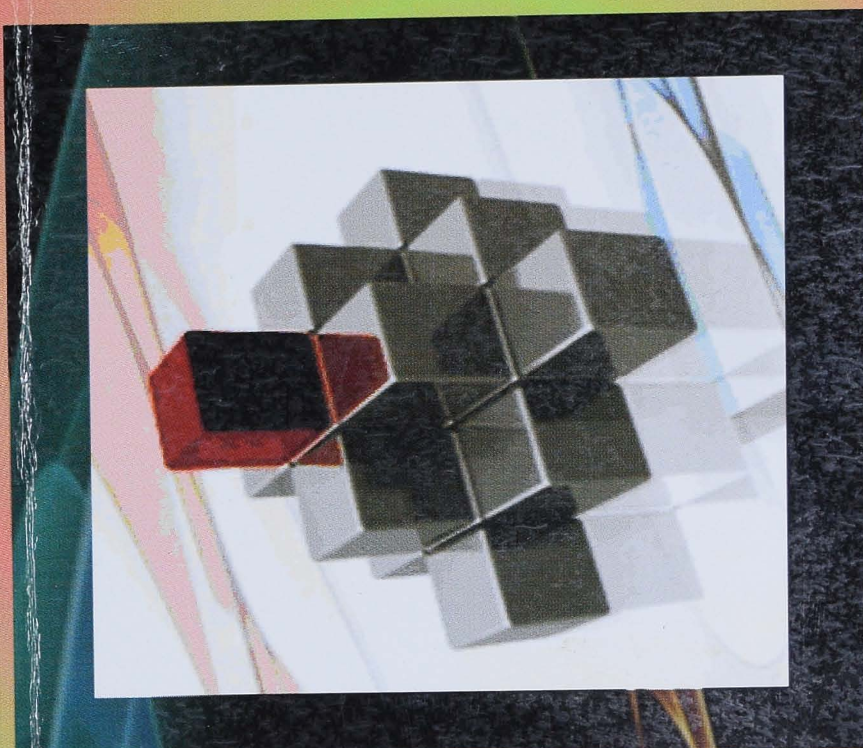
கணிதப் பொருளியல் - I



முனைவர் கு. தனசேகரன்

TAMILNADU STATE COUNCIL FOR HIGHER EDUCATION
RELEVANCE AND EXCELLENCE

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை - 600 005.

கணிதப் பொருளியல் - I

முனைவர் கு. தனசேகரன்

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை - 600 005.

பொருளடக்கம்

கணிதப் பொருளியல்

பொருளியலில் விதிகளும், கோட்பாடுகளும் அடிப்படையில் கணிதப் பண்புகளை உள்ளடக்கியதைக் காணலாம். இவ்விதிகள், கோட்பாடுகள் ஆகியவற்றை நிறுவுவதற்கும், விவரிப்பதற்கும், நிரூபிப்பதற்கும் கணிதம் சார்ந்த பொருளியல் ஆய்வு முறை இன்றியமையாததாக உள்ளது. பொருளியல் பிரச்சனைகளை வெவ்வேறு முறைகளில் விவரித்தாலும் கணித முறை கொண்டு பொருளியலை விவரிப்பது மிகச் சிறந்ததொன்றாகும். இயற்கணிதம் **(Algebra)**, வடிவகணிதம் **(Geometry),** நுண்கணிதம் **(Calculus),** அணிகள் **(Matrix)** அணிக்கோவை **(Determinants)** போன்ற கணக்கியல் முறைகள் பொருளாதார ஆய்வில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. கணக்கியல் முறைகளைப் பயன்படுத்திப் பொருளாதார விதிகளையும் கோட்பாடுகளையும் விளக்குவதைக் கணிதப் பொருளியல் எனலாம்.

பொருளியல் ஆய்வில் நடைமுறைக்கு உகந்த விதிகளையும், கோட்பாடுகளையும் உருவாக்குவதில் எண்ணற்ற இடர்பாடுகள் உள்ளன. இதற்குக் காரணம் என்னவெனில், பொருளியல் அடிப்படையில் மனித நடவடிக்கை சார்ந்த பொருளாதார விதிகளையும், கோட்பாடுகளையும் உள்ளடக்கியதாகும். மனித நடவடிக்கைகள் பல்வேறு சூழ்நிலைகளில் இப்படித்தான் இருக்குமென திட்டவட்டமாகக் கூறமுடியாது. ஏனெனில் மனித நடவடிக்கைகள் பல்வேறு அக,புற சக்திகளால் பாதிக்கப்படுவதால் பொருளியல் எளிதில் பகுத்தறிய முடியாதபடி பல்வேறு சிக்கல்களை எதிர் நோக்க வேண்டியுள்ளது. பொருளியல் ஆய்வில் கணித முறைகளைப் பயன்படுத்துவதால் இச்சிக்கல்களைப் போக்கலாம் என சமீப காலங்களில் உணரப்பட்டு வருகின்றது.

இக்கூற்றுகளைத் தெளிவுபடுத்த பொருளியலில் ஆளப்படும் கணித முறைகள் பற்றியும் அவைகள் பொருளியலுக்கு எவ்வாறு இணக்கமாக உள்ளன என்பது பற்றியும் இங்கு காண்போம்.

அறிவியல் கூற்றுகள் மற்றும் தொடர்புகள் காரண, காரியத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டவை. இக்கூற்றுகளையும், தொடர்புகளையும் வரைபடத்தால் மற்றும் கணக்கியல் சமன்பாடுகளால் காட்டலாம். கணக்கியலின் தனிச்சிறப்பு சிக்கலான தொடர்புகளைக் கையாள அது வசதி செய்வதாகும் பொருளியலில் இயற்கணிதம், வடிவகணிதம்,

நுண்கணிதம் ஆகிய கணக்கியல் கருவிகள், கூற்றுகளை வரைவதற்கும் கருதுகோள்களைப் புலப்படுத்துவதற்கும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இது அறிவியலாய்வு முறையின் முக்கிய படிகளான கருதுகோள் புனைதல், அதன் உட்கிடைகளை வெளிப்படுத்துதல் ஆகியவற்றில் ஆளப்படுகிறது.

பொருளியலில் ஆயிலர் தேற்றம், ஸ்லட்ஸ்கி சமன்பாடு, பொதுச்சமநிலை, ஆட்டக் கோட்பாடு **(Theory of Games)** போன்ற சிக்கலான தொடர்புகளுக்கு நிரூபணம், உள்ளறிவு **(Intution)** மூலம் (ஐயப்பாட்டோடு) தருவதை விட, கணக்கியல் மூலம் விவரிக்கும் பொழுது இக்கோட்படுகளை மேலும் தெள்ளத் தெளிவாக அறிந்துகொள்ள முடிகிறது.

பல பொருளாதாரப் பிரச்சனைகளைப் பகுமுறைகள் மூலமாக விவரித்தாலும் விளக்கப் படங்கள் மூலமாக விவரிக்கும் பொழுது புரிந்துகொள்வதற்கு எளிதாக உள்ளது. இரண்டு பொருளாதார மாறிகளிடையே காணப்படும் சார்பை ஒரு நேர்கோடு **(Linear)** அல்லது வளைகோட்டின் மூலமாக விளக்க முடியும். உதாரணமாக தேவை வளைகோடு வரைந்தால் அது இரண்டு பொருளாதார மாறிகளிடையேயுள்ள தொடர்பை நன்கு சித்தரித்துக் காட்டுகின்றன.

விலை, தேவை, நுகர்வு, உற்பத்தி, வருவாய், வேலைவாய்ப்பு, செலவு, இலாபம், முதலியன பொருளியலில் மாறுபட்ட அளவுகளைக் கொண்டுள்ளன. சில சமயங்களில் பொருளாதார சார்புப்பலன்கள் ஒருபடிச் சார்புகளாகவோ (நேர்கோடு **Linear**) அல்லது இருபடிச் சார்புகளாகவோ சுலபமான முறையில் விவரிக்கப்படுகின்றன. இந்தச் சார்புபலன்களின் உருவ அமைப்பிற்கான சில நிபந்தனைகள் கணித வடிவில் ஆங்காங்கே விளக்கப்படுகின்றன. அதாவது ஒரு மதிப்புடைமைச்சார்புப்பலன், இறங்கும் சார்புப்பலன், வடிவச் சார்பு, ஒரே முறை ஏறும் சார்புப் பலன் போன்ற கணிதப் பண்புகள் பொருளாதாரத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன.

கணித முறைப் பொருளாதாரத் துறையில் பயன்படும் தேவைச் சார்புகளுக்கு எடுத்துக் காட்டுகளாக அடியிற் சில சார்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

$$(1)\, x = a - bp, \qquad p = \frac{a-x}{b}$$

$$(2)\, x = a - bp^2. \qquad p = \sqrt{\frac{a-x}{b}}$$

$$(3)\, x = \sqrt{\frac{a-p}{b}} \qquad p = a - bx^2$$

$$(4)\, x = a - b\sqrt{p}, \qquad p = \frac{(a-x)^2}{b}$$

$$(5)\, x = ae^{-bp}, \qquad p = \frac{1}{b}\log\frac{a}{x}$$

$$(6)\, x = \frac{a}{p+b} - c, \qquad p = \frac{a}{x+c} - b$$

இவற்றில் முதலாவது ஒரு படிச் சார்பு , (2), (3), (4) இவை யாவும் பரவளையம். (5) ஓர் அடுக்குக் குறி விளைவு. (6) ஒரு செவ்வக அதிபரவளையம்.

அணிகள், அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடு பொருளியலில் முக்கியமானதொன்றாகும். சமுதாயக் கணக்கெடுப்பு, உள்ளீடு வெளியீடு பகுத்தாய்வு, நேர்கோட்டு திட்டம் ஆகியவற்றிற்கு அணிகளையும், அணிக்கோவைகளையும் பொருளாதார அறிஞர்கள் பயன்படுத்துகின்றனர். அணிகளின் பயன்பாடு, பொருளியலின் பெரும்பாலான பிரிவுகளில் பயன் படுத்தப்படுவதால் அவற்றைப் பற்றி அறிந்து கொள்வது மிகவும் அவசியமாகும்.

கணக்கியல் பொருளாதார கருத்துகளைத் தெளிவுபடுத்தவும், ஆய்வு ஆற்றலை அதிகப்படுத்தவும் உதவியாகவுள்ளது. பொருளாதார அறிஞர்களுக்கிடையே கருத்து வேறுபாடு தோன்றிய போது முரண்பாட்டிற்கான காரணத்தை அறிய கணக்கியல் உதவுகிறது. ஆய்வின் போது வரைபடங்கள் மூலம் அறிய முடியாத தொடர்புகளைக் கணித மாதிரிகள் மூலம் அறியலாம்.

பொருளாதாரப் பிரச்சனை ஒன்றில் கணிதத்தை உபயோகப்படுத்த வேண்டுமானால், முதலில் அதற்குத் கணித மாதிரி **(models)** தேவை. மாதிரி என்பது பல காரணிகளையும், அவற்றிற்கிடையே உள்ள உறவுகளையும் விளக்குவது. முதலில் பொருளாதாரப் பிரச்சனையைப் பாதிக்கக் கூடிய காரணிகள் யாவை என்பதைத் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும். இக்காரணிகள் எளியனவாகவும், அளவிடக் கூடியன வாகவும், குறைவாகவும் இருக்க வேண்டும். மிக அதிகமான காரணிகளை எடுத்துக்கொள்ளக் கூடாது. அப்பொழுதுதான் ஆய்வு முறைகள் நன்றாக அமையும். குறிப்பிட்ட பிரச்சனையின் தன்மைகளையெல்லாம் இந்த 'மாதிரி'யில் பொருத்தலாம். சக்தி வாய்ந்த கணக்கியல் முறைகள் மூலம் இந்த 'மாதிரி'யை ஆராய்ந்து சில முடிவுகளுக்கு வரலாம். இத்தகைய 'மாதிரி' முடிவுகளுக்கேற்ப பொருளாதாரப் பிரச்சனைக்கு முடிவுகள் தெரியவரும்.

கணித முறைப் பொருளாதார ஆராய்ச்சிகளையும், புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிகளையும் ஒன்று சேர்த்துக் கிடைக்கும் அறிவியலே பொருளாதார அளவியல் **(Econometrics)**ஆகும். எனவே, இத் துறையின் ஆராய்ச்சியாளர்கள், பொருளாதாரம், கணிதம், புள்ளியியல் ஆகிய மூன்றிலும் வல்லுநர்களாக இருக்க வேண்டும். பொருளாதார அளவியலை, டின்பர்கன் **(Tinbergen)** என்பவர் பொருளாதாரக் கோட்பாடுகளின்படி தேவைப்படும் கொள்கைகளைப் புள்ளியியல் முறையில் சரிபார்க்கும் துறை என்றும் புள்ளி விவரங்கள் துணைகொண்டு கணித முறையில் ஆராய்ந்தறியப்படும் பொருளாதாரம் என்றும் விவரிக்கிறார்.

சமீப காலத்தில் மாதிரி புனைவுகள் **(models)** கணக்கியல் முறையில் நிறுவப்பட்டு, சோதிக்கப்பட்டு, தர்க்க தவறின்றி ஆய்வை நடத்துவதற்குக் கணக்கியல் பேருதவியாக உள்ளது என்பதைப் பின்வரும் அத்தியாயங்கள் மூலம் காணலாம்.

<+>

சார்புகள்

மாறிலிகளும், மாறிகளும் (Constants and Variables)

சார்பு பற்றிய கருத்துப்படிவங்களை ஆயிலர் **(Leonhard Euler 1707-1783)** என்ற கணக்கியலறிஞர் முதன் முதலாகப் பயன்படுத்தினார். நுண் கணிதத்தில் சார்பு மற்றும் எல்லை பற்றிய கருத்தியல்கள் முக்கியமானவைகளாகும். கணித முறைகளைப் பயன்படுத்தும்பொழுது, ஒரு சில கணியங்கள் நிலையான (அல்லது மாறாத) மதிப்புகளை உடையனவாகவும்; வேறு சில கணியங்கள் பல்வேறு மதிப்புகளை ஏற்பனவையாகவும் (அதாவது, அவற்றின் மதிப்புகள் மாறிக் கொண்டிருப்பவையாகவும்) இருக்கக்கூடும். ஒரு குறிப்பிட்ட கணித வரம்பிற்குள் மதிப்பில் மாறும் தன்மை கொண்ட கணியங்கள் மாறிகள் எனவும், மாறாத்தன்மை கொண்ட கணியங்கள் மாறிலிகள் எனவும் குறிப்பிடுதல் வழக்கமாகும். எடுத்துக்காட்டாக, இருகோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்வதால் ஏற்படும் கோணங்களின் அளவுகள் வெவ்வேறாக இருப்பதால் இதை மாறி எனக் குறிப்பிடலாம். ஆனால் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் எப்பொழுதும் 180^0யாக இருப்பதால் இதை மாறிலி எனக் குறிப்பிடலாம்.

பொதுவாக ஆங்கில எழுத்துவரிசையின் முதற் பகுதியில் வரும் $a,b,c,\ldots$ என்ற எழுத்துகளால் மாறிலிகளையும், இறுதிப் பகுதியில் வரும் $t,u,v,w,x,y,z,$ என்ற எழுத்துகளால் மாறிகளையும் குறிப்பிடுவதுண்டு.

சார்புகள் (Functions)

இரண்டு மாறிகளில் ஒன்றின் மதிப்பு மற்றொன்றைச் சார்ந்திருக்குமானால், அவ்விரண்டிற்குமுள்ள தொடர்பைச் சார்பு எனச் சொல்வோம். ஒரு மாறி எந்தவொரு (தன்னிச்சையாக) மதிப்பையும் பெறுமானால் அது சார்பிலா மாறி எனப்படும். ஒரு மாறியின் மதிப்பு மற்ற மாறியைச் சார்ந்திருக்குமெனில் அது சார்புடை மாறி எனப்படும். ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவானது நீள அகலங்களின் சார்பு ஆகும். பரப்பளவைச் சார்புடை மாறி **(Dependent variable)** எனவும் நீள, அகலங்களைச் சார்பிலா மாறிகள் **(Independent Varibles)** எனவும் குறிப்பிடப்படுவதுண்டு. இம்மூன்று மாறிகளின் தொடர்பைக் காட்டும்

சமன்பாட்டைச் சார்புத் தொடர்பு **(Functional Relation)** என்கிறோம்.

பொதுவாக, y எனும் மாறிகள் மதிப்பு x என்ற சார்பிலா மாறியைச் சார்ந்திருக்குமானால், $y = f(x)$ என்ற குறியீடு, அவற்றுள் அமையும் சார்புத் தொடர்பைச் சமன்பாட்டு அமைப்பில் விவரிப்பதாகும். இதே போல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்புகள் கொடுக்கப்படின், அவற்றைக் குறிப்பிட $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ என்ற குறியீடுகளையோ அல்லது ஞா $f(x)$, $g(x)$, $\phi(x)$ என்ற குறியீடுகளையோ பயன்படுத்துவது வழக்கமாகும். குறிப்பாக $y = 2x^2 - 5x + z$ எனில் $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ என்று அறிகிறோம். $x = 4$ எனும்பொழுது கிடைக்கப் பெறும் y - இன் மதிப்பை $f(4)$ என்று குறிப்பிடலாம். இவ்வாறு x, y என்று இரு மாறிகளில் ஒன்று மற்றதைச் சார்ந்தது என்பதை,

$y = f(x)$ அல்லது
$x = \phi(y)$ அல்லது
$f(x, y) = 0$ எனவும் குறிப்பிடலாம்.

சார்புகளின் வகைகள் (Types of Functions)

சார்புகளில் பலவகை உண்டு, சார்புகளின் அமைப்பைப் பொறுத்து அவற்றைப் பல வகைகளாகப் பிரித்துள்ளனர். அவைகளைப் பற்றி இங்கு காண்போம்.

