{n-1}(x)|+\cdots \qquad (10)$$

ஒருங்கும் என நிருபித்தால் போதுமானது.

இதனை அடைவதற்கு $|y_n(x)-y_{n-1}(x)|$ என்ற உறுப்பை கணக்கிடுவோம்.

முதலில் $y_n(x)$ என்ற ஒவ்வொரு சார்பின் வரைபடமும் R'-லும் இருக்கும். அதனால் அவ்வரைபடம் R-லும் இருக்கும் என்பதை அறிந்து கொள்ள வேண்டும். $y_0(x)=y_0$ எனில் மேற்சொன்ன கருத்து வெளிப்படையானது. எனவே $[t, y_0(t)]$ என்ற புள்ளிகள்

R'-ல் இருக்கும், மேலும்

$$|f[t, y_0(t)]|\leq M \quad \text{ÁüÚõ}$$

$$|y_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f[t, y_0(t)]\,dt\right|$$
$$\leq \int_{x_0}^{x}\left|f[t, y_0(t)]\,dt\right|$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} M\,dt$$
$$\leq M\,|x-x_0|$$

அதாவது $|y_1(x)-y_0|\leq Mh$.

இதுபோலவே $|y_1(x)-y_0|\le Mh$ என்ற மேற்கண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து $[t, y_1(t)]$ என்ற எல்லா புள்ளிகளும் R' – ல் இருக்கும், மேலும்

$|f[t,y_1(t)]|\le M$ மற்றும் $|y_2(x)-y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f[t,y_1(t)]dt\right|$

அதாவது $|y_2(x)-y_0|\le Mh$.

இதுபோலவே $|y_3(x)-y_0|\le Mh, \cdots, |y_n(x)-y_0|\le Mh, \cdots$ எனக் காணலாம். மூடிய இடைவெளி மீது வரையறுக்கப்பட்ட எந்த ஒரு தொடர்ச்சியான சார்புக்கும் அவ்விடைவெளியில் மீப்பெரு மதிப்பு உண்டு என நாம் அறிவோம். இதன்படி $y_1(x)$ என்பது தொடர்ச்சியான சார்பு என்பதால் a என்ற மாறிலியை

$$a = \max|y_1(x)-y_0|$$

என வரையறுப்போம் அதாவது

$|y_1(x)-y_0|\le a$ ஆகும்.

இப்போது $[t, y_1(t)], [t, y_0(t)]$ என்பன R'-ல் உள்ள இரு புள்ளிகள் எனில், (8) ன் படி

$$|f[t,y_1(t)]-[t,y_0(t)]|\le k|y_1(t)-y_0(t)|\le ka$$

மேலும்

$$|y_2(x)-y_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}\left(f[t,y_1(t)]-[t,y_0(t)]\right)dt\right|$$

$$\le ka\left|\int_{x_0}^{x} dt\right|$$

$$\le ka|x-x_0|$$

$$\le kah$$

அதாவது $|y_2(x)-y_1(x)|\le a(kh)$

இது போலவே

$$|y_3(x)-y_2(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\left(f\left[t,y_2(t)\right]-\left[t,y_1(t)\right]\right)dt\right|\le a(kh)^2$$

ஏனெனில் $\left|f\left[t,y_2(t)\right]-\left[t,y_1(t)\right]\right|\le k\left|y_2(t)-y_1(t)\right|\le k^2ah$

இம்முறையைத் தொடர கிடைப்பது

$$|y_n(t)-y_{n-1}(t)|\le a(kh)^{n-1},n=1,2,3,\cdots.$$

எனவே தொடர் (10)-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் பின்வரும் மாறிலித் தொடரின் உள்ள அதனை ஒத்த உறுப்புக்கு குறைவாகவோ அல்லது அதற்குச் சமமாகவே இருக்கும்.

$$|y_0|+a+a(kh)+a(kh)^2+\cdots+a(kh)^{n-1}+\cdots$$

லிருந்து மேற்கண்ட மாறிலித் தொடர் ஒருங்கும் என்பது உறுதிப்படுத்தப்படுவதால் தொடர் (10)ம் ஒருங்கும் தொடராகும் (ஒப்பீட்டு சோதனைப் படி). எனவே தொடர் (4) ஒருங்கும் தொடராகும். (4)ஆனது $y(x)$ க்கு ஒருங்குவதாக எடுத்துக் கொண்டால் $y_n(x)\to y(x)$ ஆகும். ஒவ்வொரு $y_n(x)$-ன் வரைபடமும் R'-ல் இருப்பதால் $y(x)$-ம் அதே பண்பினைப் பெற்றிருக்கும் என்பது உறுதியாகிறது. எனவே (i) நிருபணமாகிறது.