1. ஒற்றை மாறிச் சார்புகள் மற்றும் பலமாறிகள் சார்புகள் (Function of a Single Variable and Function of a Several Variables)
2. ஒற்றை மதிப்புச் சார்புகளும் மற்றும் பன் மதிப்புச் சார்புகளும் (Single Valued and Multivalued Functions)
3. ஒற்றைப்படை மற்றும் இரட்டைப்படைச் சார்புகள் (Odd and Even Functions)
4. வெளிப்படு மற்றும் உட்படுச் சார்புகள் (Explicit and Implicit Functions)
5. நேர்மாறுச் சார்புகள் (Inverse Functions)
6. நேர்கோட்டுச் சார்புகள் அல்லது ஒரு படிச்சார்புகள் (Linear Functions)
7. பல்படிச்சார்புகள் (Polynomial Functions)

8. தலைகீழ் சார்பு (Reciprocal of a Function)

9. அடுக்கு மாறி அல்லது படிக்குறிச் சார்புகள் (Exponential functions)

10. மடக்கைச் சார்புகள் (Logarithmic Functions)

1. ஒற்றை மாறிச் சார்புகள் மற்றும் பலமாறிகள் சார்புகள் (Function of a Single Variable and Function of a Several Variables)

ஒரு சார்பு, ஒரே மாறியைச் சார்ந்ததெனில் அது ஒற்றை மாறிச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$y = f(x)$ (ஒரு மாறிச் சார்பு)

ஒரு சார்பு, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் மதிப்புக்கு ஏற்ப மதிப்பைப் பெறும் எனில், அது ஒரு பல மாறிச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$u = f(x, y)$ (இரு மாறிகளின் சார்பு)

$u = f(x, y, z)$ (மூன்று மாறிகளின் சார்பு)

2. ஒற்றை மதிப்புச் சார்புகளும் மற்றும் பன் மதிப்புச் சார்புகளும் (Single Valued and Multivalued Functions)

ஒரு சார்பில் y-என்பது x-இன் சார்பாக இருக்கும் பொழுது x-இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் y-ஒவ்வொரு மதிப்பையே பெறுமானால், y என்பது x-இன் ஒற்றை மதிப்புச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

(1) $y = 3x^2 + 2x - 1$

(2) $y = x^2 - 2x + 5$

(3) $y = \dfrac{4x-1}{x^2+6}$

ஒரு சார்பில் x-இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் y ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மதிப்பைப் பெறுமானால், y என்பது x-இன் பன் மதிப்புச்

சார்பாகும். எடுத்துக் காட்டாக $y^3-6y^2+11y=x$ என்ற சார்பில், x-இன் ஒரு மதிப்புக்கு ஒப்ப, y-க்கு மூன்று மதிப்புகள் இருப்பதைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

(1) $y^2=x(y=\pm\sqrt{4x^2-1}$ இச்சார்பில் y ஓர் இருமதிப்புச் சார்பு)

(2) $y=\pm\sqrt{4x^2-1}$

(3) $y=\pm(5x+9)$

(4) $y^3-9y^2+26y=x$

3. ஒற்றைப்படை மற்றும் இரட்டைப் படைச்சார்புகள் (Odd and Even Functions)

எந்த ஒரு சார்பில் x-க்குப் பதிலாக $-x$ ஐ பிரதியிட்டால், சார்பின் மதிப்பில் குறிமாற்றம் ஏற்பட்டால், அச்சார்பை ஒற்றைச் சார்பு எனக் குறிப்பிடலாம். அதாவது $f(x)$ ஒற்றைப்படைச் சார்பு எனில், $f(-x)=-f(x)$ $y=x^3+zx$ என்ற சார்பில், x-க்குப் பதிலாக $-x$-ஐப் பிரதியிட்டால்,

$y=-x^3-2x=-(x^3-2x)$ என்றாகி, குறிமாற்றம் y-இன் மதிப்பில் ஏற்படுகிறது. இது ஓர் ஒற்றைச் சார்பின் எடுத்துக்காட்டாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

(1) $3x^3-x$

(2) $x+2x^3-x^5$

எந்த ஒரு சார்பில் X-க்குப் பதிலாக, $-x$-ஐப் பிரதியிட்டால், சார்பின் மதிப்பில் குறிமாற்றம் ஏற்படாவிடில் அச்சார்பை இரட்டைப்படைச் சார்பு எனலாம். அதாவது $f(x)$ ஓர் இரட்டைப் படைச் சார்பு எனில் $f(-x)=f(x)$

$y = x^2 - 2x^2$ என்ற சார்பில், x க்கு பதிலாக $-x$ ஐப் பிரதியிட்டால், குறிமாற்றம் எதுவும் y-இன் மதிப்பில் ஏற்படுவதில்லை. எனவே இது ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பின் எடுத்துக்காட்டாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

(1) $y = \left(-x^2\right) - 2(-x)^2$

$$= x^2 - 2x^2$$

(2) $2 + 4x^2 + x^4$

(3) $4x^2 - x^6$

4. வெளிப்படு மற்றும் உட்படுச் சார்புகள் (Explicit and Implicit Functions)

x, y என்ற மாறிகளின் சார்புத் தொடர்பு $y = f(x)$ என்ற அமைப்பில் அமையப்பெற்று x-க்கு ஏற்றவொரு மதிப்பையும் பிரதியிடுவதின் மூலம், y-இன் மதிப்பை நேரடியாகக் காண முடிகிறதோ அச்சார்பை வெளிப்படு சார்பு எனக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

(1) $y = x^2 - 2x + 5$

(2) $y = 7 + 3\log x$

x, y என்ற மாறிகளின் சார்புத்தொடர்பு $F(x, y) = 0$ என்ற அமைப்பில் அமையப் பெற்று x-இன் மதிப்பைப் பிரதியிட்டவுடன் உடனே கிடைக்காமல், இயற்கணித முறையைக் கையாண்ட பின்னரே y-இன் மதிப்பு கிடைக்குமெனில், அதனை உட்படுசார்பு எனக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

(1) $x^2 + xy + y^2 = 5$

(2) $2xy^3 - x^2y^2 + x^3y = 0$

(3) $y = e^{-3+5xy}$

5. நேர்மாறு சார்புகள் (Inverse Functions)

$y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டில் x -இன் சார்பாக y கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதனையே y -இன் சார்பாக x என்று மாற்றினால் அச்சார்பு நேர்மாறு சார்பு ஆகும். இதற்கான குறியீடு: .

$x = f^{-1}(y)$ அதாவது $y = \dfrac{x+1}{x+1}$ என்ற சார்பில் x -இன் சார்பாக y கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதனைத் தவிர்த்து, x -இன் மதிப்பை y -இன் சார்பாக பெறும்பொழுது அச்சார்பானது $x = \dfrac{y+1}{y-1}$ என்றாகிறது. மேலும்,

$$y = f(x) = \frac{2+x}{x}$$ எனில்

$$x = f^{-1}(y) = \frac{2}{y-1}$$

இவைகள் நேர்மாறு சார்பின் எடுத்துக்காட்டுகளாகும். அதாவது,

$$y = f(x) = y = \frac{2}{x} + 1$$

$$x = f^{-1}(y) = -\frac{2}{x} = -y + 1$$

$$\frac{2}{x} = y - 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{y-1}$$

$$f^{-1}(y) = x = \frac{2}{y-1}$$

எடுத்துக்காட்டு:

(1) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ எனில் $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$

(2) $y = f(x) = 9^x$ எனில் $x = f^{-1}(y) = \log_a y$

மேற்கூறிய இரண்டும் நேர்மாறு சார்பின் எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

6. நேர்கோட்டுச் சார்புகள் அல்லது ஒரு படிச் சார்புகள் (Linear Functions)

$y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டில் $f(x) = ax + b$ எனில் ஒரு படிச்சார்பின் பொது உருவமாக $y = ax + b$ எனக் குறிப்பிடலாம். இதில் a, b மாறிலிகள். x ஆனது சார்பிலா மாறி, y ஆனது சார்புடை மாறி. இவ்வமைப்பில் b என்பது x ஆனது பூச்சியமாக இருக்கும்பொழுது $(x=0)\, y$-இன் மதிப்பு என்னவென்பதைக் காட்டுகிறது. இந்த b ஐ வெட்டி (y intercept) எனக் குறிப்பிடுவதுண்டு. ஒரு படிச்சார்பின் வரைபடம் ஒரு நேர்கோடாகும். மேலும் ஒரு படிச்சார்பின் நேர்மாறுச் சார்பும் ஒரு படிச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

(1) $y=3x+2$

(2) $x=2+5y$

7. பல்படிச்சார்புகள் **(Polynomial Functions)**

ஒரு சார்பில் ஒரு அடுக்குக்கு அல்லது படிக்கு மேலிருந்தால் அவை பல்படிச்சார்புகள் எனப்படும். சார்புகளின் படியைப் பொறுத்து பல்படிச்சார்பினைப் பலவகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

அ) இருபடிச் சார்புகள் **(Quadratic Functions)**

இருபடிச் சார்பானது $y=a+b\times+cx^2$ என்ற அமைப்பை உடையதாகும். ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபடம் எப்பொழுதும் **'U'** வடிவத்துடன் அதிபரவளையமாகும் என்ற அமைப்பைப் பெறும். இவ்வகைச் சார்பில் எல்லா y மதிப்புகளும் x^2 மதிப்பு கலந்ததனால் அதிபரவளையம் உருவாகிறது.

ஆ) முப்படிச் சார்புகள் **(Cubic Functions)**

முப்படிச்சார்பு $y=a+bx+cx^2+dx^3$ என்ற அமைப்பை உடையதாகும். இதே போன்று ஏனைய படிகளுக்கும் பல்படிச் சார்பினை வரையறுக்க முடியும். மேலும் இத்தகைய சார்புகளில் y என்ற மாறியின் மதிப்பு x -இன் மூலம் தெளிவாகக் கூறப்பட்டுள்ளதால், இவற்றை வெளிப்படுசார்புகள் என்கிறோம்.

8. தலைகீழ் சார்பு **(Reciprocal of a Function)**

தலைகீழ் சார்பின் அமைப்பு $\frac{1}{f(x)}$ என்பதாகும். அதாவது,

$g(x)$ என்பது $f(x)$ -இன் தலைகீழ் சார்பு

$f(x)$ -இன் தலைகீழ் சார்பானது $\frac{1}{f(x)}$ ஆகும்.

$\therefore g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}$

9. அடுக்கு மாறி அல்லது படிக்குறிச் சார்புகள் (Exponential Functions)

ஒரு சார்பு $f(x)=a^x$ என வரையறுக்கப்படின் இதனை அடுக்கு மாறிச்சார்பு எனலாம். கீழ்க்கண்டவை அடுக்குக் குறிச் சார்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

(1) $y=e^x$

(2) $y=10^x$

(3) $f(x)=2^x$

(4) $f(x)=10^x$

$y=a^x$ என்ற சார்பில், a என்பதை மாறாத அடித்தளமாகக் கொண்டு x என்ற மாறி அடுக்கு மதிப்பாகிறது. (மாறாத அடித்தள எண்ணுக்கு மாறும் அடுக்குமாறி). இதில் மாறி x -க்கும் பல்வேறு மதிப்புகள் தருகையில் y -ஆனது பல்வேறு மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

10. மடக்கைச் சார்புகள் (Logarithmic Functions)

$y=\log a^x$ என்பது x -இன் மடக்கைச் சார்பு. y -மாறியின் மதிப்பு x-இன் 'a' மடங்கு மடங்கையாகக் காட்டப்படுகிறது. மடக்கைச் சார்பு என்பது அடுக்கு மாறிச் சார்பின் நேர்மாறுத் (Inverse) தொடர்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$y=\log_{10}{}^x$ என்பது ஒரு மடக்கைச் சார்பு. இதன் நேர்மாறுத் தொடர்பை $x=10^y$ என எழுதலாம்.

பொருளியல் ஆய்வில் மேற்கூறிய சார்புகள் பல்வேறு விதிகளையும் கோட்பாடுகளையும் நிறுவுவதற்கும், விவரிப்பதற்கும் பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன.

பொருளியலில் சில எளிய சார்புகளின் பயன்பாடுகள்

கணிதப் பொருளியலில் பயன்படும் சார்புகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாக கீழே சில சார்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

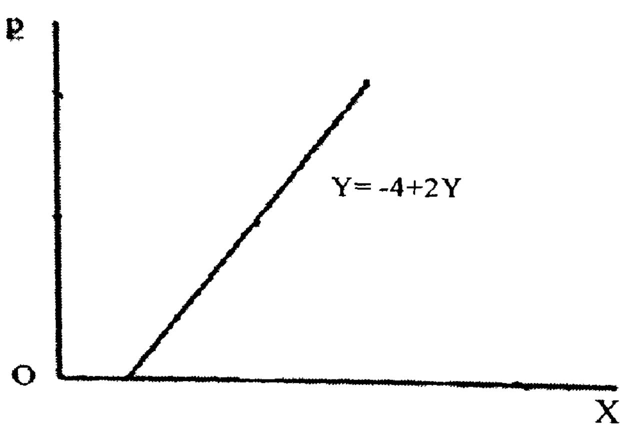
ஒரு படிச் சமன்பாடு (நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு)

$Y = a + bX$ என்பது ஒரு படிச் சமன்பாட்டின் கணித வடிவம். எடுத்துக்காட்டாக, $Y = -4 + 2X$ என்ற ஒரு படிச் சார்பில் X-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பிரதியிடும்போது Y-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் கிடைப்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலிடலாம்.

பட்டியல்

சமன்பாடு	மாறி	மதிப்பு						
$Y = -4 + 2X$	X	0	1	2	3	4	5	6
	Y	-4	-2	0	2	4	6	8

இச்சார்பில் X-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பிரதியிடும்போது Y-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் கிடைப்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலிடலாம். இது X-க்கும் Y-க்கும் இடையேயுள்ள ஒரு படி/நேரியல் (linear) தொடர்பைக் காட்டுகிறது. இக்கோடு இடமிருந்து வலமாக மேல் நோக்கிச் செல்லும் கோடாக இருப்பதை வரைபடத்தில் காணலாம்.



படம்: ஒருபடி சார்பு

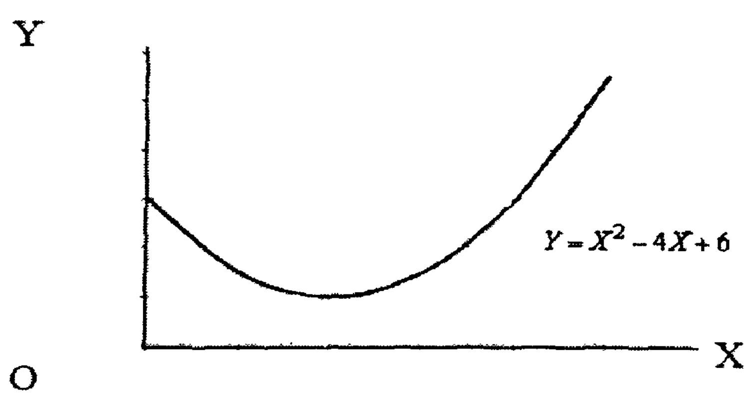
இருபடிச் சமன்பாடு (பரவளையம்)

$Y = aX^2 + bX + c$ என்பது பரவளையத்தின் சமன்பாடு என்பதை நாம் அறிவோம். எடுத்துக்காட்டாக, $Y = X^2 - 4X + 6$ என்ற இரு படிச் சார்பில் X-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பிரதியிடும்பொழுது Y-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் கிடைப்பதைக் கீழ்க் கண்டவாறு பட்டியலிடலாம்.

பட்டியல்

சமன்பாடு	மாறி	மதிப்பு						
$Y=X^2-4X+6$	X	0	1	2	3	4	5	6
	Y	6	3	2	3	6	11	18

ஒவ்வொரு X-இன் மதிப்பிலும் Y-இன் மதிப்புகளைப் புள்ளிகளாகக் குறித்து அவைகளை இணைத்தால் நேர்கோடில்லா ஒரு வளைகோடு கிடைக்கும். இவ் வளைகோட்டினை வரைபடத்தில் காணலாம்.



படம் : இருபடிச் சார்பு

இது X க்கும் Y-க்கும் இடையேயுள்ள நேர்கோர்டிலாச் சார்பைக் **(non-linear)** காட்டுகிறது.

சமன்பாடுகளும் சந்தைச் சமநிலையும் (Market Equilibrium and Equations)

சந்தைச் சமநிலை அளவும், விலையும் வரைபடத்தின் மூலம், அல்லது இயற்கணிதத்தின் மூலம் கணக்கிட முடியும். தேவைச் சமன்பாடும், அளிப்புச் சமன்பாடும் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாக இருந்தாலும், ஏதாவது ஒரு சமன்பாடு ஒருபடிச் சமன்பாடாகவும் மற்றொன்று இருபடிச் சமன்பாடாகவும் இருந்தாலும் இவ்விரண்டும் (தேவைச் சமன்பாடும், அளிப்புச் சமன்பாடும்) இருபடிச் சமன்பாடுகளாக இருந்தாலும் அவற்றிற்கான வரைபட, இயற்கணித வழி முறைகளை இங்கு காணலாம்.

தேவைச் சார்பு (Demand function)

சந்தையில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் ஒரு பொருளின் தேவை (அல்லது அளவு) q என்க. அதன் விலையை p என்க. அப்பொருளின் தேவைச் சார்பானது $q = f(p)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. பொதுவாக p-யும் q-வும் மிகை எண்கள். இவைகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர்விகிதத்தில் இருக்கும்.

அளிப்புச் சார்பு (Supply function)

சந்தையில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $q = f(p)$ ஆகும். ஒரு பொருளின் தேவை (அல்லது அளவு) q என்க. அதன் விலையை p என்க. இங்கு p ஒரு மாறி. பொதுவாக p-யும் q-வும் மிகை எண்கள். இவைகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.

சம நிலை விலை (Equilibrium price)

தேவையின் அளவும், அளிப்பின் அளவும் சமமாக இருக்கும் நிலையில் உள்ள விலையைச் சமநிலை விலை என்று கூறுகிறோம்.

சம நிலை அளவு (Equilibrium quantity)

சமன் நிலை விலையை, தேவை சார்பு அல்லது அளிப்பு சார்பில் பிரதியிட கிடைப்பது சமநிலை அளவாகும்.

ஒரு படிச் சமன்பாடுகள்

மாதிரி : தேவைச் சமன்பாட்டையும் அளிப்புச் சமன்பாட்டையும் இரண்டு ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாக எடுத்துக்கொள்வோம். உதாரணமாக கீழ்வரும் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகளின் சமநிலை விலையையும் சமநிலை அளவுகளையும் (தேவை அளவும், அளிப்பு அளவும்) காண்க.

தேவைச் சமன்பாடு $Q_d = 44 - 4p$ மேலும்

அளிப்புச் சமன்பாடு $Q_s = -4 + 2p$

வரைபடத் தீர்வு :

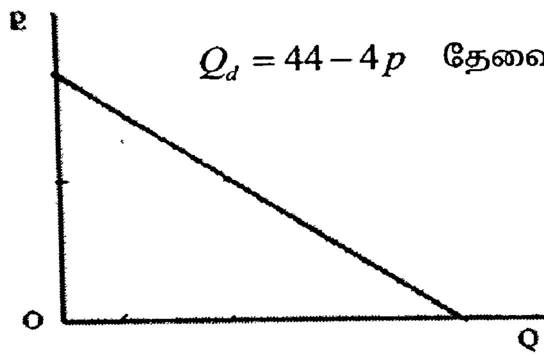
தேவைக்கும் விலைக்கும் உள்ள சார்பினை ஒரு வரைபடம் மூலம் காட்டலாம். கணிதத்துறையில் சார்பிலா மாறி **(independent variable)** p ஆதலால், p அச்சைக் கிடையாகக் கொள்வது பொருத்தமாயினும் x அச்சை இடது-வலதாகவும், p அச்சை நெடுக்குத்தாகவும் எடுத்துக்கொள்வது பொருளியலில் வழக்கமாக அமைந்து விட்டது.

ஒருபடி தேவைச் சமன்பாட்டின் கணித வடிவமே $Q_d = 44 - 4p$ (நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு) என்பதாகும். இச்சார்பில் P- க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பிரதியிடும் போது Q_d -க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் கிடைப்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலிடலாம்.

பட்டியல்

P	$Q_d = 44 - 4p$
0	44
1	40
2	36
3	32
4	28
5	24
6	20
7	16
8	12
9	8
10	4

ஒவ்வொரு p-இன் மதிப்பிலும் Q_d-இன் மதிப்புகளைப் புள்ளிகளாகக் குறித்து அவைகளை இணைத்தால் ஒரு நேர்கோடு கிடைக்கும். இக்கோடு வலமிருந்து இடமாக கீழ் நோக்கிச் செல்லும் கோடாக இருப்பதை வரைபடத்தில் காணலாம். இது pக்கும் Q_d-க்கும் இடையேயுள்ள ஒரு படி/ நேரியல்(linear) தொடர்பைக் காட்டுகிறது. தேவைச் சார்பு $Q_d = 44 - 4p$ -இன் வரைபடத்தைக் கவனிக்க. வரைபடத்திலிருந்து நாம் பெறுவன:



படம்: தேவைச் சார்பு

1. p-யும் q-வும் மிகை எண்களாக இருப்பதால் வரைபடத்தில் தேவைச் சார்பு, முதல் கால் (First Quadrant) பகுதியில் மட்டும் இடம் பெற்றுள்ளது.

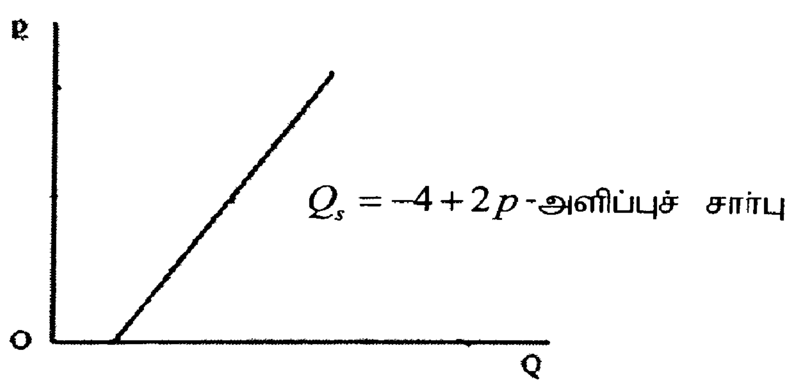
2. தேவைச் சார்பின் சரிவு ஒரு குறை எண் ஆகும்.

$Q_s = -4 + 2p$ என்பது ஒரு படி அளிப்புச் சமன்பாடு (நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு). இச் சார்பில் p-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பிரதியிடும்போது Q_s-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் கிடைப்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலிடலாம்.

பட்டியல்

P	$Q_s = -4 + 2p$
0	-4
1	-2
2	0
3	2
4	4
5	6
6	8
7	10
8	12
9	14
10	16

இங்கும் ஒவ்வொரு p-இன் மதிப்பிலும் Q_s-இன் மதிப்புகளைப் புள்ளிகளாகக் குறித்து அவைகளை இணைத்தால் ஒரு நேர்கோடு கிடைக்கும். இக்கோடு இட மிருந்து வலமாக மேல் நோக்கிச் செல்லும் கோடாக இருப்பதை வரைபடத்தில் காணலாம்.



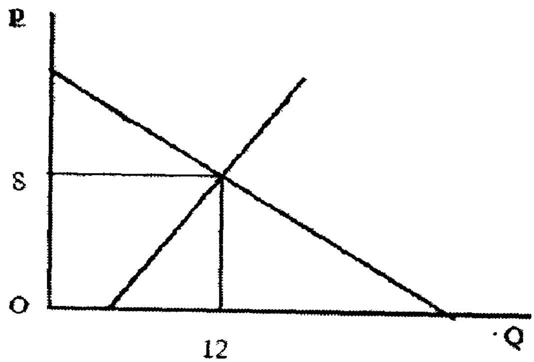
படம்: அளிப்புச் சார்பு

இது pக்கும் Q_s-க்கும் இடையேயுள்ள ஒரு படி/நேரியல்(linear) தொடர்பைக் காட்டுகிறது. இதன் கணித வடிவமே $Q_s = -4 + 2p$ என்பதாகும். அளிப்புச் சார்பு $Q_s = -4 + 2p$-இன் வரைபடத்தைக் கவனிக்க. வரைபடத்திலிருந்து நாம் பெறுவன:

1. q, p என்பன மிகை எண்கள் ஆதலால் வரைப்படத்தில் அளிப்புச் சார்பானது முதல் கால் பகுதியில் மட்டும் இடம் பெற்றுள்ளது.

2. அளிப்புச் சார்பின் சரிவு ஒரு மிகை எண்.

ஒவ்வொரு p-இன் மதிப்பிலும், $Q_d\, Q_s$ -இன் மதிப்புகளைப் புள்ளிகளாகக் குறித்து, மேலும் இரு கோடுகளாக வரையப்பட்டு அவை வெட்டும் புள்ளியின் மூலம் சந்தைச் சமநிலை அளவு, விலை முறையே 12, 8 என அறிகிறோம்.



படம்: சந்தைச் சமநிலை

இயற்கணித தீர்வு :

சந்தைச் சமநிலையில் $Q_d = Q_s$ என்பதால்,

$$44 - 4p = -4 + 2p$$

$$-6p = -48$$

$$p = 8$$

$p = 8$ எனில்,

$$\begin{aligned} Q_d &= 44 - 4p \\ &= 44 - 4(8) \\ &= 44 - 32 \\ &= 12 \end{aligned}$$

சமநிலை விலை = 8 ரூபாய்கள். சமநிலைத் தேவை மற்றும் சமநிலை அளிப்பு = 12 அலகுகள்.

ஒருபடி, இருபடிச் சமன்பாடுகள்

எடுத்துக்காட்டு:

தேவைச் சமன்பாடு ஒருபடிச் சமன்பாடாகவும், அளிப்புச் சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடாகவும் எடுத்துக்கொள்வோம். உதாரணமாக கீழ்வரும் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகளின் சமநிலை விலையையும் சமநிலை அளவுகளையும் காண்க.

தேவைச் சமன்பாடு $Q_d = 40 - 4p$

அளிப்புச் சமன்பாடு $Q_s = -4 + p^2$

இயற்கணித தீர்வு :

சந்தைச் சமநிலையில் $Q_d = Q_s$ என்பதால்,

$$Q_d = 40 - 4p = Q_s = -4 + p^2$$

எனவே, $40 - 4p - p^2 + 4 = 0$

$$44 - 4p - p^2 = 0$$

இது இருபடிச் சமன்பாடாகும். எனவே இதன் தீர்வானது:

$$p_1, p_2, = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1, b = -4, c = 44$$

$$p_1, p_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 176}}{-2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{192}}{-2}$$

$$= \frac{4 \pm 13.86}{-2}$$

$= -2 \pm 6.93$ -8.93 அல்லது 4.93

இங்கு விலை p ஒரு எதிர்மறை மதிப்பாக இருக்க முடியாது. எனவே, $p = 4.93$ என்று முடிவு செய்கிறோம்.

Q_d சமன்பாட்டிலிருந்து $Q_d = 40 - 4p$

$$Q_d = 40 - 4(4.93)$$

$$= 20.28$$

எனவே சந்தைச் சமநிலை அளவு $= 20.28$ அலகுகள். சந்தைச் சமநிலை விலை $, p = 4.93$ ரூபாய்கள்.

இரண்டு இருபடிச் சமன்பாடுகள்

எடுத்துக்காட்டு:

தேவைச் சமன்பாட்டையும் அளிப்புச் சமன்பாட்டையும் இரண்டு இருபடிச் சமன்பாடுகளாக எடுத்துக்கொள்வோம். சமநிலை விலையையும் சமநிலை அளவுகளையையும் காண்க.

தேவைச் சமன்பாடு $Q_d = 30 - 6p^2$

அளிப்புச் சமன்பாடு $Q_s = 2p^2 + 4p + 6$

இயற்கணித தீர்வு :

இப்போது சந்தைச் சமநிலை விலை, அளவு இவற்றைக் கணக்கிடலாம்.

சந்தைச் சமநிலையில் $Q_d = Q_s$ என்பதால்,

$$30 - 6p^2 = 2p^2 + 4p + 6$$

$$24 = 8p^2 + 4p$$

அதாவது $8p^2 + 4p - 24 = 0$

$$p = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 768}}{16}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 768}}{16}$$

$$=\frac{-4\pm 28}{16}$$

$= -0.25 \pm 1.75,$ 1.5 அல் லது - 2.0

இங்கு விலை p ஒரு எதிர்மறை மதிப்பாக இருக்க முடியாது. எனவே, $P = 1.5$

பண்டத்தின் சந்தைச் சமநிலை அளவு

$$Q_d = 30 - 6(1.5)^2$$
$$\therefore Q_d = Q_s = 16.5$$

எனவே, பண்டத்தின் சந்தைச் சமநிலை விலை $= 1.5$ ரூபாய்கள். பண்டத்தின் சந்தைச் சமநிலை அளவு $= 16.5$ அலகுகள்.

பொருளியலில் பயன்படும் மேலும் பல சார்புகளைப் பற்றி பின் வரும் அத்தியாயங்களில் காணலாம்.

<+>

3

எல்லைகள்

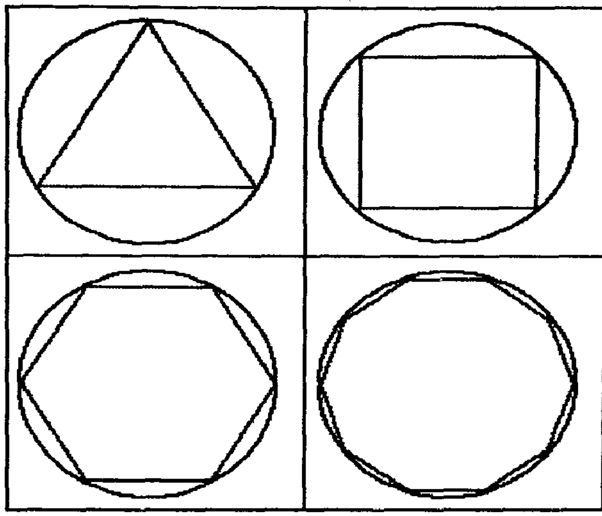
நுண்கணிதத்தில் (Calculus) அதிகரிக்கும் அல்லது குறையும் அளவுகள் குறித்த பிரச்சனைகள் ஆராயப்படுகின்றன. வளர்ச்சி மற்றும் சிதைவு வீதங்களை அளப்பதற்கும், அவற்றின் உருவாக்கம், பயன்பாடுகள் குறித்த விதிகளை நுண்கணிதம் அளக்கின்றது. அருகாமை அல்லது நெருக்கம் குறித்த சார் பலன்களை விவரிக்கும் பொழுது எல்லை என்ற கருத்தாக்கம் பயன்படுகிறது.

எல்லைகள் (Limits)

x என்ற மாறி எண்ணற்ற மதிப்புகளை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக அடைவதாகக் கொள்வோம். a என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணாகவும், $\in$ என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகச்சிறிய மிகையெண்ணாகவும் இருக்கட்டும். x-க்கும் a-கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசத்தை $|x-a|$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

$\in$ என்ற மிகையெண் எவ்வளவு சிறியதாக இருப்பினும் $|x-a|<\in$ ஆக இருக்குமாறு x-ன் மதிப்பு a-யை நெருங்கிவரக் கூடுமெனில் x ஆனது a என்ற எல்லை மதிப்பை அடைகிறது என்கிறோம். இதை $x \to a$, அல்லது $x = a$ எல்லை அல்லது $\lim itx = a$ அல்லது $\lim x = a$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

எல்லைக் கருத்தாக்கத்தை விவரிக்க கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். உள்வரை பல்கோணத்தின் பக்கங்களை எண்ணிலிக்கு (∞) அதிகப்படுத்தும் போது முக்கோணமானது வட்டத்தை மிக அருகாமையில் நெருங்குகின்றதே தவிர அது ஒரு போதும் வட்டமாவதில்லையெனில் பல்கோணத்தின் எல்லையானது வட்டமாகும்.



மேலே உள்ள படங்களில் பல்கோணத்தின் பக்கங்களை முக்கோணத்திலிருந்து அதிகரிக்கும் பொழுது, பல்கோணமானது வட்டத்தை மிக அருகாமையில் நெருங்குகிறது. பல்கோணமானது $n-$(பக்க) கோணமெனில் கீழ்க்கண்ட கணிதக் கூற்றுகளைக் கூறலாம்.

1. $n-$ஐ அதிகரிக்க அதிகரிக்க, கோணமானது வட்டத்தை நெருங்கும்.
2. n எண்ணிலியை நெருங்கும் பொழுது கோணம் வட்டத்தை நெருங்கும்.
3. $n-$கோணத்தின் எல்லையானது, எண்ணிலியை நெருங்கும் பொழுது வட்டமாகும்.

$\lim\limits_{n\to\infty} n-$ கோணம் = வட்டம். அதாவது, $n-$கோணம் ஒருபொழுதும் வட்டமாவதில்லை. ஆனால் அது வட்டத்தை நெருங்கிறது. எனவே $n-$ கோணத்தில் எல்லையானது ஒரு வட்டமாகும் என நாம் அறியலாம்.

எண் சார்ந்த எடுத்துக்காட்டு

எல்லை கருத்தாக்கத்தை விளக்க $y = n/(n+1)$ என்ற சார்பினை எடுத்துக் கொள்வோம். மதிப்பை ஒன்றிலிருந்து எண்ணிலிக்கு (∞) அதிகரித்துக் கொண்டே செல்வோமெனில $y-$

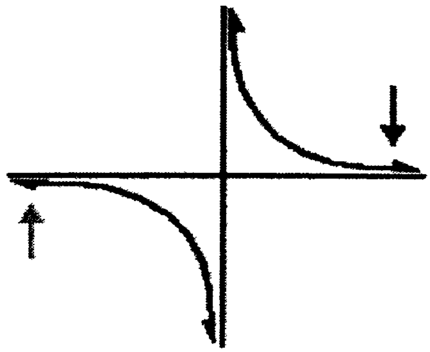
ஆனது 1 என்ற எண்ணை நெருங்குகின்றது. அதாவது "n" இன் மதிப்பு எண்ணிலியை நெருங்கும் பொழுது $y -$ இன் எல்லையானது 1 ஆகும்.அதாவது 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6,....99/ 100,...9999/10000 இதனை நாம் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=1$$

$y=\dfrac{1}{n}$ என்ற சார்பில் $n -$ என்ற எண்ணின் மதிப்பு எண்ணிலியை நெருங்கும்பொழுது $y=\dfrac{1}{n}$ என்ற சார்பில் $y -$ ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்கும். அதாவது, 1/1, 1/2,1/ 3,1/4,1/5,1/10,...1/1000,.....1/10000000000 $n -$ ஆனது எண்ணிலியை நெருங்கும் பொழுது $y -$ ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்குவதை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தில், வரைபடச் சார்பானது $f(x)=\dfrac{1}{x}$ எனவும், $x -$ ஆனது இயல்பு எண்ணிலியை $(+\infty)$ நெருங்கும் பொழுது $f(x)$ ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்குவதை கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தில் காணலாம். இதை நாம் எண்ணிலியின் எல்லை எனக் குறிப்பிடலாம். x அதிகமாக அதிகமாக வரைபடக் கோடானது x அச்சுக்கு நெருங்கி அதனுடைய எல்லையான பூச்சியத்தை நெருங்குவதைக் காணலாம்.



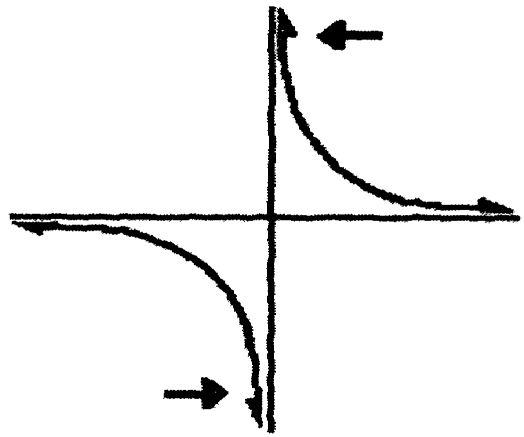
மேலும் x அதிகமாகிக் கொண்டு போகும் பொழுது $\frac{1}{x}$ ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்குவதைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

x ஆனது குறைந்து கொண்டே போகும் பொழுதும் $\frac{1}{x}$ ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்குவதைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

இதை நாம் முடிவிலியின் எல்லை எனக் குறிப்பிடலாம். $\frac{1}{x}$ என்ற சார்பில x ஆனது பூச்சியத்தை இடது மற்றும் வலது புறத்தில் இருந்து நெருங்குவதையும் அதன் முடிவுகளையும் கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தின் மூலம் காணலாம்.