இப்போது (ii) ஐ நிருபிப்போம். மேலே நிருபித்த ஒருங்கல் சீரான ஒருங்கல் (uniform convergence) ஆகும். ஏனெனில் $|x-x_0|\le h$ என்பது மூடிய வரம்புடைய இடைவெளி. அதாவது n மிகப்பெரியது எனில், அந்த இடைவெளியில் எல்லா x-க்கும் $y_n(x)$ ஐ $y(x)$ க்கு மிக நெருக்கமாக உள்ளவாறு

$y_n(x)$ ஐ உருவாக்கலாம். அதாவது, சுருங்கச் சொன்னால், $\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்படும் போது n_0 என்ற மிகையெண் எல்லா $n \geq n_0$-க்கும் $|y(x) - y_n(x)| < \varepsilon$ என உள்ளவாறு இருக்கும். எல்லா $y_n(x)$ களும் இந்த இடைவெளியில் சீரான தொடர்ச்சியுடையன என்பதால் அவற்றின் எல்லை சார்பு $f(x)$-ம் அவ்விடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடைய சார்பாகும்.

இப்போது (ii)-ஐ முழுவதுமாக நிருபிக்க, இன்னமும் நிருபிக்க வேண்டியது

(2) க்கு $y(x)$ ஒரு தீர்வு எனவாகும். இதற்கு

$$y(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\,dt = 0 \tag{11}$$

என நிருபிப்போம். ஆனால்

$$y_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt = 0 \tag{12}$$

என நாம் அறிவோம்.

இப்போது (11)ன் இடப்புறத்திலிருந்து (12)-ன் இடப்புறத்தை கழிப்போமானால்

$$y(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\,dt = y(x) - y_n(x)$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \left(f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y(t)]\right)dt$$

ஆகும். எனவே

$$\left|y(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[t,y(t)]dt\right| \le |y(x)-y_n(x)|$$
$$+\left|\int_{x_0}^{x}\left(f[t,y_{n-1}(t)]-f[t,y(t)]\right)dt\right|$$

ஆகும். $y(x)$ ன் வரைபடம் R'-ல் அமைவதால் அது R-ன் உள்ளும் அமையும். எனவே

$$\left|y(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[t,y(t)]dt\right| \qquad (13)$$
$$\le |y(x)-y_n(x)|+kh\max|y_{n-1}(x)-y(x)|$$

$y_n(x)$ ஆனது $y(x)$க்கு சீராக ஒருங்குவதால் n-ஐ மிகப் பெரிய தாக எடுக்க (13)-ன் வலப்புறத்தின் இரண்டாம் உறுப்பை மிக மிகச் சிறியதாக்கலாம். மேலும் வலப்புறத்தில் முதல் உறுப்பு $|y(x)-y_n(x)|\to 0$ ஆகும் என்பதால் நமக்கு கிடைப்பது

$$\left|y(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[t,y(t)]dt\right|=0$$

அதாவது

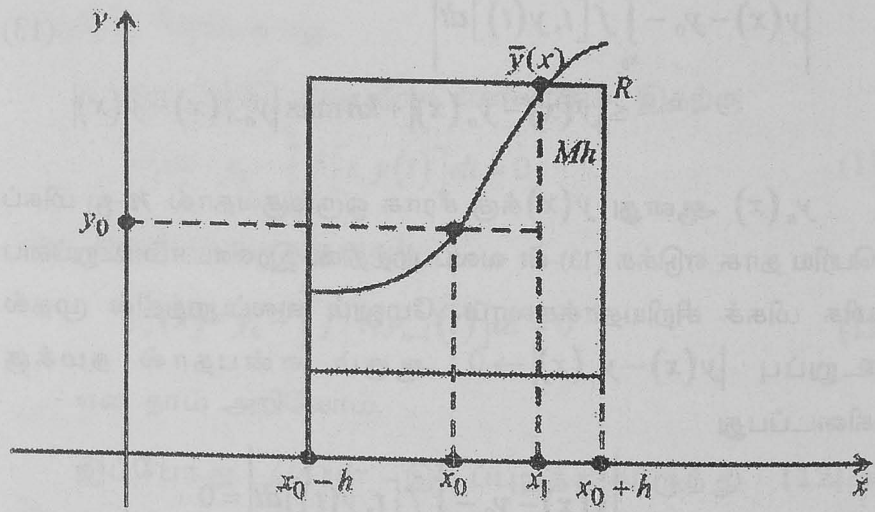
$$y(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[t,y(t)]dt=0.$$

இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில் $y(x)$ ஆனது $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,y(t)]dt$ -ன் தீர்வாகும்.