இடது புறத்தில் இருந்து x ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்கும் பொழுது $\frac{1}{x}$ ஆனது $-\infty$ எண்ணிலியை நெருங்கும். வலது புறத்தில் இருந்து x ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்கும் பொழுது $\frac{1}{x}-$ ஆனது $\infty-$ ஐ நெருங்கும் இடது மற்றும் வலது புறத்தில் இருந்து $x-$ ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்கும் பொழுது, இரண்டின் எல்லையும், வெவ்வேறாக இருப்பதால் இரண்டும் சமமில்லை என்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty \text{ மற்றும் } \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)=\infty$$

L என்பது பூச்சியமாகவோ அல்லது ஏதேனும் ஒரு முடிவுடை எண்ணாகவோ இருந்தால்தான், அதை $f(x)-$இன் எல்லை எனக் கூறுகிறோம். $L-$ இன் மதிப்பு முடிவிலியாக (அதாவது முடிவற்றதாக) இருக்குமானால், அது ஒரு சார்பின் எல்லையாக இருக்க முடியாது.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=$ முடிவுறாத எல்லை எனக் கூறலாம்.

சார்பின் எல்லை (Limit of a Function)

$y = f(x)$ என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட $x-$ இன் சார்பாகவும், மற்றும் "a" எனும் மதிப்பை x அணுகும் போது $f(x)$ என்ற சார்பிற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லை (L) இருப்பதாகக் கொள்வோம். x என்ற மாறிக்கு எண்ணற்ற மதிப்புகள் ஒன்றன் பின் ஒன்றாகத் தரமுடியும். அந்த மதிப்புகள் நிலை எண்ணான "a" நெருங்கினால், x க்கும் "a" க்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம் மிகக்குறைவாக அமையும். இந்த மதிப்பு வித்தியாசத்தை $|X-a|$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

$y = f(x)$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். $f(x)$ -க்கும் L எனும் ஒரு முடிவுடை எண்ணுக்குமிடையே உள்ள வேறுபாடு மிகச்சிறியதாக இருக்குமாறு "x" -க்கும் "a" -க்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாட்டைச் சிறியதாக அமைக்க முடியுமானால், L என்பது x என்ற மாறி $a-$யை அணுகும் போது கிடைக்கப் பெறும் $f(x)$ இன் எல்லை எனப்படும். அதாவது $\cdot a-$ ஐ $f(x)$ ன் மதிப்புகள் நெருங்கும் பொழுது, $f(x)$ 'L' என்ற எல்லையை நெருங்கும். இதையே நாம் $f(x)-$ இன் எல்லை அல்லது சார்பின் எல்லை என்கிறோம். இதனைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$\in$(எப்சிலான்) என்பது ஏதாவது ஒரு மிகச்சிறிய மிகை எண். அது எவ்வளவு சிறியதாக இருப்பினும் $\cdot |f(x)-L| < \in$ என இருக்குமாறு மற்றொரு மிகச்சிறிய எண்ணான, $\delta-$ வை காணமுடியுமானால் $(|x-a| < \delta)$, L என்பது "x" என்ற மாறி 'a' -யை அணுகும்போது $f(x)-$ இன் எல்லை என்று வரையறுக்கப்படும். இதனை,

$\lim\limits_{n \to a} f(x) = L$ என எழுதுவது வழக்கம்.

x-க்கும் 'a'-க்கும் இடையேயுள்ள இடைவெளி குறைய குறைய $f(x)$ -க்கும் L -க்கும் இடையேயுள்ள இடைவெளியும் குறையும் என்று எளிய வகையில் குறிப்பிடலாம்.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ எனும் சார்பை எடுத்துக் கொண்டால் இங்கு, $x-$க்கு ஒன்றைத்தவிர வேறு எந்த மதிப்பு வேண்டுமானாலும் கொடுக்கலாம். ஏனெனில் $x=1$ என்று சார்பில் பிரதியிட்டால,

$f(x)=\dfrac{0}{0}$ என்று கிடைக்கும்.

இந்த எல்லை என்ற கருத்தாக்கத்தைச் சில எடுத்துககாட்டுகள் மூலம் அறிந்து கொள்ளலாம். முதலில், $f(x)=x+4$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். $x-$இன் மதிப்புகள் 2-ஐ கீழிருந்து நெருங்கும் போது $f(x)$-இன் மதிப்பைப் பட்டியல் 1-இலிருந்தும் மேலிருந்து நெருங்கும் போது $f(x)$-இன் மதிப்பைப் பட்டியல் 2-இலிருந்தும் காண்க. மேலும் x என்ற மாறிக்கு எண்ணற்ற மதிப்புகள் தரமுடியும் என்பதையும் கவனத்தில் கொள்க.

x	1	1.5	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	5	5.5	5.9	5.99	5.999

பட்டியல் - 1

x	3	2.5	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	7	6.5	6.1	6.01	6.001

பட்டியல் - 2

x மதிப்புகள் நிலை எண் 2-ஐ நெருங்க நெருங்க, $f(x)=x+4$ ஆனது 6-க்கு மிக அருகாமையில் இருக்கும். அதாவது 2-ஐ x-இன் மதிப்புகள் நெருங்கும் போது $f(x)$ ஆனது 6 என்ற எல்லையை நெருங்கும். இதனை $\lim_{x\to 2} f(x)=6$ எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இந்தக் குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டைப் பொருத்த வரையில் $\lim_{x\to 2} f(x)$-ம் $f(2)=6$ -ம் ஒன்று எனக் காண்கிறோம். அதாவது $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

$x\to 0$ என்பதற்கும் $x=0$ என்பதற்கும் மிகுந்த வேறுபாடு உள்ளது என்பதையும் கவனிக்க. $x\to 0$ என்பது 0 என்ற எல்லையை x நெருங்குகிறது அல்லது நோக்குகிறது என்றும் ஆனால் x ஒரு போதும் பூச்சியம் ஆகாது என்பதாகும். $x=0$ என்பது 0 என்ற மதிப்பை x பெறுகிறது என்பதாகும்.

இப்பொழுது $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x-2)}$ என்ற விகிதமுறு சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். x=க்கு 2ஐத் தவிர எந்த மதிப்பு வேண்டுமானாலும் கொடுக்கலாம். இச்சார்பு $x=2$ என்ற புள்ளியில் வரையறுக்கப்படவில்லை. 2-க்கு அண்மையில் உள்ள மதிப்புகளுக்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)}$ ஐக் காண முயல்வோம். பட்டியல்கள் 3 மற்றும் 4 ஆகியன x – ஆனது 2-க்குக் கீழான மற்றும் மேலான மதிப்புகளிலிருந்து நெருங்க, $f(x)$ -இன் மதிப்புகளைக் குறிக்கிறது.

x	1	1.5	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	3	3.5	3.9	3.99	3.999

பட்டியல் - 3

x	3	2.5	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	3	4	4.1	4.01	4.001

பட்டியல் - 4

x – ஆனது நிலை எண்-2 ஐ அணுக, $f(x)$ ஆனது 4 என்ற எல்லையை அணுகுகிறது என்பதைப் பார்க்கிறோம். எனவே $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.x\neq 2$ எனும் போது, $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$ என்பதையும் கவனித்திருப்பீர்கள். இவ்வாறான சார்புகளின் எல்லையைக் கணக்கிட $x\neq 2$ ஆக இருக்கும் போது $x=2$ என்ற மதிப்பை $x+2$ -ல் பிரதியிட்டுப் பெற வேண்டும் என்பதையும் கவனித்திருப்பீர்கள்.

மேலும் $f(x)=\frac{1}{x}$ என்ற தலைகீழ்ச் சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். $f(0)$ வரையறுக்கப்படாத ஒன்றாயிருப்பினும் $\lim_{x\to 2} f(x)$ ஐக் கணக்கிட முடியுமா என முயல்வோம். x – க்கு 0-வைத் தவிர எந்த மதிப்பு வேண்டுமானாலும் கொடுக்கலாம். பட்டியல்கள் 5 மற்றும் 6-ஐக் கவனிக்க. x – இன் மதிப்புகள் 0-வை மேலிருந்தும், கீழிருந்தும் நெருங்க நெருங்க $f(x)$-இன் மதிப்புகள் எந்த ஒரு நிலை எண்ணையும் அணுகவில்லை என்பதும் புலனாகிறது. அதாவது x ஆனது, 0-ஐ அணுக அணுக $f(x)=\frac{1}{x}$ எல்லையை அடையவில்லை என்பது தீர்மானமாகிறது.

x	1/2	1/10	1/100	1/1000
$f(x)$	2	10	100	1000

பட்டியல் - 5

x	-1/2	-1/10	-1/100	-1/1000
$f(x)$	-2	-10	-100	-1000

பட்டியல் - 6

மேற்கண்ட மூன்று எடுத்துக்காட்டுகளில், முதல் இரண்டும் தனித்த மாறிகள் ஒரு நிலை எண்ணை இடமிருந்தோ அல்லது வலமிருந்தோ அணுகும் போது எல்லையை அடைய முடியுமென்றும் மூன்றாவது எடுத்துக்காட்டு அப்படிப்பட்ட எல்லையை அடையவேண்டி அவசியமில்லை என்பதையும் புலப்படுத்துகிறது. இந்த மூன்று எடுத்துக்காட்டும் உணர்த்தும் உண்மையிலிருந்து சார்பின் எல்லையைக் கீழ்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

வரையறை :

$f(x)$ ஆனது $x-$ஐச் சார்ந்த சார்பு என்க. a, L என்பன இரண்டு நிலை எண்கள் $x-$ஆனது $a-$ஐ நெருங்கும் போது, $f(x)$ ஆனது $L-$ ஐ நெருங்குமானால் $L-$ஐ $\cdot L-$இன் எல்லை என்கிறோம். இதனை $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = L$ என எழுதுவது வழக்கம்.

இப்பொழுது சில எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் எல்லைக் கருத்தை விளக்குவோம்.

உதாரணமாக, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ஐக் காண்போம்.

$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ என்ற சார்பில் x-க்கு ஒன்றைத் தவிர எந்த மதிப்பு வேண்டுமானாலும் கொடுக்கலாம், x-ன் மதிப்புகள் ஒன்றை மேலிருந்தும் கீழிருந்தும் நெருங்கும் பொழுதும் $y-$ இன் மதிப்புகள 2 என்ற மதிப்பைச் சுற்றிக் குவிகின்றன. எனவே x இன் மதிப்புக்கும் ஒன்றிற்கும் இடையேயுள்ள வேற்றுமையை மிகச்சிறிதாக்கினால் $y-$இன் மதிப்பிற்கும் '2' க்கும் இடையேயுள்ள வேற்றுமை (h) சிறிதாகின்றது. அதாவது $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ ஆனால் x-க்கு ஒன்று என்ற மதிப்பை பிரதியிட்டால்,

$y-$இன் மதிப்பானது $\dfrac{0}{0}$ என்ற தேரப் பெறாதது (Inderminate)- ஆகக் கொள்கிறோம். முன் கூறிய முறையில் எல்லை காணுவதில் நடைமுறைச் சிக்கல்கள் உள்ளன. எனவே பின்வரும் முறையைத்தான் கையாள வேண்டும்.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ என்பதில் $x-$க்கு $1+h$ என்று பிரதியிட்டால் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(1+h)^2-1}{(1+h)-1}=2+h, x-$ ஆனது ஒன்றை நெருங்கும் பொழுது, ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்கும்.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

குறிப்பு :

(i) L என்பது பூச்சியமாகவோ அல்லது ஏதேனும் ஒரு முடிவுடை எண்ணாகவோ இருந்தால் தான், அதை $f(x)-$ இன் எல்லை என்று கூறுகிறோம் $L-$இன் மதிப்பு முடிவிலியாக

(∞) இருக்குமானால், அதை ஒரு சார்பின் எல்லையாகக் கருத முடியாது.

(ii) ஆனால், x முடிவிலியை அணுகும்போது, அதாவது $x-$இன் மதிப்பு எல்லையில்லாது அதிகரித்துக் கொண்டு செல்லும் பொழுது, $f(x)$ எனும் சார்பு ஒரு முடிவுடை எண்ணை (L) எல்லையாகப் பெற்றிருக்கக் கூடும். இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

இங்கு ∞ என்ற குறியீடு "x" என்பது முடிவில்லாது அதிகரித்துக் கொண்டே செல்லும் நிலையைக் குறிக்கின்றதே தவிர, அது ஒரு எண் அல்ல என்பது அறிந்து கொள்ளல் வேண்டும். இதே போல், x என்ற மாறி $(-\infty)$யை அணுகும் போதும் $f(x)$ என்ற சார்புக்கு L எனும் ஓர் எல்லை இருக்கலாம் இதனை,

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L'$ என எழுதலாம்.

(iii) $x \to a$ எனும்போது $f(x)$-இன் எல்லையை எளிதாகக் கணக்கிட $f(x)$-இல் $x = (a+h)$ என மாற்றம் செய்து, முடிந்தவரை அச்சார்பைச் சுருக்கிய பின் $h \to 0$ என்றிடல் வேண்டும். இதே போல், $x \to \infty$ எனும் போது, $f(x)$இல் $x = \frac{1}{h}$ என்றிட்டு சுருக்கம் செய்தபின் $h \to \infty$ என்றிட வேண்டும்.

(iv) சார்புகளின் எல்லையைக் காண கையாளும் விதிகள் (Working Rule).

1. x,'a' ஐ நெருங்கும் பொழுது எல்லையைக் காண வேண்டுமென்றால் $x = a + h$ என்ற மதிப்பைப் பிரதியிட வேண்டும்.

2. பின்னத்தின் மேல், கீழ் பகுதிகளை விரிவாக எழுதி இரண்டிற்கும் பொதுவான காரணி (factor) இருப்பின் அதனை நீக்க வேண்டும்.

3. நீக்கியபின் h – க்குப் பூச்சிய மதிப்பைப் போட வேண்டும்.

4. எஞ்சியுள்ள மதிப்புதான் "சார்பின் எல்லை" என்று கூறப்படுகின்றது.

5. $\lim_{x \to \infty} f(x)$ காணவேண்டுமானால் முதலில் $x = \frac{1}{y}$ என்பதைச் சார்பில் பிரதியிட வேண்டும். அப்படிப் பிரதியிடும் பொழுது சார்பு 'y'-க்குப் பூச்சிய மதிப்பு நெருங்கும் பொழுது எல்லையைக் காண வேண்டும்.

அடிப்படை எல்லைத் தேற்றங்கள் (Fundamental Theorem on Limits) இயல் முறையில் நிறுவப்படும் எல்லை (Algebraic limit)

'n' ஒரு முழு எண்ணாகவோ, பின்னமாகவோ அல்லது குறை எண்ணாகவோ இருப்பினும்

$$\underset{x \to a}{Lim} \; \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\, a^{n-1}$$

நிரூபணம் : $f(x) = \left(\frac{x^n - a^n}{x - a}\right)$ என்க.

மேற்கண்ட சார்பில் x-க்குப் பதில் (a+h)-ஐ ஈடாக்குவோம். இதில் x=a+h என்றிடுவோமானால், x-a எனில் h-o இம் முடிவு, n-இன் மிகை முழு எண் மதிப்பிற்கு மட்டும் நிறுவப்பட்ட போதிலும், எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கும் அது உண்மையாகும் என்று நிறுவ முடியும் என்பதை அறியவும்.

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{(a+h)^n - a^n}{(a+h) - a}$$

$$= \frac{a^n\left(1+\frac{h}{a}\right)^n - a^n}{h}$$

$$= a^n\left(1+n\frac{h}{a}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{h}{a}\right)^2+\cdots\right) = a^n$$

மேற்கண்ட சார்பில் x-க்குப் பதில் $(a+h)$ -ஐ ஈடாக்குவோம். ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றத்தில் விகிதமுறு படிக்குக் கிடைக்கும் விரிப்பை (Binomial theorem for a rational index) உபயோகித்து கோவையின் மேற்பகுதி விரிக்கப்பட்டுள்ளது என்பதைக் காணவும். $\left|\frac{h}{a}\right| < 1$ ஆகவிருப்பதால் ஈருறுப்பு சேர்க்கைத் தேற்றத்தால் விரிப்பு எழுதுவதில் முரண்பாடில்லை.

$$= \frac{1}{h}\left[\left(a^n + n_{c_1}a^{n-1}h + n_{c_2}a^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right) - a^n\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[n_{c_1}a^{n-1}h + n_{c_2}a^{n-2}h^2 + \ldots. + h^n\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[na^{n-1}n + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h^2 + \ldots.. + h^n\right]$$

$$\left[i.e., n_{c_{1=n}}, \quad n_{c_2} = \frac{n(n-1)}{2!}\right]$$

$$= na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h + \ldots\ldots + h^{n-1}$$

$\therefore \lim_{x \to a} f(x)$ $'x'$ஆனது $'a'$ ஐ நெருங்கினால் h→o

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{h \to 0} [n\, a^{a-1} + h$$ யையும் அதன்

படிகளையுமுடைய உறுப்புக்கள்]

$$= \lim_{h \to 0} \left[na^{n-1} + 0 + 0 \right]$$

$$= na^{n-1}$$

1. மதிப்பு காண்க: $\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{x^m - a^m}{x - a} \frac{x - a}{x^n - a^n}$$

$$= \frac{\frac{x^m - a^m}{x - a}}{\frac{x^n - a^n}{x - a}}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a}}{\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}}$$

$$= \frac{m.a^{m-1}}{n.a^{n-1}}$$

$$= \frac{m}{n} \; m - n$$

2. மதிப்பு காண்க: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$$=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\times\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x\to 0}=\frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1$$

3. மதிப்பு காண்க: $\lim_{x\to\infty}\frac{lx^2+mx+n}{l'x^2+m'x+n'}$

x= $\frac{1}{y}$ என்ற மதிப்பைப் பிரதியிட

$$\frac{lx^2+mx+n}{l'x^2+m'x+n'}=\frac{\frac{l}{y^2}+\frac{m}{y}+n}{\frac{l'}{y^2}+\frac{m'}{y}+n'}=\frac{l+my+ny^2}{l'+m'y+n'y^2}$$

$x\to\infty$ ஆனால்

$$\lim_{x\to\infty} \frac{lx^2+mx+n}{l'x^2+m'y+n'} \overset{y\to 0}{\lim_{y\to 0}} \frac{l+my+ny^2}{l'+m'y+n'y^2} = \frac{1}{l'}$$

மதிப்பு காண்க : . $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

தீர்வு :

$x=\frac{1}{n}$ எனப் பிரதியிடு. $x\to 0$ எனில் $n\to\infty$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e$$

$f(x)=a-$இல் வரையறுக்கப்படாவிடினும், $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ இல் வரையறுக்கப்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

மதிப்பு காண்க: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$

தீர்வு : $f(x)=\dfrac{1-1+1-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$:

f(x) y; $\frac{0}{0}$ என்றுள்ளது. எனவே கீழ்க்கண்ட முறையில் மதிப்பைக் காண்போம்.

எனவே $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

$x = 1+h$ எனப் பிரதியிடு. $x \to 1$ எனில் $h \to 0$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - (1+h)^2 + (1+h) - 1}{(1+h)^2 - 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + 2h^2 + h^3}{2h + h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2 + 2h \ + h^2)}{h(2+h)}$$

$h \neq 0$ என்பதால், h-ஆல் பகுதியையும், விகுதியையும் வகுக்க,

$$\lim_{h \to 0} \frac{2 + h + h^2}{2+h} = \frac{2}{2} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு:

மதிப்பு காண்க: $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{(x^2 - 3x)}$

தீர்வு: $f(8) = \left(\dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 3x}\right)$ எனில் $= \dfrac{0}{0}$

எனவே,

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - 27}{(x+h)^2 - 3(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{27 + 27h + 9h^2 + h^3 - 27}{(9 + 6h + h^2) - (9 + 3h)}$$

$$= \frac{27 + 9h + h^2}{3 + h}$$

$$= \lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{27 + 9h + h^2}{3 + h} \right]$$

$$= \frac{27}{3} = 9$$

எடுத்துக்காட்டு:

மதிப்பு காண்க: $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

தீர்வு:

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$\therefore f(5) = \frac{0}{0}$$

எனவே $\lim_{x \to 5} f(x)$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 - 25}{5 + h - 5}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{25 + 10h + h^2 - 25}{5 + h - 5}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10h + h^2}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(10+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (10+h) = 10$$

எடுத்துக்காட்டு:

மதிப்பு காண்க: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

தீர்வு : $f(x) = \frac{0}{0}$ வரையறுக்கப்படாதது.

$x = (1+h)$ எனப் பிரதியிடு. $x \to 1$ எனில் $h \to 0$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + (1+h) - 2}{(1+h)^2 - 3(1+h) + 2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 + h - 2}{1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 3h}{h^2 - h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{h(3+h)}{h(h-1)} = \frac{3}{-1} = -3$$

(அல்லது)

மதிப்பு காண்க : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$$

$$\because f(1)=\frac{0}{0}.$$

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-2}$$

$$=\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

f(x) [or] f(a) வரையறுக்கப்படின் $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, இல் வரையறுக்கப்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{2x^2+5x+3x}$ -இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு: $f(1)=\dfrac{1+1}{2+5+3}=\dfrac{2}{10}=0.2$ எனவே

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{2x^2+5x+3x}=0.2$$

எடுத்துக்காட்டு:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3+5x^2+-7x+2}{2x^2+6x^2+2x-3}$$ -இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு: $f(0) = \frac{2}{-3} = -2/3$ எனவே

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3+5x^2+-7x+2}{2x^3+6x^2+2x-3} = -2/3$$

இடமிருந்து மற்றும் வலமிருந்து எல்லைகள் (Left Hand and Right Hand Limits)

$f(x)$-இன் எல்லையை வரையறுக்கும் போது, நிலை எண் $a-$ஐ x நெருங்க நெருங்க $f(x)$-இன் மதிப்புகளைக் கருத்தில் கொண்டோம். x-இன் மதிப்புகள் $a-$ஐ விட சிறியதாகவோ (இடமிருந்து நெருங்கும் போது) அல்லது பெரியதாகவோ (வலமிருந்து நெருங்கும் போது) இருக்கும். $x-$ இன் மதிப்புகள் $a-$ஐவிட குறைந்த மதிப்புகளைத்தான் எடுக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனைக்குட்படுத்தினால், x -ஆனது $a-$யின் கீழிருந்து அல்லது இடமிருந்து நெருங்குகிறது என்போம். இது, $x \to a_{-0}$ அல்லது $x \to a_{-}$ எனக் குறிக்கப்படும். $a-$ ஐ $x-$ஆனது இடமிருந்து அல்லது கீழிருந்து நெருங்க $f(x)$-இன் எல்லையைக் கீழிருந்து அல்லது இடமிருந்து எல்லை என்போம். இதனை,

$Lf(a) \lim_{x\to a-} f(x)$ என எழுதுவோம்.

இதேபோல், x-ஆனது a-ஐ விட அதிக மதிப்புகளிலிருந்து நெருங்குமாயின் அதனை $x \to a_{+0}$ அல்லது $x \to a_{+}$ எனக் குறிப்பிடலாம். மேலும் $x \to a_{+}$ எனும் போது $f(x)$-இன் எல்லையை மேலிருந்து எல்லை அல்லது வலமிருந்து எல்லை என்போம். இதனை,

$Rf(a) \doteq \lim_{x\to a+} f(x)$ என எழுதுவோம்.

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு, எல்லையைப் பெற்றிருக்க வேண்டுமெனில், இடமிருந்து மற்றும் வலமிருந்து எல்லைகள் பெற்றிருக்க வேண்டும். மேலும் அவைகள் சமமாக அமைய வேண்டுமென்பதும் அவசியமாகிறது. இடமிருந்து மற்றும் வலமிருந்து எல்லைகள் ஒருதலைபட்ச எல்லைகள் எனவும் அழைக்கப்படும்.

இடமிருந்து மற்றும் வலமிருந்து எல்லைகள்

இடமிருந்து மற்றும் வலமிருந்து எல்லைகளைத் தனித்தனியே கண்டு பிடித்து எல்லை மதிப்பைக் காண்போம்.

இடமிருந்து எல்லை: $f(x)$ என்ற சார்பின் இடப்புற எல்லையானது, L_1 என்ற எண்ணாக இருப்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

$$\lim_{h\to 0} f(a-h)=L_1$$

$\lim\limits_{h\to 0} f(a-h)$ என்பதை $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ என எழுத $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=L_1$ என இருக்க வேண்டும்.

வலமிருந்து எல்லை: $f(x)$ என்ற சார்பின் வலப்புற எல்லையானது L_2 என்ற எண்ணாக இருப்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=L_2$$

$\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ என்பதை $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ என எழுத $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)=L_2$ என இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ என இருக்க வேண்டுமெனில் $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = \lim\limits_{x\to a_+} f(x)=L$ இருக்க வேண்டும். அதாவது $L_1=L_2=L$.

எடுத்துக்காட்டு:

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு: 1

இடப்புறத்திலிருந்து எல்லை: $x \to 1$ எனும் பொழுது $x = 1-h, \;\; h > 0$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{(1-h)^2-1}{1-h-1} = \lim_{h \to 0} \frac{1-2h-h^2-1}{1-h-1}$$
$$= \lim_{h \to 0} (2-h) = \lim_{h \to 0} 2 - \lim_{h \to 0} (h) = 2-0 = 2$$

தீர்வு: 2

வலப்புறத்திலிருந்து எல்லை: $x \to 1+$ எனும்பொழுது, $x = 1+h$ $h > 0$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2-1}{1+h-1} = \lim_{h \to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{1+h-1}$$
$$= \lim_{h \to 0} (2+h) = \lim_{h \to 0} 2 + \lim_{h \to 0} (h) = 2+0 = 2$$

எடுத்துக்காட்டு:

$f(x) = \frac{x^2+4}{x+2}$ எனில் , $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ இன் மதிப்பு காண்க.

இடப்புறத்திலிருந்து எல்லை (இபு எ)

$$f(2-h) = \frac{(2-h)^2+4}{(2-h)+2} = \frac{4-4h+h^2+4}{4-h} = \frac{8-4h+h^2}{4-h}$$ எ னி ல்

$h = 0$ எனப் பிரதியிட்டால் இடப்புறத்திலிருந்து வரையறுக்கப்படும் எல்லையானது:

$f(2+0) = 2$ எனவே

இபுஎ : $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(2-h) = 2$ ... (1)

வலப்புறத்திலிருந்து எல்லை (வபுஎ)

$$f(2+h) = \frac{(2+h)^2+4}{(2+h)+2} = \frac{4+4h+h^2+4}{4+h} = \frac{8+4h+h^2}{4+h}$$

எனில் $h=0$ என்று எனப் பிரதியிட்டால் வலப்புறத்திலிருந்து வரையறுக்கப் படும் எல்லையானது, $f(2+0)=2$ எனவே

வபுஎ : $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(2+h) = 2$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து பெறுவது : இபுஎ = வபுஎ = 2.

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right) = 2$

மேலும் $f(2) = \frac{2^2+4}{2+2} = \frac{8}{4} = 2$

எடுத்துக்காட்டு:

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ எனில் $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ன் மதிப்பு காண்க.

மேற்கூறிய $f(x)$ என்ற சார்பில் 2-ஐ பிரதியிட்டால் வரையறுக்கப்படாததொன்றாயினும் $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ஐக் கணக்கிட முடியுமா என முயல்வோம்.

தீர்வு:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

$f(x)$ சார்பில் $x=2$ எனப்பிரதியிடும் பொழுது $f(2)$ வரையறுக்கப் படாததொன்றாகும்.

$$\frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0} \text{ வரையறுக்கப்படாதது}$$

இபுஎ:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2-h) = \frac{(2-h)^2-4}{2-h-2}$$

$$= \frac{-4h+h^2}{-h} = 4-h$$

$h=0$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் $f(2-0)=4$

வபுஎ:

$$\lim f(x) = f(2+h) = \frac{(2+h)^2-4}{2+h-2}$$

$$= \frac{4+h^2+4h-4}{2+h-2}$$

$$= \frac{4h+h^2}{h}$$

$$= 4+h$$

$h=0$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் $f(2+0)=4$

இபுஎ = வபுஎ = 4

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

எடுத்துக்காட்டு:

$f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}$ எனில் $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

$f(x) = \frac{2-2}{|2-2|} = \frac{0}{0}$ வரையறுக்கப்படாதது.

இபுஎ : ஆனால் $f(2-h) = \frac{2-h-2}{|2-h-2|} = \frac{-h}{|-h|} = \frac{-h}{+h} = -1$

இம்மதிப்பானது h-ஐச் சார்ந்ததல்ல. அனைத்து -h-மதிப்பிற்கும் $f(2-h) = -1$ என்ற மதிப்பானது இடமிருந்து வரும் எல்லை.

வபுஎ : $f(2+h)=\dfrac{2+h-2}{|2+h-2|}=\dfrac{h}{|h|}=\dfrac{h}{h}=1$ இம்மதிப்பானது h - ஐச் சார்ந்ததல்ல. அனைத்து + h மதிப்பிற்கு $f(2+h)=1$ என்ற மதிப்பானது வலமிருந்து வரும் எல்லை.

இபுஎ ≠ வபுஎ என்றிருப்பதால் $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{|x-2|}$ வரையறுக்க முடியாததாகும்.

தொடர்ச்சியான சார்பும் தொடர்ச்சியற்ற சார்பும் (Continuous and Discontinous Functions)

எந்தவொரு சார்பையும் வளைவரை மூலமாகக் குறிப்பிட முடியும். அந்த வளைவரையைப் பார்த்துச் சார்பின் பண்புகளை அறியலாம். உதாரணமாக, எந்தச்சார்பின் வளைவரை தொடர்ச்சியுடையதாக இருக்கின்றதோ, அந்தச்சார்பைத் தொடர்ச்சியான பண்பு (தொடருடைச்சார்பு) (Continuous function) என்றும் வளைவரை தொடராகவில்லாமல் ஆங்காங்கு இடைவெளி இருப்பின் அச்சார்பைத் தொடர்ச்சியற்ற (தொடரிலாச் சார்பு) (Discontinous Function) என்றும் கூறலாம்.

மேற்சொன்ன மூன்று சார்புகளிலிருந்து x- இன் மதிப்புகள் இடமிருந்து மற்றும் வலமிருந்து நெருங்கும்போது $f(x)$-இன் மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலிடலாம்.

	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2
$f(x)=\frac{x^2+4}{x+2}$	1.9513	1.9950	1.995	2	2.0005	2.0050	2.0512
$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$	3.9000	3.9900	3.9990	$\frac{0}{0}$	4.0010	4.0100	4.1000
$f(x)=\frac{x-2}{\|x-2\|}$	-1	-1	-1	$\frac{0}{0}$	1	1	1

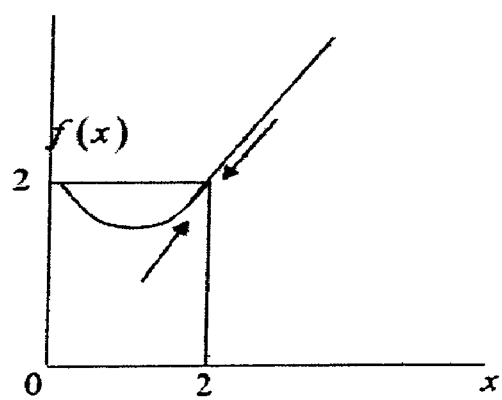
முதற்சார்பில் x-இன் மதிப்புகள் 2 -ஐ இடமிருந்தும் வலமிருந்தும் நெருங்கும் போது $f(x)$-இன் மதிப்பு இரண்டை நோக்கிக் குவிகின்றது. மேலும் x-ஆனது 2 ஆக இருக்கும் பொழுது $f(x)$-இன் மதிப்பு 2 என உள்ளதைப் பட்டியலில் காண்க.

இரண்டாவது சார்பில் x-இன் மதிப்புகள் 2-ஐ இடமிருந்தும் வலமிருந்தும் நெருங்கும் போது $f(x)$-இன் மதிப்புகள் (y எனும் சார்புடைமாறி) 4 என்ற எண்ணை நோக்கிக் குவிகின்றன. ஆனால் இச்சார்பு $x=2$ என்ற புள்ளியில் வரையறுக்கப்படவில்லை. அதாவது $\frac{0}{0}$

மூன்றாவது சார்பில் x-ஆனது 2-ஐ இடமிருந்தும் வலமிருந்தும் நெருங்கும் போது y எனும் சார்புடைய மாறி (அல்லது $f(x)$-இன் மதிப்புகள்) எந்தவொரு நிலையான எண்ணையும் அணுகவில்லை என்பதை அறியலாம். மேலும் இச்சார்பில் x-ஆனது 2-ஐ அணுக அணுக இச்சார்பு எல்லையை அடையவில்லை எனவும் $x=2$ ஆக இருக்கும் போது வரையறுக்கப்படவில்லை எனவும் தீர்மானமாகிறது.

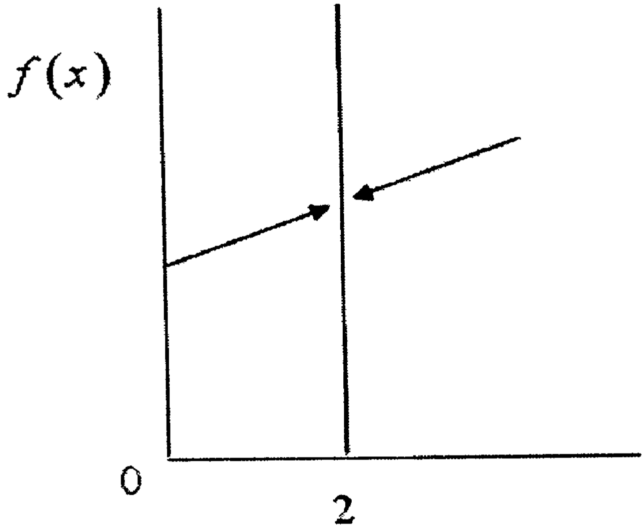
கீழ்க்கண்ட வரைபடங்கள் ஒரு புள்ளியில் சார்பு எல்லைக் கருத்தினையும் தொடர்பு சார்பினையும் மற்றும் தொடர்பிலாச் சார்பினையும் காட்டுகின்றது.

எ.கா. 1



$x=2$ ஆக இருக்கும்போது இச்சார்பானது இரண்டு பக்கத்திலிருந்தும் ஒரே புள்ளியை நெருங்குகின்றது என்பதை மேற்கண்ட வளைகோடு காட்டுகின்றது. மேலும் $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2}$ வரையறுக்கப்பட்டதொன்றாகும். இவ்வளைகோடானது தொடர்ச்சியான தொன்றாகும். ஏனெனில் $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2}=f(2)$

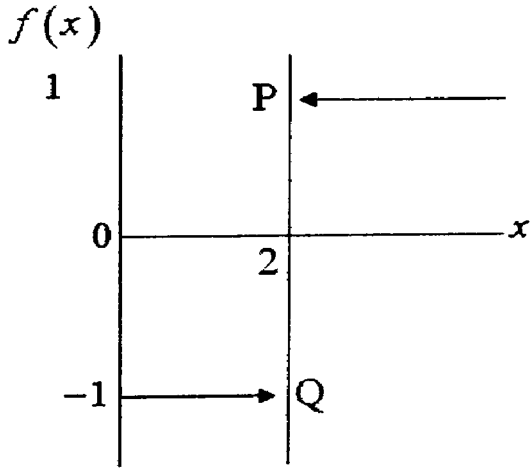
எ.கா. 2



$Y = f(x)$ என்ற சார்பு,. $x = a$ என்ற புள்ளியில் வரையறுக்கப் படாததாகவும், ஆனால் $\lim_{x \to a} f(x)$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள எல்லையாக வருவதாக இருக்கட்டும். $x = a$ என்ற புள்ளியில் நிபந்தனை (1) நிறைவுபடுத்தப்படாததால் இச்சார்பு தொடர்ச்சியற்றதாகி விடுகிறது. சார்பின் வரைபடம் (graph) நம் கண்களுக்குத் தொடர்ச்சியான கோடாகத் தெரிந்தாலும், அக்கோட்டில் $x = a$ என்பதற்கான ஒற்றைப்புள்ளி காணப்படாது. அப்புள்ளியில் கோடு அறுந்து இருக்கும். x-ஐ இரண்டுபக்கத்திலிருந்தும் 2-க்கு அணுக அணுக இச்சார்பானது புள்ளியை நோக்கி நெருங்குகின்றது என்பதை வரைபடத்தில் காணலாம்.