எனவே(ii) முழுமையாக நிருபிக்கப்படுகிறது.

கடைசியாக இப்போது (iii) ஐ நிருபிப்போம். இதனைநிருபிக்க $|x-x_0|\le h$ என்ற இடைவெளியில் $\bar{y}(x)$-ம் (2)-ன்தொடர்ச்சியுடைய தீர்வு எனில் $y(x)=\bar{y}(x)$ என

நிருபிக்கவேண்டும். அவ்வாறு நிருபிப்போமானால் (2)-க்கு ஒரே ஒரு தீர்வுமட்டுமே என்பது நிருபணமாகும். இதற்கு முதலில் நிருபிக்க வேண்டியது $\bar{y}(x)$-ன் வரைபடம் R'-ல் இருக்கும் என்பதாகும். அவ்வாறு நிருபித்தால் $\bar{y}(x)$-ன் வரைபடம் R-லும் இருக்கும். முடிந்தால் $\bar{y}(x)$-ன் வரைபடம் R'-க்கு வெளியில் செல்வதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.



எனவே இச்சார்புகளின் பண்புகளிலிருந்து (தொடர்ச்சித்தன்மை மற்றும் $\bar{y}(x_0)=y_0$), x_1 என்பது $|x-x_0|<|x_1-x_0|$ எனில் $|x_1-x_0|<h$, $|\bar{y}(x_1)-y_0|=Mh$ மற்றும் $|\bar{y}(x)-y_0|<Mh$ எனவும் இருக்கும். இதிலிருந்து

$$\frac{|\bar{y}(x_1)-y_0|}{|x_1-x_0|}=\frac{Mh}{|x_1-x_0|}>\frac{Mh}{h}=M$$

ஆகும். இருப்பினும் சராசரி மதிப்பு தேற்றப்படி x_0 மற்றும் x_1 ஆகியவற்றிற்கு இடையில் x^* என்பது, $\left[x^*, \bar{y}\left(x^*\right)\right]$ என்பது R-ல் இருப்பதால்,

$$\frac{\left|\bar{y}\left(x_1\right)-y_0\right|}{\left|x_1-x_0\right|}=\left|\bar{y}\left(x^*\right)\right|=\left|f\left[x^*, \bar{y}\left(x^*\right)\right]\right| \leq M$$

என இருக்கும். இது முரண்பாடானது. ஏனெனில் இத்தகைய பண்புகளுடன் எந்த ஒரு புள்ளி x-ம் இருக்க முடியாது. எனவே $\bar{y}(x)$-ன் வரைபடம் R'-க்கு உள்ளேயே அமையும். (iii) ஐ முழுவதுமாக நிரூபிக்க $\bar{y}(x)$ மற்றும் $y(x)$ ஆகிய இரண்டுமே (2)-ன் தீர்வுகள் என்பதைப் பின்வருமாறு பயன்படுத்துவோம்.

$$|\bar{y}(x)-y(x)|=\left|\int_{x_0}^{x} f[t, \bar{y}(t)]-f[t, y(t)] dt\right|$$

$y(x)$ மற்றும் $\bar{y}(x)$ ஆகியவற்றின் வரைபடங்கள் R'-க்கு உள்ளேயே அமைவதால்

$$|\bar{y}(x)-y(x)| \leq k h \max |\bar{y}(x)-y(x)|$$

ஆகும். எனவே

$$\max |\bar{y}(x)-y(x)| \leq k h \max |\bar{y}(x)-y(x)|$$

இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில்

$\max |\bar{y}(x)-y(x)|=0$ ஆகும்.

அவ்வாறு இல்லை எனில் $1 \leq kh$ எனக் கிடைக்கும். இது (9)க்கு முரணானது. எனவே $|x-x_0| \leq h$-ல் உள்ள எல்லா x-க்கும் $\bar{y}(x)=y(x)$ ஆகும்.