அதாவது $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{|x-2|}$ வரையறுக்கப்பட்டதொன்றாகும். ஆனால் இச்சார்பானது $x = 2$ என்ற புள்ளியில் வரையறுக்கப்படவில்லை. 2-க்கு அண்மையில் உள்ள மதிப்புக்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே இக்கோடானது தொடர்ச்சியற்றதொன்றாகும் $x = 2$ என்பது ஓர் தொடர்பறுக்கும் புள்ளி.

எ.கா. 3



மேற்கண்ட வரைபடத்தில் x-ஆனது 2-ஐ இடமிருந்தும் வலமிருந்தும் அணுக அணுக $f(x)$ இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளை நோக்கிச் செல்கின்றன. மேலும் எல்லையை அடையவில்லை என்பது தெரிகிறது. $x=2$ ஆக இருக்கும் பொழுது இச்சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை எனவும் அறியலாம். அதாவது $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{|x-2|}$ வரையறுக்கப்படாததொன்றாகும். மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் முதல் இரண்டு ஒரு நிலை எண்ணை இடமிருந்தோ அல்லது வலமிருந்தோ அணுகும் போது, எல்லையை அடைய முடியுமென்றும் மூன்றாவது எடுத்துக்காட்டு அப்படிப்பட்ட எல்லையை அடைய முடியாது என்பதையும் புலப்படுத்துகின்றன.

தொடர்ச்சியான சார்பாக இருப்பதற்கான நிபந்தனைகள்:

$f(x)$ என்ற சார்பு, $x=a$ என்ற புள்ளியில் x- இன் தொடர்ச்சியான ஒரு சார்பாக இருப்பதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு.

1. $f(a)$ முடிவுள்ளதாக (finite) வரையறுக்கப்படல் வேண்டும்.

$$f(a)$$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ இடமிருந்து மற்றும் வலமிருந்து எல்லைகள் சமமாகவும் வரையறுக்கப் படக்கூடியனவாகவும் இருக்க வேண்டும்.

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ என இருத்தல் வேண்டும்.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

எடுத்துக்காட்டு:

கீழ்க்கண்ட சார்பு $x = 2$ என்ற புள்ளியில் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பா அல்லது தொடர்ச்சியற்ற சார்பா எனக் கண்டுபிடி.

(i) $f(a) = f(2) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 4} = \dfrac{4 - 4}{4 - 4} = 0$ ..... (1)

(ii) $$\lim_{h \to 0} f(a - h) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{(2-h)^2 - 4}{(2-h) - 2}\right] = \lim_{h \to 0}\left[\frac{4 - 4h + h^2 - 4}{2 - h - 2}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{h^2 - 4h}{-h}\right] = \lim_{h \to 0}(4 - h) = 4 \quad \text{..... (2)}$$

$h = 0$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் $f(2 - 0) = 4$

(iii) $$\lim_{h \to 0} f(a + h) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{(2+h)^2 - 4}{(2+h) - 4}\right] = \lim_{h \to 0}\left[\frac{4 + 4h + h^2 - 4}{2 + h - 2}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{h^2 + 4h}{h}\right] = \lim_{h \to 0}(4 + h) = 4 \quad \text{...(3)}$$

முதலாவது நிபந்தனை ஏற்கப்படாததால் இச்சார்பானது தொடர்ச்சியற்ற தொன்றாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = 3x + 4$ என்ற சார்பு $x = 1$ என்ற புள்ளியில் x -இன் தொடர்ச்சியான சார்பாகும். ஏனெனில்

1. $x=1 \quad f(1)= \quad 3(1)+4=7$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

3. மேலும் $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\ldots$

$x=1$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$ என்ற சார்பானது தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

கீழ்க்கண்ட சார்பு $x=2$ என்ற புள்ளியில் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பா அல்லது தொடர்ச்சியற்ற சார்பா எனக் கண்டுபிடி.

தீர்வு:

$$y=\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$f(x)=f(2)$$

$$f(2)=\frac{2^2-4}{2-2}$$

$$=\frac{0}{0}$$

முதலாவது நிபந்தனைகள் ஏற்கப்படாததால் இச்சார்பானது தொடர்ச்சியற்ற தொன்றாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

கீழ்க்கண்ட சார்பு $x=1$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியான சார்பா எனக் கண்டுபிடி.

$y=3x-5$ i.e., $f(x)=3x-5$

(i) $f(1)=3-5=-2$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(3x-5)$

$$=3(1)-5$$

$$=-2$$

இது ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு.

எடுத்துக்காட்டு:

கீழ்க்கண்ட சார்பு $x = -2$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியான சார்பா எனக் காண்க.

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 + 2(-2) \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

இபுஎ

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} f(x) &= \lim_{x \to -2}\left(x^2 + 2x\right) \\ &= (-2)^2 + 2(-2)^2 \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

வபுஎ

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} f(x) &= \lim_{x \to -2}\left(x^2 + 2x\right) \\ &= (-2)^2 + 2(-2) \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

இது ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு.

எடுத்துக்காட்டு:

கீழ்க்கண்ட சார்பு $x = 4$ என்ற புள்ளியில் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பா எனக் கண்டுபிடி.

$$y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

$$f(a) = f(4) = \frac{4^2 - 4}{4 - 4}$$
$$= \frac{4 - 4}{4 - 4}$$
$$= 0$$

$f(4)$ வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே இடது வலபுற எல்லைகளைக் காண வேண்டும்.

இபுஎ

$$\lim_{h \to 0} f(a-h) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{(4-h)^2 - 16}{(4-h) - 4}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{16 + 3 - 8h + h^2 - 16}{4 - h - 4}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{-8h + h^2}{-h}\right] = \underset{h \to 0}{Lt}\left[(8-h)\right] = 8$$

வபுஎ

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{(4+h)^2 - 16}{(4+h) - 4}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{16 + 8h + h^2 - 16}{4 + h - h}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{8h + h^2}{h.}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[8 + h\right] = 8$$

நிபந்தனை (1) பூர்த்தியாகவில்லையாதலால் அதாவது $f(x)$ வரையறுக்கப் படாததால் இச்சார்பானது ஒரு தொடர்ச்சியற்ற சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$y = x^2$ என்ற சார்பு $x=2$ என்ற புள்ளியில் தொடர்புச்சார்பு என நிரூபி. $f(x) = x^2$ எனில் $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ -இன் மதிப்பு காண்.

$$f(x) = f(2) = 4$$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = f(2)$$

$$4 = 4$$

எனவே இச்சார்பானது ஒரு தொடர்புடைச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} x = 3$ என்ற புள்ளியில் இச்சார்பு தொடர்ச்சியான சார்பா என்று கண்டுபிடி.

$$f(x) = f(3) = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$

நிபந்தனை (1) பூர்த்தியாகவில்லையாதலால் அதாவது $f(x)$ வரையறுக்கப்படாததால் இச்சார்பானது ஒரு தொடர்ச்சியற்ற சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

கீழ்க்கண்ட சார்பு $x = 2$ என்ற புள்ளியில் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பா அல்லது தொடர்ச்சியற்ற சார்பா எனக் கண்டுபிடி.

$$f(x) = x^3$$

தீர்வு: $f(x) = x^3$

$$f(3) = 3^3 = 27$$

இபுஎ $= \lim_{x \to 3^-} x^3 = \lim_{h \to 0} (3-h)^3$

$$= \lim_{h \to 0} \left(27 - 27h + 9h^2 - h^3\right) = 27$$

வபுஎ $= \lim_{x \to 3^+} x^3 = \lim_{h \to 0} (3-h)^3$

$$= \lim_{h \to 0} \left(27 + 27h + 9h^2 + h^3\right) = 27$$

இபுஎ= $f(3)$ =வபுஎ . எனவே இச்சார்பானது $x = 2$ என்ற புள்ளியில் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

கீழ்க்கண்ட சார்பு $x = 0$ என்ற புள்ளியில் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பா அல்லது தொடர்ச்சியற்ற சார்பா எனக் கண்டுபிடி.

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x > 0 \\ 2 & x \le 0 \end{cases}$$

தீர்வு

(i) வபுஎ $= \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0^+} f(0+h) = 5$

இபுஎ $= \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h) = 2$

வபுஎ ≠ இபுஎ

எனவே இச்சார்பானது $x = 0$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியற்ற சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

கீழ்க்கண்ட சார்பு ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பா அல்லது தொடர்ச்சியற்ற சார்பா எனக் கண்டுபிடி.

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}, & x\neq 3 \\ 2 \quad , & x=3 \end{cases}$ $\qquad x=3.$

ii) $f(x)=\begin{cases} x+3 & ,x\leq 0 \\ x^2 & , x>0 \end{cases}$ $\qquad x=0.$

iii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-a|}{x-a}, & x\neq a \\ 1, & x=a \end{cases}$ $\qquad x=a$

தீர்வு:

i) $f(3)=2$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x=3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x-1)$$
$$=3-1$$
$$=2$$

எனவே இச்சார்பானது ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

ii) இபுஎ $= \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+3)=\lim_{h\to 0}(0-h)+3=3.$

வபுஎ $= \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\right)=\lim_{h\to 0}(0+h)^2=0$

இபுஎ $\neq$ வபுஎ

எனவே இச்சார்பானது தொடர்ச்சியற்ற சார்பாகும்.

iii) இபுஎ $= = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x-a|}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{|a-h-a|}{a-h-a}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|-h|}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h} = -1.$$

வபுஎ $= \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x-a|}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{|(a+h)-a|}{(a+h)-a}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

இபுஎ $\neq$ வபுஎ

எனவே இச்சார்பானது $x = a$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியற்ற சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

கொடுக்கப்பட்ட x புள்ளிகளில் தொடர்ச்சித் தன்மையைக் காண்க.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-3} & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases} \text{ at } x = 3$$

$$(i) f(3) = 2$$

$$(ii) \lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 4(3+h) + 3}{(x+h)-3}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9+h^2+6h-12-4h+3}{3+h-3}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9+h^2+6h-12-4h+3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+6-4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h+6-4 = 2$$

நிபந்தனை $i = ii$ எனவே இச்சார்பானது தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

எல்லையைக் காணப் பயன்படும் சில அடிப்படைத் தேற்றங்கள்

x என்ற சார்பிலா மாறி a எனும் ஒரு மெய்யெண்ணை அணுகும்போது $f(x)$, $g(x)$ என்ற சார்புகள், L,M எனும் எல்லைகளை அடைவதாக வைத்துக் கொள்வோம். அதாவது

$$\lim_{x \to a} fx = L \quad \lim_{x \to a} g(x) = m$$

எல்லை காண பின்வரும் தேற்றங்களும் பயன்படுத்தப்படும்.

1. u = f(x) & v = g(x) எனில்

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x - a} g(x) = L \pm M$$

2. u = f(x)+v = g(x) எனில்

$$\lim_{x - a} [f(x)\ g(x)] = \lim_{x - a} f(x) \lim_{x - a} g(x) = L * M$$

3. u = f(x) & v = g(x) எனில்

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M} \ldots\ldots [M \neq 0]$$

4. u = f(x) & v = g(x) எனில்

$$\lim_{x \to a} k f(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = kL$$

5. u = f(x) & v = g(x) எனில்

$$\lim_{x \to a} f\ [g(x) = f \lim_{x \to a} g(x)] = fM$$

6. u = f(x) & v = g(x) எனில்

f(x)? g(x) எனில் $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

7. u = f(x) = k, k என்பது மாறிலி எனில்

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to u} (k) = k$$

8. u = f(x) எனில்

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

9. u = f(x) எனில்

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

10. u = f(x) எனில்

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{1/n} = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^{1/n}$$

மேற்கூறிய விதிகளை எல்லையின் வரையறையைப் பயன்படுத்தி நிரூபிக்க முடியும். இங்கு சில விதிகள் மட்டும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு:

$\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 + 4x - 3\right)$-இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு:

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 4x - 3) = \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 4x - \lim_{x \to 1} 3$$

$$= 1+4-3$$

$$= 2$$

எடுத்துக்காட்டு:

$\lim\limits_{x \to 2} (2x+3)(4x+1)$ -இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு: $\lim\limits_{x \to 2} (2x+3)(4x+1) = \lim\limits_{x \to 2} (2x+3) = \lim\limits_{x \to 2} (4x+1)$

$$= \lim_{x \to 2} (2x+3)(4x+1)$$

$$= \lim_{x \to 2} (2x+3) * \lim_{x \to 2} (4x+1)$$

$$= \left[\lim_{x \to 2} 2x + \lim_{x \to 2} 3\right] * \left[\lim_{x \to 2} 4x + \lim_{x \to 2} 1\right]$$

$$= (4+3) * (8+1)$$

$$= 7 \times 9 = 63$$

எடுத்துக்காட்டு:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2+8}{x^3-4)}\right)$$ -இன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு :

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2+8}{x^3-4)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 0} \quad x^2+\lim\limits_{x\to 0} \ 8}{\lim\limits_{x\to 0} \quad x^3-\lim\limits_{x\to 0} \ 4}=\frac{0+8}{0-4}=-2$$

எடுத்துக்காட்டு:

$$\lim_{x \to 1} 4x^2$$ – இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$\lim_{x \to 1} 4x^2 = 4 \quad \lim_{x\to 1} x^2 = 4\times 1 = 4$$

எடுத்துக்காட்டு:

மதிப்பு காண்க $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{25\text{-}x^2}$

தீர்வு:

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{25\text{-}x^2}$$

$$=\sqrt{\lim_{x \to 3}(25\text{-}x^2)}$$

$= \sqrt{25-9}$

$= \sqrt{16} = 4$

எடுத்துக்காட்டு:

$\lim\limits_{x \to 4} x^4$ -இன் மதிப்பு காண்.

தீர்வு:

$$\lim_{x \to 4} x^4 = \sqrt{\lim_{x \to 4} 4^4} = \sqrt{4^2} = 16$$

<+>

4

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகள்

அணிகளையும், அணிக்கோவைகளையும் பொருளாதார அறிஞர்கள் சமுதாயக் கணக்கெடுப்பு, உள்ளீடுவெளியீடு பகுத்தாய்வு, நேர்கோட்டு அமைப்பு திட்டம் போன்ற பல பிரிவுகளில் பயன்படுத்துவதால் அவற்றைப் பற்றி அறிந்து கொள்வது மிகவும் அவசியமாகும்.

வரையறை

ஒரு செவ்வக அமைப்பில் வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ள எண்களை இரண்டு அடைப்புக் குறிகளுக்குள் குறிப்பிடக் கிடைப்பது ஒரு அணி எனப்படும். அதாவது $m\ n$ எண்களை m நிரைகளிலும் n நிரல்களிலும் வரிசையாக எழுதி அவற்றைப் பின்வருமாறு இரண்டு அடைப்புக் குறிகளுக்குள் அமைப்போமானால், நமக்கு ஒரு அணி கிடைப்பதாகக் கூறுகிறோம். அதாவது,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & & & & \\ & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

எனில், பின் A என்பது ஒரு $(m \times n)$ அணி எனப்படும். (இதை ஆங்கிலத்தில் m by n Matrix என்று கூறுவர்). இந்த அணியில் m நிரைகளும். n நிரல்களும் உள்ளன. அணி A -இல் i -ஆவது நிரையிலும், j -ஆவது நிரலிலும் வரக்கூடிய எண்ணை (அல்லது மூலகத்தை) a_{ij} என்று குறிப்பிடுவோமானால், $A=\left[a_{ij}\right]$ என்றும் எழுதலாம் அதாவது, ஒரு பொதுவான மூலகத்தின் மூலமும் அணியைக் குறிப்பிடுவதுண்டு.

மேலே கண்ட A என்ற அணியை ஒரு செவ்வக அணி என்றும் கூறுவர். இந்த அணியின் வரிசை $m\ n$ எனப்படும். அதாவது, m நிரைகளும், n நிரல்களும் உள்ள அணியின் வரிசை $m\ n$ என்பதாகும்.

அணியின் வரிசை அல்லது பரிமாணம் (Order of a Matrix): ஒரு அணியில் உள்ள நிரைகள் மற்றும் நிரல்கள் எண்ணிக்கை அந்த அணியின் வரிசை அல்லது பரிமாணமாக வரையறுக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ என்பது (4×3) அணியாகும்.

(ii) $[a\ b\ c]$ என்பது (1×3) அணியாகும்.

(iii) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix}$ என்பது (5×1) அணியாகும்.

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு (3×3) அணியெனப்படும்.

அணி செய்முறைகள் (Matrix operations)

1. அணிகூட்டல் (Matrix Addition)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணிகளின் கூட்டல் பெற ஒரே பரிமாண Order அணிகளாக இருத்தல் அவசியம் ஆகும். முந்தைய அணிகளின் Lead Matrix ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் பிந்தைய அணியின் (lag matrix) ஒத்த மூலகத்துடன் கூட்டி இரண்டு அணிகளின் கூட்டலைப் பெறலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட $A=\left(a_{ij}\right)$ அணியின் பரிமாணம் $(m\times n)$ மற்றும் $B=\left(b_{ij}\right)$ அணியின் பரிமாணம் $m\times n$ எனில் $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$ என்பது $m\times n$ பரிமாண அணியாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 6\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}_{2\times3}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -9\\ -4 & 2 & 7\end{pmatrix}_{2\times3}$ எனில்

$$A+B=\begin{bmatrix}(5+2) & (-4+8) & (6-9)\\ (2-4) & (3+2) & (-1+7)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4 & -3\\ -2 & 5 & 6\end{pmatrix}_{2\times3}$$

2. அணி கழித்தல் (Matrix subtraction)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணிகளின் கழித்தல் பெற அவை ஒரே பரிமாணம் உடையதாக இருத்தல் அவசியமாகும். பிந்தைய அணியின் ஒத்த மூலகத்தினை முந்தைய அணியின் ஒவ்வொரு மூலகத்திலிருந்தும் கழிப்பதன் மூலம் அணி கழித்தலைப் பெறலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட $A=\left(a_{ij}\right)$ அணியின் பரிமாணம் $m\times n$ மற்றும் $B=\left(b_{ij}\right)$ அணியின் பரிமாணம் $m\times n$

எனில் $A-B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)$ என்பது $m\times n$ ஒழுங்கு அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -6 & 4\end{pmatrix}_{2\times2}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}_{2\times2}$

$$A-B=\begin{pmatrix}(2-1) & (5-2)\\ (-6-3) & (4+4)\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -9 & 8\end{pmatrix}$$

3. எண் பெருக்கல்

கொடுக்கப்பட்ட , $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ எனில் $kA=\left(ka_{ij}\right)$ அணியின் பரிமாணம் $m\times n$ ஆகும். எண் பெருக்கலில் அந்த அணியில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தினையும் கொடுக்கப்பட்ட எண் குறியீட்டினால் பெருக்க வேண்டும்.

$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட அணியாகவும், K என்பது ஏதேனும் ஒரு எண்ணியாகவும் இருக்கட்டும். இப்பொழுது, KA என்பது

$\begin{bmatrix} Ka_1 & Kb_1 & Kc_1 \\ Ka_2 & Kb_2 & Kc_2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியாகும்.

அதாவது, A என்ற அணியை K எனும் எண்ணியால் பெருக்கக் கிடைக்கும் அணியைப் பெற, A -இல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் K -ஆல் பெருக்கவேண்டும் என்பது பொருளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ எனில்

$$5A=\begin{pmatrix} 4\times 5 & 5\times 5 \\ 6\times 5 & 7\times 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 30 & 35 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

குறிப்பு :

(1) பொதுவாக, $A=\left[a_{ij}\right]$ எனில் $KA\left[Ka_{ij}\right]$ என்றாகும்.

(2) $K=1$ என்றிட, $(-1)A=\left[-a_{ij}\right]$ என்று பெறலாம். அதாவது $(-A)$ என்பது A-இன் குறை அணி **(Negative of A)** எனப்படும். எனவே, ஒரு அணியின் குறை அணியைப் பெற, கொடுக்கப்பட்ட அணியின் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் *(-1)* ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

(3) $k(A+B) = kA + kB$,

(4) $(k1 + k2)A = k1A + k2A$

(5) $IA = A\ (k1\ k2)A = k1\ (k2A)$

4. அணி சமத்துவம் (Equality of Matrices)

இரண்டு அணிகள் ஒரே பரிமாணம் மற்றும் அவைகளின் ஒத்த மூலகங்கள் சமமானவையாகவும் இருந்தால் மட்டுமே அவை சம அணிகள் எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ மற்றும் $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

ஆகியவற்றில் $A = B$ எனில் அனைத்து i மற்றும் j க்கு $a_{ij} = b_{ij}$

எடுத்துக்காட்டாக, அணி சமத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி நாம் தெரியாத மூலகங்களின் மதிப்பினைப் பெறலாம்.

$$\begin{pmatrix} x & 5 \\ 8 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & Y \\ b & 6 \end{pmatrix}$$

ஆகையால் $X = -4, Y = -5, a = 6, b = 8$

5. அணி நிலைமாற்று அல்லது திருப்பு அணி (Transpose of a Matrix)

ஒரு அணியின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றி கிடைக்கப்பெறும் அணியை கொடுக்கப்பட்ட அணியின் நிரை-நிரல் மாற்று அணி என்று வழங்குகிறோம். A எனும் அணியின் திருப்பு அணியை A' (அல்லது A^t) என்று குறிப்பிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ எனில், $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ என்பதாகும்.

குறிப்பு :

கொடுக்கப்பட்ட $A=\left(a_{ij}\right)m\times n$ பரிமாணம் எனில்,

$A'=\left(a_{ij}\right)n\times m$ பரிமாணம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $A=\begin{pmatrix}3 & -8 & 7\\ 1 & -5 & 6\end{pmatrix}_{2\times 3}$ எனில் $A'=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -8 & -5\\ 7 & 6\end{pmatrix}_{3\times 2}$

(1) A என்பது ஒரு $(m\times n)$ அணி எனில், A^t ஒரு $(n\times m)$ அணியாக இருக்கும்.

(2) $\left(A^t\right)^t=A$ என்பது வரையறையிலிருந்து நன்கு விளங்கும்.

(3) $(KA)^t=KA^t$, K என்பது ஒரு எண்ணி.

6. அணி பெருக்கல் (Matrix Multiplication)

A, B என்பன இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட அணிகளாக இருக்கட்டும். மேலும் A -ல் உள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருந்தால், பின் AB எனும் அணிப் பெருக்கலை வரையறுக்க முடியும். AB எனும் அணிப்பெருக்கல் காணும் முறையைப் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டு மூலம் விளக்குவோம்.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}, \qquad B\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}$$

எனக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது AB எனும் பெருக்கலைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம். அதாவது,

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டாக $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\3 & 5 & 1\end{pmatrix}_{2\times3}$ மற்றும் $B=\begin{pmatrix}7 & 2\\3 & 8\\2 & 9\end{pmatrix}_{3\times2}$

(AB) என்பது ஒத்திருக்கிறது (Conformable) ஏனெனில் A - இல் உள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கை $=B$ - இல் உள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கை . $=3$

$$AB=\begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\3 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 2\\3 & 8\\2 & 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}(4\times7+6\times3+2\times2) & (4\times2+6\times8+2\times9)\\(3\times7+5\times3+1\times2) & (3\times2+5\times8+1\times9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(28+18+4) & (8+48+18)\\(21+15+2) & (6+40+9)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}50 & 74\\38 & 55\end{pmatrix}_{2\times2}$$

இம்முறையை நிரை-நிரல் பெருக்குமுறை என்கிறோம். இங்கு, A - இன் முதல் நிரையிலுள்ள மூலகங்களை, B -இன் முதல் நிரலிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களினால் பெருக்கி வரும் எண்களைக் கூட்ட AB -இன் முதல் மூலகம் கிடைக்கும். இதேபோன்று, A -இன் முதல் நிரை, B -இன் இரண்டாவது நிரல் இவற்றிலுள்ள முறையான மூலகங்களைப் பெருக்கிக் கூட்ட AB -இன் முதல் நிரையின் இரண்டாவது மூலகம் கிடைக்கப்பெறும். இதேபோன்று இன்னபிற மூலகங்களையும் பெறுகிறோம். மேலும், இங்கு A என்பது ஓர் (2×3) அணியாகவும், B என்பது ஓர் (3×2) அணியாகவும், இருப்பதால், AB எனும் பெருக்குத்தொகை ஓர் (2×2) அணியாகக் கிடைக்கின்றது.

பொதுவாக, A என்பது ஓர் $(m\times n)$ அணி என்றும், B என்பது ஓர் $(n\times p)$ அணி என்றும் கொடுக்கப்படின், AB எனும் இவ்விரு அணிகளின் பெருக்குத்தொகையை வரையறுக்க முடியும் என்றும், மற்றும்

AB என்பது ஓர் $(m \times p)$ அணியாக இருக்கும் என்றும் அறிகிறோம். இங்கு பெருக்கலுக்கு, A என்ற அணி B -யுடன் ஒத்துள்ளதாகக் **(A is conformal to B)** கூறுகிறோம்.

குறிப்பு

(1) A,B என்பன ஏதேனும் இரண்டு அணிகளாயின் A,B-ஐ வரையறுக்க முடியாது. A-இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B -இன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருந்தால் தான் A,B -ஐ வரையறுக்கமுடியும் என்று அறியவும்.

(2) AB -ஐ வரையறுக்கும் போது, BA-ஐயும் வரையறுக்க முடியும் என்பதற்கில்லை.

(3) AB -யையும் BA-யையும் வரையறுக்க முடிந்தபோதிலும் AB -ம் BA-ம் சமமாக இருக்க வேண்டியது அவசிய மில்லை. அதாவது, அணிப்பெருக்கல் பரிமாற்று விதிக்குட்படாது.

7. இணை அணி **(Adjoint Matrix)**

அணிக்கோவையின் இணைக்காரணிகளில் **(Cofactors)** இருந்து இந்த அணி பெறப்படுகிறது. இது சதுர அணியில் மட்டுமே சாத்தியம் ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட $A = \left(a_{ij}\right)$ அணியின் ஒழுங்கு , 2×2 எனில்

இணை அணி $A_c^t = \left(\left|C_{ij}\right|\right)'$ இன் ஒழுங்கு $n \times n$ ஆகும்.

$\left|C_{ij}\right|$ என்பது a_{ij} -இன் இணைக்காரணி அகும். $\left|C_{ij}\right|$ என்பது i^{th} வரிசை மற்றும் j^{th} பத்திகளின் இணைக்காரணிகளைக் குறிக்கிறது. இது கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக் கோவையில் i நிரை (வரிசை) மற்றும் j நிரல் (பத்தி) களை நீக்கிப் பொருத்தமான குறியீடுகளை (+ or -) அதனுடன் சேர்ப்பதால் பெறப்படுகிறது. சுருக்கமான இணைக் காரணி $\left|C_{ij}\right|$ என்பது இளைய அணிக் கோவையுடன் $\left(\text{Minor } \left|M_{ij}\right|\right)$ பொருத்தமான குறியீடு சேர்க்கப்பட்டது. இணைக் காரணிக்கான குறியீட்டு விதி என்பது

$$\left|C_{ij}\right| = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}_{3x3}$$

இணைக்காரணிகளின் அணி(A_c)

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (40+18) & -(-16-6) & (6-5) \\ -(32-6) & (24+2) & -(-9-4) \\ (24+10) & -(18-4) & (15+8) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 58 & 22 & 1 \\ -26 & 26 & 13 \\ 34 & -14 & 23 \end{pmatrix}$$

A - இன் இணை அணி

$$= \begin{pmatrix} 58 & 22 & 1 \\ -26 & 26 & 13 \\ 34 & -14 & 23 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 58 & -26 & 34 \\ 22 & 26 & -14 \\ 1 & 13 & 23 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

இது A_c^t அணி எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது.

8. அணியின் அணிக்கோவை (Determinant of a matrix)

ஒரு சதுர அணியிலுள்ள மூலகங்களால் முறையாக அமையப் பெறும் அணிக்கோவையை அந்த அணியின் அணிக்கோவை என்று கூறுகிறோம்.

$A = \left[a_{ij}\right]$ என்ற அணியின் அணிக்கோவையை $|A|$ என்றோ அல்லது $\det\left[a_{ij}\right]$ என்றோ குறிப்பிடுதல் வழக்கமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் அணிக்கோவை $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ என்பதாகும்.

9. அணி எதிர் (Matrix Inverse)

இது சதுர வடிவ அணியில் வரிசை மற்றும் பத்திகளின் எண்ணிக்கை சமமாக உள்ள அணியில் மட்டுமே சாத்தியமாகும். கொடுக்கப்பட்ட $A = \left(a_{ij}\right)$-இன் ஒழுங்கு, $m \times n, (m = n)$ எனில் இதன் எதிர் $\left(A^{-1}\right)$ என குறிக்கப் படுகிறது. இங்கே $AA^{-1} = I = A'A$ ல் I என்பது சர்வசம அணி Identity Matrix . இதன் முதன் மூலை விட்ட எண்கள் ஒன்று ஆகவும் மற்றவை பூச்சியம் ஆகவும் இருக்கும். இணை காரணி முறையைப் பயன்படுத்தி

$A^{-1} = A_c^t / |A|$ எனப் பெற $|A| \neq 0$ என இருக்க வேண்டும்.

A_c^t என்பது இணை அணி . $|A|$ என்பது அணிக்கோவையாகும்.

இணை அணிக்கான எடுத்துக்காட்டில்

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(40+18) - 4(-16-6) - 2(6-5)$$

$$= 3(58) - 4(-22) - 2(1)$$

$$= 174 + 88 - 2 = 260 \neq 0$$

ஆகையால் இணைக்காரணி முறை மூலமாக A^{-1} பெற முடியும்

$A^{-1} = A_c^t / |A|$ முந்தைய எடுத்துக்காட்டிலிருந்து A_c^t க்கு பதிலியிட

$$A^{-1} = 1/260 \begin{pmatrix} 58 & -26 & 34 \\ 22 & 26 & -14 \\ 1 & 13 & 23 \end{pmatrix}$$

எண்கள் முழுமையாக 260 ஆல் வகுபடவில்லை என்றால் அது வெளியில் அப்படியே இருக்கலாம்.

சரிபார்த்தல் :

$$AA^{-1} = 1/260 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 58 & -26 & 34 \\ 22 & 26 & -14 \\ 1 & 13 & 23 \end{pmatrix}$$

$$= 1/260 \begin{pmatrix} (174+88-2) & (-78+104-26) & (102-56-46) \\ (-116+110+6) & (52+130+78) & (-68-70+138) \\ (58-66+8) & (-26-78+104) & (34+42+184) \end{pmatrix}$$

$$= 1/260 \begin{pmatrix} 260 & 0 & 0 \\ 0 & 260 & 0 \\ 0 & 0 & 260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

எனவே பெறப்பட்ட சரியானதாகும்

பல்வகை அணிகள் (Types of Matrices)

1. நிரை,நிரல் அணிகள் (Row and Column Vectors)

நிரை அணி : ஒரே ஒரு நிரையை மட்டுமே உடைய அணி ஒரு நிரை அளவுரு (அல்லது ஒரு நிரை அணி) எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$x = \left(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\right)$$

என்பது ஒரு நிரை அணி எனப்படும்.

நிரல் அணி: ஒரே ஒரு நிரலை மட்டுமே உடைய அணி ஒரு நிரல் அளவுரு (அல்லது ஒரு நிரல் அணி) எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$ என்பது ஒரு நிரல் அணி எனப்படும்.

2. பூச்சிய அணி (Zero or Null Matrix)

ஒரு அணியில் உள்ள எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமாக இருப்பின் அதை ஒரு பூச்சிய அணி என்கிறோம். இது ஒரு செவ்வக அணியாகவோ அல்லது சதுர அணியாகவோ இருக்கக் கூடும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என்பன பூச்சிய அணிகளாகும்.

3. சதுர அணி (Square Matrix)

ஒரு அணியில் உள்ள நிறைகளின் எண்ணிக்கையும், நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின், அந்த அணியை ஒரு சதுர அணி என்று கூறுகிறோம்.

அதாவது, ஒரு சதுர அணி என்பது $(m \times m)$ அணியாகவோ அல்லது $(n \times n)$ அணியாகவோ இருக்கும். இங்கு m (அல்லது n) என்பது சதுர அணியின் வரிசை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ என்பது ஒரு சதுர அணி (3×3) எனப்படும்.

4. சம அணிகள் (Equal Matrices)

இரண்டு அணிகளின் வரிசைகள் சமமாகவும் அவற்றிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களின் மதிப்புகள் சமமாகவும் இருந்தால் அந்த அணிகள் இரண்டும் சமமாக இருப்பதாகக் கூறுகிறோம்.

அதாவது $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$ என்ற அணிகள் ஒரே வரிசையை உடையனவாகவும், $a_{ij}=b_{ij}$, $(i=1,2,\ldots\ldots m, j=1,2,\ldots\ldots n)$ என்றும் இருக்குமானால், பின் $A = B$ என்றும் எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

இங்கு $a_1=x_1$, $a_2=x_2$, $b_1=y_1$ $b_2=y_2$, $c_1=z_1$, $c_2=z_2$ என்றிருக்கும் என்பதை அறியவும்.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{and } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

என்பன சம அணிகளாகும். இங்கு $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ என்றிருக்கும்.

5. முக்கோண அணிகள் (Triangular Matrices)

A எனும் சதுர அணியில், $i>j$ எனும்போது, மூலகங்கள் $a_{ij}=0$ என்றிருந்தாலும்; அல்லது $i<j$ எனும்போது, மூலகங்கள் $a_{ij}=0$ என்றிருந்தாலும், A என்பது ஒரு முக்கோண அணி எனப்படும். மேலும், முதல் நிபந்தனைப்படி அமைந்துள்ள அணியை மேல் முக்கோண அணி (Upper Triangular Matrix), இரண்டாவது நிபந்தனைப்படி அமையும் அணியைக் கீழ் முக்கோண அணி (Lower Triangular Matrix) என்று குறிப்பிட்ட பெயர்களால் அழைப்பதுண்டு. எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ என்பது மேல்முக்கோண அணியாகும்.

(ii) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ என்பது கீழ்முக்கோண அணியாகும்.

6. மூலைவிட்ட அணி (Diagonal Matrix)

ஒரு சதுர அணியின் மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்களைத் தவிர ஏனைய மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமாக இருக்குமானால், அந்த அணியை மூலைவிட்ட அணி என்கிறோம். அதாவது, $D=\left[a_{ij}\right]$ என்னும் அணியில் $i>j$ எனும் போதும், $i<j$ எனும் போதும் $a_{ij}=0$ என்றிருக்குமானால், பின் D என்பது ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகும். எடுத்துக்காட்டாக, பின்வருவன மூலைவிட்ட அணிகளாகும்.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. எண்ணி அணி /அளவு அணி

ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் முதன்மை மூலைவிட்டத்தில் ஒரே மாதிரியான மூலகத்தினையும் மற்றவற்றில் பூச்சியத்தையும் கொண்டுள்ள சதுர அணியாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

என்பன எண்ணி அணிகளாகும்.

7. ஒன்றி அணி (Unit Matrix)

ஒரு சதுர மூலைவிட்ட அணியின் முதன்மை மூலைவிட்டத்திலுள்ள எண்கள் ஒவ்வொன்றும் 1-க்குச் சமமானால், அந்த அணி ஒன்றி அணி என ப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

$I_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்பன ஒன்றி அணிகளாகும்.

குறிப்பு : ஒரு ஒன்றி அணியின் வரிசை n எனில், அதை I_n என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். அணியின் வரிசை தெளிவாகத் தெரியும் போது, ஒன்றி அணியைச் சுருக்கமாக I என்றே குறிப்பிடுவதுண்டு.