இப்போது (iii) நிரூபிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு (1) தேற்றத்தின் எடுகோள்களை பலவீனமாக்குதல் (எளிமையாக்குதல்) மூலம் தேற்றத்தினை வன்மையாக்கலாம். (பலமாக்குதல்). உதாரணமாக தேற்றத்தின் தேவையைவிட R-ல் $\frac{\partial f}{\partial y}$-ன் தொடர்ச்சி தன்மை வலிமையானது. மேலும் $\frac{\partial f}{\partial y}$-ன் தொரடர்ச்சியினை பயன்படுத்தி சமனிலி (8)ஐ மட்டுமே பெறப்பட்டது. எனவே $\frac{\partial f}{\partial y}$ ஐ தொடர்ச்சியுடையது என்ற எடுகோளை எடுப்பதைவிட சமனிலி (8)ஐ உண்மையென எடுத்துக் கொள்ளலாம். சில மாறிலி k-களுக்கு, சில சார்புகள் தொடர்ச்சியான பகுதி வகையிட முடியவில்லை எனினும், சமனிலி (8)ஐ நிவர்த்தி செய்வதால் மேற்கண்ட முறையில் தேற்றத்தின் தன்மையை மேலும் வலிமையாக்கலாம்.

$$\frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2}$$

என்ற வித்தியாசங்களின் விகிதம் R-ன் மீது வரம்புடையது என இச்சமனிலி (8) கூறுகிறது. இதனை y-ல் லிப்சிட்ஸின் நிபந்தனை (Lipchitz condition) எனக் கூறலாம்.

குறிப்பு 2

லிப்சிட்ஸ் நிபந்தனையை நீக்கி, R-ன் மீது $f(x,y)$ தொடர்ச்சியானது என்று எடுத்துக் கொண்டாலும் தொடக்க மதிப்பு கணக்கு (1)க்கு தீர்வு உண்டு. இந்தத் தீர்வுக்கு பீனோவின் தேற்றம் (Peano theorem) என்று பெயர். மேலும் இக்கணக்கின் தீர்வு உள்ளமை, ஒருமைத்தன்மை உடையதாக இருக்கத் தேவையில்லை.

உதாரணத்துக்கு பின்வரும் கணக்கைப் பார்ப்போம்.

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, y(0) = 0 \tag{14}$$

மற்றும் R என்பது $|x|\le 1, |y|\le 1$ என்ற செவ்வகத்தைக் குறிக்கட்டும். இங்கு $f(x,y) = y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ என்பது R-ன் மீது தொடர்ச்சியுடையது மேலும் $y_1(x) = x^3, y_2(x) = 0$ என்பன எல்லா x-க்கும் (14)க்கு இரண்டு தீர்வுகள் என்பதால் தீர்வு ஒருமைத் தன்மையுடையது இல்லை என நிருவலாகிறது.

$$\frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2} = \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{3y^{\frac{2}{3}}}{y} = \frac{3}{y^{\frac{1}{3}}}$$

என்ற வித்தியாசங்களின் விகிதம் பூச்சியத்தின் அண்மையில் வரம்புடையது அன்று என்பதால் லிப்சிட்ஸ் நிபந்தனை பூர்த்தி செய்யப்படவில்லை. இதனால் தான் ஒருமைத் தீர்வு இல்லை.

குறிப்பு3 : h என்பது சிறியதாக உள்ள போது $|x-x_0|\le h$ என்ற இடைவெளியில் தேற்றம் A ஆனது தீர்வின் உள்ளமையையும் அதன் ஒருமைத்தன்மையும் உறுதிப்படுத்துவதால் தேற்றம் A ஆனது தீர்வு உள்ளமை மற்றும் ஒருமைத்தன்மை தேற்றம் (local existence and uniqueness theorem) உதாரணத்திற்கு பின்வரும் முதல் வரிசை நேரியல் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

இங்கு $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ ஆனது $a\le x\le b$ என்ற இடைவெளியிலும் வரையறுக்கப்பட்டதும் தொடர்ச்சி யானதுமான சார்புகள். எனவே இங்கு , $a\le x\le b$ எனில்

$$f(x,y) = -P(x)y + Q(x)$$

ஆகும்.

$k = \max|P(x)|, a\le x\le b$ எனில்

$$
\begin{aligned}
|f(x,y_1)-f(x,y_2)| &= |-P(x)y_1+Q(x)-(P(x)y_2+Q(x))| \\
&= |-P(x)(y_1-y_2)| \\
&\leq k\,|y_1-y_2|
\end{aligned}
$$

எனவே $f(x,y)$ என்ற சார்பு $a \leq x \leq b$ மற்றும் $-\infty < y < \infty$-ல் லிப்சிட்ஸ் நிபந்தனையை நிவர்த்தி செய்வதுடன் தொடர்ச்சியானவை இத்தருணத்தில் தொடக்க மதிப்பு கணக்கு

$$y' + P(x)y = Q(x), y(x_0) = y_0$$

$a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளி முழுவதும் ஒருமைத் தீரவு உடையது. இதுவே அடுத்த தேற்றத்தின் சிறப்பு வகையாகும்.

தேற்றம் B $a \leq x \leq b$ மற்றும் $-\infty < y < \infty$ என்ற பட்டை(strip)

மீது $f(x,y)$ என்ற சார்பு தொடர்ச்சியுடையது மேலும் லிப்சிட்ஸ் நிபந்தனையான

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq k\,|y_1-y_2|\text{-ஐ}$$

நிவர்த்தி செய்கிறது என்க. இந்த பட்டையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (x_0, y_0) எனில்

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

என்ற தொடக்க மதிப்பு கணக்கு $a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளி மீது ஒரே ஒரு தீர்வு உடையது.

நிருபணம்: இத்தேற்றத்தின் நிருபணம் தேற்றம் A ன் (15) நிருபணத்தை ஒத்தது. ஒரே ஒரு விசயம் அத்தேற்றத்தின் உள்ள செவ்வகம் வரம்புடையது ஆனால் இத்தேற்றத்தின் செவ்வகம் மேல்வரம்போ அல்லது கீழ்வரம்போ உடையது அன்று. எனவே அத்தேற்றத்தின் நிருபணத்தைப் போன்றே

ஆரம்பித்து $a \le x \le b$ என்ற இடைவெளி முழுவதும் தொடர் (4)ஐ சீராக ஒருங்கும் எனக்காட்டுவதால் தொடர்முறை (3) சீராக ஒருங்கும் என நிருபிப்போம். (10)-ன் உறுப்புகளை வேறுவிதமான முறையில் மதிபிடுவதன் மூலம் இதனை அடைவோம். முதலில் M_0, M_1 மற்றும் M என்ற எண்களை பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

$$M_0 = |y_0|; M_1 = \max |y_1(x)|, M = M_0 + M_1$$

இதனால் $|y_0(x)| \le M$ எனவும் $|y_1(x) - y_2(x)| \le M$ எனவும் ஆகும். இப்போது $x_0 \le x \le b$ எனில்

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \left(f\left[t, y_1(t)\right] - f\left[t, y_0(t)\right] \right) dt \right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x} \left| \left(f\left[t, y_1(t)\right] - f\left[t, y_0(t)\right] \right) \right| dt$$

$$\le \int_{x_0}^{x} k \left| y_1 - y_0 \right| dt$$

$$\le \int_{x_0}^{x} kM dt$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = kM(x - x_0)$$

இப்போது

$$|y_3(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \left(f\left[t, y_2(t)\right] - f\left[t, y_1(t)\right] \right) dt \right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x} \left| \left(f\left[t, y_2(t)\right] - f\left[t, y_1(t)\right] \right) \right| dt$$

$$\le \int_{x_0}^{x} k \left| y_2(t) - y_1(t) \right| dt$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} k\cdot k|y_1-y_0|(t)\,dt$$

$$\leq k^2 M \int_{x_0}^{x} (t-x_0)\,dt$$

அதாவது

$$|y_3(x)-y_2(x)| \leq k^2 M \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

எனவே பொதுவாக

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leq k^{n-1} M \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

இப்போது $x-x_0$ ஐ $|x-x_0|$ ஆல் நீக்க $a \leq x \leq x_0$ என்ற இடை வெளியில் மேற்கண்ட அனைத்தும் செல்லத்தக்கவை ஆகும். எனவே

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leq k^{n-1} M \frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

$a \leq x \leq b$ என்பதால் $|x-x_0| \leq (b-a)$ ஆகும்.

எனவே இடைவெளியில் உள்ள x-க்கும் மற்றும் $n=1,2,3,\cdots$ எனில்

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leq k^{n-1} M \frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!} \leq k^{n-1} M \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில் தொடர் (10)–ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதற்கு ஒத்த பின்வரும் தொடரில் உள்ள உறுப்பை விட சிறியது அல்லது அதற்குச் சமம் என்பதாகும்.

$$M + M + kM + kM(b-a) + k^2 M \frac{(b-a)^2}{2!} + k^3 M \frac{(b-a)^3}{3!} + \cdots$$

மேற்கண்ட தொடர் ஒருங்கும் தொடராகும். எனவே தொடர் ஆனது $a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளி மீது சீரான

தொடர்ச்சி உடையது. மேலும் அதன் எல்லை $y(x)$ ஆகும். தேற்றம் A ல் உள்ளது போலவே ஒவ்வொரு $y_n(x)$ தொடர்ச்சியுடையது எல்லைச் சார்பு சமன்பாடு (15)-ன் ஒரு தீர்வு ஆகும்.

தேற்றத்தை நிறைவு செய்ய இன்னமும் நிருவ வேண்டியது $y(x)$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு என்போம். இதற்கு முடிந்தால், சமன்பாடு (15)க்கு மற்றொரு தீர்வு $\bar{y}(x)$ உண்டு என்போம். எனவே நாம் நிருபக்க வேண்டியது இடைவெளியில் உள்ள எல்லா x-க்கும் $y(x)=\bar{y}(x)$ என்பதே.

இதற்கு, எல்லா x-க்கும் $n \to \infty$ எனில் $y_n(x) \to \bar{y}(x)$ என முதலில் நிருபிப்போம். இவ்வாறு நிருபித்தாலும், $n \to \infty$ எனில் $y_n(x) \to y(x)$ என நாம் ஏற்கனவே தெரிந்திருப்பதாலும், எல்லா x-க்கும் $\bar{y}(x)=y(x)$ ஆகும். $\bar{y}(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியுடைய சார்பு மேலும் அது

$$\bar{y}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left[t,\bar{y}(t)\right]dt$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும்.

$A=\max|\bar{y}(x)-y_0|$ என்க. $x_0 \le x \le b$ எனில்

$$|\bar{y}(x)-y_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\left(f\left[t,\bar{y}(t)\right]-f\left[t,y_0(t)\right]\right)dt\right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x}\left|\left(f\left[t,\bar{y}(t)\right]-f\left[t,y_0(t)\right]\right)\right|dt$$

$$\le \int_{x_0}^{x} k\left|\bar{y}(t)-y_0(t)\right|dt \le \int_{x_0}^{x} kA\,dt$$

அதாவது $|\bar{y}(x)-y_1(x)| \le kA(x-x_0)$.

இதுபோலவே

$$|\overline{y}(x)-y_2(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\left(f\left[t,\overline{y}(t)\right]-f\left[t,y_1(t)\right]\right)dt\right|$$

$$\leq\int_{x_0}^{x}\left|\left(f\left[t,\overline{y}(t)\right]-f\left[t,y_1(t)\right]\right)\right|dt$$

$$\leq\int_{x_0}^{x}k\left|\overline{y}(t)-y_1(t)\right|dt\leq\int_{x_0}^{x}k^2A\left(t-x_0\right)dt$$

அதாவது $|\overline{y}(x)-y_2(x)|\leq k^2A\dfrac{(x-x_0)^2}{2!}$.

எனவே, பொதுவாக

$$|\overline{y}(x)-y_n(x)|\leq k^nA\frac{\left(x-x_0\right)^n}{n!}$$

$a\leq x\leq x_0$ என இருப்பினும் மேற்கண்ட முடிவு பொருந்தும். எனவே இடைவெளியில் உள்ள எந்த x-க்கும்

$$|\overline{y}(x)-y_n(x)|\leq k^nA\frac{|x-x_0|^n}{n!}\leq k^nA\frac{(b-a)^n}{n!}$$

ஏனெனில் $|x-x_0|^n\leq(b-a)^n$.

மேற்கண்ட சமனிலியின் வலப்புறம், $n\to\infty$ எனில், பூச்சியத்தை நெருங்கும். எனவே எல்லா x-க்கும் $\overline{y}(x)=y(x)$. அதாவது $y(x)$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு இதன் மூலம் தேற்றம் முழுவதுமாக நிருபிக்கப்படுகிறது.

விடைகள்

அத்தியாயம்-1

(1) (a) $y=\frac{1}{2x}$

(b) $y=-\frac{1}{3}\sin x$

(c) $y=-3x$

(2) (a) $x^2y''-2xy'+2y=0$

(b) $y''-k^2y=0$

(c) $y''+k^2y=0$

அத்தியாயம்-2

(1) $y=x+2x^2$

அத்தியாயம்-3

(1) (a) $y=c_1\sin x+c_2\cos x$

(b) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$

(2) $y=c_1x^2+c_2x^{-2}$

(3) $y=c_1x^{-\frac{1}{2}}\sin x+c_2x^{-\frac{1}{2}}\cos x$

(4) (a) $y=c_1x+c_2e^x$

(b) $y=c_1x+c_2x^{-2}$

(5) $y=c_1e^x+c_2x^2e^x$

(6) $y=c_1e^x+c_2e^x\int e^{\left[-2x+\int f(x)dx\right]}dx$

அத்தியாயம்-4

(1) (a) $y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-x}\log x - \frac{3}{4}x^2e^{-x}$

(b) $y_p = -e^{-x}\left(8x^2+4x+1\right)$

(c) $y_p = \frac{1}{2}xe^{-x}\sin 2x + \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x\log(\cos 2x)$

(2) (a) $y = c_1x + c_2\left(x^2+1\right) + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

(b) $y = c_1e^x + c_2x^{-1} - x - 1 - \frac{1}{3}x^2$

அத்தியாயம்-6

(1) $$y = a_0 - (a_0-1)x + \frac{(a_0-1)}{2!}x^2 - \frac{(a_0-1)^3}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= 1 + (a_0-1)\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = 1 + (a_0-1)e^{-x}$$

(2) $y = a_1x$, ஒப்பீட்டில் வித்தியாசம் ஏதுமில்லை

(4) $$y = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + x - 1$$
$$= e^{-x} + x - 1$$

அத்தியாயம்-7

(1) $$y = a_0\left(1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^8 + \cdots\right) + a_1x$$
$$= a_0(1 + \tan^{-1}x) + a_1x$$

(3) $$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots$$
$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} - \frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots$$

(4) $$a_{n+2} = -\frac{(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$

(a) $y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{2\cdot3} - \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdots$

(b) $y_2(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4} - \frac{4x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdots$

அத்தியாயம்-8

1. (a) $x = 0, x = 1$ ஆகியன ஒழுங்கான புள்ளிகள், $x = -1$ என்பது ஒழுங்கற்ற புள்ளி.

   (b) $x = 0$ என்பது ஒழுங்கற்ற புள்ளி.

2. (a) $x = 0$ என்பது சாதாரண புள்ளி.

   (b) $x = 0$ என்பது ஒழுங்கான ஒருமைப்புள்ளி.

   (c) $x = 0$ என்பது சாதாரண புள்ளி.

3. (a) $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \cdots\right) = \sin\sqrt{x}$

   $y_2(x) = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots = \cos\sqrt{x}$

   (b) $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{7x}{6} + \frac{21x^2}{40} - \cdots\right)$

   $y_2(x) = 1 - 3x + 2x^2 + \cdots$

5. $m(m-1) - 2m + 2 = 0; m_1 = 2, m_2 = 1$

அத்தியாயம்-9

1. (a) $y = c_1 x^{\frac{1}{2}} e^x + c_2 x^{\frac{1}{2}} e^x \log x$

2. (a) $y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = x^{-1}\sin x$

$$y_2 = x^{-1}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right) = x^{-1}\cos x$$

(b) $$y_1 = x^2\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}x^2-\frac{1}{60}x^3+\cdots\right)$$

$$y_2 = x^{-1}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots\right)$$

(c) $$y_1 = x^2\left(1-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^8}{5!}-\cdots\right) = \sin x^2$$

$$y_2 = 1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}- = \cos x^2$$

3. $$y = x\left(1-\frac{x^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!\cdot 3!}-\cdots\right)$$

4. $$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right) = x^{-\frac{1}{2}}\sin x$$

$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right) = x^{-\frac{1}{2}}\cos x$$

அத்தியாயம்-10

2.(a) $$y = c_1 F\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},-x\right)+c_2(-x)^{\frac{1}{2}}F\left(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},-x\right)$$

$$= c_1\left(\frac{1}{1+x}\right)+c_2\left(\frac{(-x)^{\frac{1}{2}}}{1+x}\right)$$

(b) $$y = c_1 F\left(2,2\frac{1}{2},\frac{x+1}{2}\right)+c_2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{x+1}{2}\right)$$

(c) $$y = c_1 F\left(1,1,\frac{14}{5},\frac{3-x}{5}\right)+c_2\left(\frac{3-x}{5}\right)^{-\frac{9}{5}}F\left(-\frac{4}{5},-\frac{4}{5},-\frac{4}{5},\frac{3-x}{5}\right)$$

4. $$y = c_1 F\left(1,-1,-\frac{1}{2},1-e^x\right)+c_2\left(1-e^x\right)^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2},1-e^x\right)$$

அத்தியாயம்-11

1. $x=\infty$ என்பது ஒரு ஒழுங்கற்ற ஒருமைப்புள்ளி.

அத்தியாயம்-13

1. (a) $f(x)=\frac{1}{4}P_0(x)+\frac{1}{2}P_1(x)+\frac{5}{16}P_2(x)$

(b) $f(x)=\frac{1}{2}(e-e^{-1})P_0(x)+3e^{-1}P_1(x)+\frac{1}{2}(5e-35e^{-1})P_2(x)+\cdots$

அத்தியாயம்-15

1. $J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)$

$J_3(x)=\left(\frac{8}{x^2}-1\right)J_1(x)-\frac{4}{x}J_0(x)$

$J_4(x)=\left(\frac{48}{x^3}-\frac{8}{x}\right)J_1(x)-\left(\frac{24}{x^2}-1\right)J_0(x)$

அத்தியாயம்-16

1. $\frac{dy}{dx}=z, \frac{dz}{dx}=w, \frac{dw}{dx}=w-x^2z^2$

அத்தியாயம்-17

1. (b) $x=c_1e^{4t}+c_2e^{-2t};$

$y=c_1e^{4t}-c_2e^{-2t}$

(c) $x=3e^{4t}+2e^{-2t};$

$y=3e^{4t}-2e^{-2t}$

2. (b) $x=2c_1e^{4t}+c_2e^{-t};$

$y=3c_1e^{4t}-c_2e^{-t}$

(c) $x=2c_1e^{4t}+c_2e^{-t}+3t-2;$

$y=3c_1e^{4t}-c_2e^{-t}-2t+3$

3. $x = c_1 e^t$

$y = c_2 e^t$

அத்தியாயம்-18

1. (a) $x = 2c_1 e^{-t} + c_2 e^t$ (b) $x = -2c_1 e^{3t} + c_2(1+2t)e^{3t}$;

$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$ $y = c_1 e^{3t} - c_2 t e^{3t}$

(c) $x = 3c_1 + c_2 e^{-2t}$

$y = 4c_1 + 2c_2 e^{-2t}$

(d) $x = e^{3t}\left(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t\right)$

$y = e^{3t}\left[c_1(\sin 2t - \cos 2t) - c_2(\sin 2t + \cos 2t)\right]$

அத்தியாயம்-19

1. (a) $\phi(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{2x}{3}}$

(b) $\phi(x) = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right)$

(c) $\phi(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3ix}$

2. (a) $\phi(x) = \sum_{k=1}^{100} c_k e^{r_k x}, r_k = (100)^{\frac{1}{100}} \exp\left[\frac{(2k-1)\pi}{100}\right]$,

$k = 1, 2, \cdots, 100$

(b) $\phi(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2ix} + c_4 e^{-2ix}$

(c) $\phi(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + c_3 e^{2x}$

1. $$y = e^{x^2} - 1$$

$$y_1(x) = x^2$$

$$y_2(x) = x^2 + \frac{x^4}{2}$$

$$y_3(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2\cdot 3}$$

$$y_4(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2\cdot 3} + \frac{x^8}{2\cdot 3\cdot 4}$$

2.(a) $$y_n(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + e^x \to \left(e^x - x - 1\right) + e^x$$

(b) $$y_n(x) = 1 + x + 2\left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right] \to 1 + x + 2(e^{x-x-1}$$

3. (a) $$y_n(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + e^x$$

(b) $$y_1(x) = (\sin x - x) + 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_2(x) = -\left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}\right) + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!}$$

$$y_3(x) = -\left(\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right) + 1 + x + \left(x^2 + \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{x^4}{4!}$$

(c) $$y_n(x) = 1 + x + 2\left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]$$

BIBLIOGRAPHY

1. G.F.Simmons, Differential Equations with Applications and Historical Notes, TMH, New Delhi-1984.

2. W.T.Reid, Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, New York,1971.

3. E.A.Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw Hill Publishing Company.

4. P.Hartman, Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, New York,1964.

5. W.Kaplan, Ordinary Differential Equations Reading, Mass: Addison- Wesley, 1958.

6. Hurewitz, Witold, Lectures on ordinary differential equations, Cambridge, Mass.: The Technology Press and New York; John Wiley and sons, Inc. 1958.

7. CoddingtonA, and Levinson, Norman, Theory of ordinary Differential equations, New York, McGraw –Hill,1955.

8. Lefschen., S. Differential Equations; Geometric Theory, New York; Inter Science , 1957.

9. Kamke, E., Differentialgleichungen- Lösungsmetheden and Lösungen, Vol I, 2nded. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1943; reprinted by J.W.Edwards, Ann Arbor, Mich., 1945.

MADURAI KAMARAJ UNIVER DR. T.P.M.
299105