8. பூச்சியக்கோவை அணி/ ஒருமை அணி

ஒரு சதுர அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்குமானால், அந்த அணியைப் பூச்சியக்கோவை அணி என்றும், மாறாக, அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமில்லா எண்ணாயின், அந்த அணியைப் பூச்சியமில்லாத கோவை அணி என்றும் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$(i)\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

என்பது ஒரு பூச்சியக்கோவை அணியாகும். ஏனெனில்,

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}$$

$$=1(15-16)-2(10-12)+3(8-9)$$

$$=-1-2(-2)+3(-1)=0$$

$$(ii)\quad X=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

என்பது பூச்சியமில்லாத கோவை அணியாகும். ஏனெனில்,

$$|X|=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=4-15=-11(\neq 0)$$

9. சமச்சீர் அணி (Symmmetric Matrix)

இது $A' = A$ என்றுடைய ஒரு சதுர அணி ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக கொடுக்கப்பட்டுள்ள $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ எனில் . $A' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = A$

10 . Idempotent Matrix

இது ஒரு சதுர அணி A - இல் $A^2 = A \times A = A$ என்பதாக இருக்கும் அணி ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = 1/6 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ எனில்

$$A^2 = 1/36 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1/36 \begin{pmatrix} (1+4+1) & (-2-8-2) & (1+4+1) \\ (-2-8-2) & (4+46+4) & (-2-8-2) \\ (1+4+1) & (-2-8-2) & (1+3+1) \end{pmatrix}$$

$$= 1/36 \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 \\ -12 & 24 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix} = 1/6 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

11. செங்குத்து அணி (Orthogonal Matrix)

இது சதுர அணி A . $AA' = I$ (அல்லது) $A^{-1} = A'$ என இருப்பதாகும்.

அணிகளின் விதிகள் **(Laws of Matrices)**

1. சர்வசம விதிகள் **(Identity Laws)**

$$(i)\ (A')' = A \qquad (ii)\ \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

2. மாற்று விதி **(Communicative Laws)**

$$(i)\ A+B=B+A$$
$$(ii)\ A-B\neq B-A$$
$$(iii)\ AB\neq BA$$

3. சேர்க்கை விதி **(Associative Laws)**

$$(i)\ A+(B+C)=(A+B)+C$$
$$(ii)\ A-(B-C)\neq(A-B)-C$$
$$(iii)\ A(BC)=(AB)C$$

4. பங்கீட்டு விதி **(Distribution Laws)**

$$(i)\ A(B+C)=AB+AC$$
$$(ii)\ A(B-C)=AB-AC$$

5. பலவகைப்பட்ட விதிகள் **(Miscellenous Laws)**

$$(i)\ (A\pm B)' = A' + B'$$
$$(ii)\ (AB)' = B'A'$$
$$(iii)\ (A')^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$$
$$(iv)\ (A\pm B)^{-1} = A^{-1}\pm B^{-1}$$
$$(v)\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ஓர் அணியின் உள் அணிகள் (submatrices) மற்றும் சிற்றணிகள் (minors)

A என்ற ஓர் அணியிலிருந்து அதன் சில நிரைகளையும் நிரல்களையும் தவிர்த்துக் கிடைக்கும் அணிகள் A -இன் உள் அணிகள் ஆகும்.

எ.கா.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ எனில், அதன் சில உள் அணிகள்:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ மற்றும் } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

சதுர உள் அணிகளின் அணிக்கோவைகள் அந்த அணியின் சிற்றணிகள் என்றழைக்கப்படும். A -இன் சிற்றணிகளில் சில:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \text{ மற்றும் } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

அணியின் தரம் (Rank of a matrix)

A என்ற பூச்சிய அணி அல்லாத ஓர் அணியின் $\rho(A)$ என குறிக்கப்படும் தரம் 'r' என்ற மிகை முழு எண்ணாக இருக்க

(i) A-இன் 'r' வரிசையுடைய ஏதேனும் ஒரு சிற்றணியாவது பூச்சியமற்று இருக்க வேண்டும். மேலும்

(ii) $'r'$ வரிசையை விட அதிக வரிசையுடைய A இன் எல்லா சிற்றணிகளும் பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு :

1. A என்ற அணியின் தரம் என்பது அந்த அணியின் பூச்சிய மதிப்பில்லாத சிற்றணிகளின் வரிசைகளில் மீப்பெரு எண் ஆகும்.
2. A இன் வரிசை $m \times n$ எனில் $\rho(A) \le \{m, n$ - களில் சிறிய எண்
3. பூச்சிய அணியின் தரம் பூச்சியமாகும்.
4. பூச்சிய அணி அல்லாத அணி $A -$இன் தரம் $\rho(A) \ge 1$ ஆகும்.
5. $n \times n$ வரிசையுடைய பூச்சியக் கோவை அணி அல்லாத அணியின் தரம் n ஆகும்.
6. $\rho(A) = \rho(A^t)$
7. $\rho(I_2) = 2, \rho(I_3) = 3$

எடுத்துக்காட்டு:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க.

தீர்வு :

A-இன் வரிசை $3 \times 3. \therefore \rho(A) \le 3. A -$ இல் உள்ள ஒரே ஒரு மூன்றாம் வரிசை சிற்றணி

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = -2 \ne 0.$$

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணி பூச்சியமாக இல்லை.

$\therefore \rho(A) = 3$

எடுத்துக்காட்டு:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க.

தீர்வு :

Aஇன் வரிசை 3×3. $\therefore \rho(A) \le 3 . A$ −யில் உள்ள ஒரே ஒரு மூன்றாம் வரிசை சிற்றணி

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$A-$ இல் உள்ள ஒரே ஒரு மூன்றாம் வரிசை உடைய சிற்றணியும் பூச்சியமாக உள்ளது

$\therefore \rho(A) \le 2$

வரிசை இரண்டு உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம்.

அவற்றில் $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \ne 0$

பூச்சியம் அல்லாத இரண்டாம் வரிசை சிற்றணி உள்ளது.

$\therefore \rho(A) = 2.$

எடுத்துக்காட்டு:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 10 \\ -6 & -12 & -15 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க.

தீர்வு :

A-இன் வரிசை $3 \times 3. \therefore \rho(A) \leq 3$

A-இல் உள்ள வரிசை மூன்று உடைய ஒரே ஒரு சிற்றணி

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 10 \\ -6 & -12 & -15 \end{vmatrix} = 0$$

எனவே $\rho(A) \leq 2$

வரிசை இரண்டு உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம். அவை அனைத்தும் பூச்சிய மதிப்புடையன என்பது வெளிப்படை.

$\therefore \rho(A) \leq 1$

A என்பது பூச்சிய அணி அல்ல. $\therefore \rho(A) = 1$

எடுத்துக்காட்டு:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க.

தீர்வு :

Aஇன் வரிசை $2 \times 4. \quad \therefore \rho(A) \leq 2$

வரிசை இரண்டு உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம். அவற்றில்

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

வரிசை இரண்டு உடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது.

$$\therefore \rho(A) = 2$$

எடுத்துக்காட்டு:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 8 & 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க.

தீர்வு :

Aஇன் வரிசை 3×4. $\therefore \rho(A)\le 3$.

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம். அவற்றில்

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 3\\ 8 & 1 & 9\end{vmatrix} = -40 \neq 0$$

வரிசை மூன்று உடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது.

$\therefore \rho(A)=3$.

அளவுரு (Vector) வரைவிலக்கணம்

வரிசைப்படுத்திய $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்னும் n கணியங்களை (Ordered set of quantities) ஒரு n பரிமாண அளவுரு x ன் n கூறுகள் (மூலங்கள்) என்பர். சுருக்கமாக, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ஆகிய n கணியங்களின் தொகுதியை ஒரு n அளவுரு $\therefore$ வெக்டர் (Vector) என்று கூறுவதுண்டு. இந்த n வெக்டர்களை நிரை அளவுரு, நிரல் அளவுரு என இரண்டு வகையாகக் கூறலாம்.

நிரை அளவுரு $x=(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

(அல்லது)

நிரல் அளவுரு $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ x_n\end{bmatrix}$

என்று சூழ்நிலைக்கேற்ப குறிப்பிடுவதுண்டு. இவை இரண்டும் வெவ்வேறு பரிமாணங்கள் கொண்டவை. நிரை அளவுரு x-இன் பரிமாணம் $1\times n$. நிரல் அளவுரு x-இன் பரிமாணம் $(m\times 1)$.

அதாவது, நிரை அளவுரு என்பது ஒரு $(1\times n)$ அணியாகவும் நிரல் அளவுரு என்பது ஒரு $(m\times 1)$ அணியாகவும் இருக்கும்.

நிரை அணி : ஒரே ஒரு நிரையை மட்டுமே உடைய அணி ஒரு நிரை அளவுரு (அல்லது ஒரு நிரை அணி) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு:

1. $A=\left[a_{ij}\right]_{1\times 3}=\begin{bmatrix}1 & -7 & 4\end{bmatrix}$ என்பது 1×3 வரிசை உடைய நிரை அணியாகும்.

2. $B=\left[a_{ij}\right]_{1\times 2}=\begin{bmatrix}2 & 8\end{bmatrix}$ **என்பது** 1×2 வரிசை உடைய நிரை அணியாகும்.

3. $C=\left[a_{ij}\right]_{1\times 1}=[6]$ என்பது 1×1 வரிசை உடைய நிரை அணியாகும்.

நிரல் அணி: ஒரே ஒரு நிரலை மட்டுமே உடைய அணி ஒரு நிரல; அளவுரு (அல்லது ஒரு நிரல் அணி) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு:

1. $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 1}=\begin{bmatrix}2\\3\\-2\end{bmatrix}$, என்பது 3×1 வரிசை உடைய நிரல் அணியாகும்.

2. $B=\left[a_{ij}\right]_{2\times 1}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$, என்பது 2×1 வரிசை உடைய நிரல் அணியாகும்.

3. $C=\left[a_{ij}\right]_{1\times 1}=[6]$, என்பது 1×1 வரிசை உடைய நிரல் அணியாகும்.

குறிப்பு: 1×1 வரிசையைக் கொண்ட அணி நிரை அணியாகவும் நிரல் அணியாகவும் கொள்ளலாம். பூச்சிய அல்லது வெற்று அளவுரு [Zero or null vector] என்பது அந்த அணியில் உள்ள எல்லா மூலகங்களும் (elements) பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

இரு அளவுருக்களின் கூட்டல், கழித்தல் (Vector Addition and Substraction)

x, y ஆகிய இரண்டும் சமபரிமாணமுள்ள அளவுருக்களின் மூலகங்கள் முறையே $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ எனில்,

$$x=[x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n], y=[y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n]$$
$$x \pm y=[x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots\ldots, x_n \pm y_n]$$

எடுத்துக்காட்டு:

$A=\begin{bmatrix}4 & 7 & 8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 9 & 3\end{bmatrix}$ எனில். $C=A-B$, $C=A+B$ காண்க.

தீர்வு: $C=A-B=\begin{bmatrix}4-6 & 7-9 & 8-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 5\end{bmatrix}$

$C=A+B=\begin{bmatrix}4+6 & 7+9 & 8+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 16 & 11\end{bmatrix}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$A=\begin{bmatrix}11\\7\\13\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}14\\10\\81\end{bmatrix}$$ எனில் $C=A+B,\quad C=B+A$

காண்க

தீர்வு:

$$C=A+B=\begin{bmatrix}11\\7\\13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}14\\10\\81\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\17\\94\end{bmatrix},C=B+A=\begin{bmatrix}25\\17\\94\end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\end{pmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3\\0\\9\end{bmatrix}$$ எனில்

$C=A-B$ காண்க.

இருஅளவுருகளும் வெவ்வேறு பரிமாணங்களைக் கொண்டதனால் இந்த அளவுருக்களைக் கழிக்கவோ, கூட்டவோ இயலாது என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

திருப்பு அளவுரு அல்லது நிலை மாற்று அளவுரு (Transpose of a vector)

ஒரு கொடுக்கப்பட்ட அளவுரு A-இன் நிரையை நிரலாகவும், நிரலை நிரையாகவும் மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படும் அளவுரு திருப்பு அளவுரு அல்லது நிலைமாற்று அளவுரு எனப்படும். இது A அல்லது A^T எனக் குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$A = (3 \quad 4 \quad 5), \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$ எனில் A', B' காண்க

தீர்வு:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B' = [4 \quad 5 \quad 7]$$

ஒரு அளவுருவை K என்ற மாறிலி எண்ணியால் (Constant Scalar) பெருக்குதல் (Multiply a vector by a scalar)

A என்ற அளவுருவை K எனும் எண்ணியால் பெருக்கக் கிடைக்கும் அளவுருவைப் பெற, A-இல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் கொடுக்கப்பட்ட K- வால் பெருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$A = [2 \quad 3 \quad 5]$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட அளவுரு எனவும் K என்பது ஏதேனும் ஒரு எண்ணியாகவும் இருக்கட்டும். இப்பொழுது KA என்பது.

தீர்வு:

$KA = [K2 \quad K3 \quad K5]$ என்ற நிரை அளவுரு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$K = 4, \quad A = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$ எனில் KA கண்டுபிடி.

$$KA = \begin{bmatrix} 20 \\ 24 \\ 32 \end{bmatrix}$$ என்ற நிரல் அளவுரு ஆகும்.

அதாவது, A என்ற அளவுருவில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் 4 என்ற எண்ணினால் பெருக்க வேண்டும். பொதுவாக $A=\left[a_{ij}\right]$ எனில் $KA=\left[Ka_{ij}\right]$ என்றாகும்.

இரு அளவுருவுகளின் பெருக்கல் (Multiplicaton of Two Vectors)

A, B என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு அளவுருவுகளாக இருக்கட்டும். A, B அளவுருகளில் A-இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் B-இன் நிரை களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருந்தால் AB எனும் அளவுருவை வரையறுக்க முடியும். அதாவது,

$$A_{1\times n}\ \ B_{m\times 1}=AB_{1\times 1}, \qquad [\because m=n]$$

AB எனும் அளவுரு பெருக்கலைப் பின் வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

$A_{1\times 2}=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$, $B_{2\times 1}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ எனில் AB காண்க.

தீர்வு:

இப்பொழுது AB என்ற பெருக்கலைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம். அதாவது,

$$AB=\begin{bmatrix}3\times 4 & + & 2\times 5\end{bmatrix}=12+10=22$$

இம்முறையை நிரை-நிரல் பெருக்குமுறை என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு:

$B=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$ எனில் BA காண்க

தீர்வு: $BA=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}_{2\times 1}\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}_{1\times 2}=\begin{bmatrix}12 & 8\\15 & 10\end{bmatrix}_{2\times 2}$

இங்கு BA-இன் பரிமாணம் 2×2 என்பது தெளிவு. இங்கு முதல் எண்ணானது முதல் அளவுரு A-இன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையையும் இரண்டாவது எண்ணானது, இரண்டாம் அளவுரு B-இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு:

$A_{3\times 1}=\begin{bmatrix}4\\3\\6\end{bmatrix}, B_{1\times 3}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 8\end{bmatrix}$ எனில் AB, BA கண்டுபிடி.

தீர்வு:

$$AB=\begin{bmatrix}4\times 2 & 4\times 5 & 4\times 8\\ 3\times 2 & 3\times 5 & 3\times 8\\ 6\times 2 & 6\times 5 & 6\times 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 20 & 32\\ 6 & 15 & 24\\ 12 & 30 & 48\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}BA&=\begin{bmatrix}2 & 5 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\\6\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2\times 4+5\times 3+8\times 6\end{bmatrix}\\ &=8+15+48\\ &=71\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு:

$A=\begin{bmatrix}3 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 4\end{bmatrix}$ எனில், AB காண்க.

தீர்வு:

A- இன் பரிமாணம் 1×2, B-இன் பரிமாணம் 1×2.

A-இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை, B-இன் நிரையின் எண்ணிக்கை சமமில்லையாதலால் இரண்டு அளவுருவுகளையும் பெருக்க முடியாது என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

குறிப்பு

1. AB என்பன ஏதேனும் இரண்டு அளவுருவுகளாயின் AB ஐ· வரையறுக்க முடியாது. A-இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B -இன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருந்தால்தான் ABஐ வரையறுக்க முடியும் என்பதை அறியவும்.

2. ABஐ வரையறுக்கும்போது BA ஐ வரையறுக்க முடியும் என்பதிற்கில்லை

3. BA யையும் BAயையும் வரையறுக்க முடிந்த போதிலும் AB யும் BA யும் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

ஒரு படித் (நேரியல்) தொடர்பிலா அளவுருவுகள் (Linearly Independent Vectors)

$x_1, x_2, ..., x_m$ என்பவை m வேறுபட்ட (Distinct) ஆனால் அதே பரிமாணம் (Same Dimension) உள்ள அளவுருவுகளைக் குறிக்கட்டும்.

$$K_1x_1 + K_2x_2 + ... + K_m x_m = 0$$

என்ற சமன்பாடு சமனடைவதற்கு $K_1, K_2, ..., K_m$ ஆகிய எல்லா எண்ணிகளுக்கும் பூச்சியம் (zero) தவிர வேறு மதிப்புகள் இருக்க முடியாததென்றால் (அதாவது $K_1 = K_2 = K_3 = ... = 0$) $x_1, x_2, ..., x_m$ ஆகிய அளவுருவுகளை ஒருபடித் (நேரியல்) தொடர்பிலா (Linearly Independent) அளவுருவுகள் என்று கூறுவர்.

ஆனால், அந்த . $K_1, K_2, ..., K_m$ ஆகியவற்றில் குறைந்தது ஒரு எண்ணிக்கைக்காவது பூச்சியமல்லாத வேறு மதிப்பு இருக்க முடியும் என்றால் $x_1, x_2, ..., x_m$ ஆகிய அளவுருவுகளுக்கு ஒருபடித் (நேரியல்) தொடர்புடைய (Linearly DependnetVectors) அளவுருவுகள் என்று கூறுவர்.

அணிக்கோவைகள் (Determinants)

இரண்டு நிலைக்குத்துக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட ஒரு சதுர அமைப்பில் வரிசையாக அமைந்துள்ள எண்கள் ஓர் அணிக்கோவைகள் எனப்படும். ஒவ்வோர் எண்ணும் அணிக்கோவையின் மூலகம் (Element) எனப்படும். அதாவது,

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

என்பன அணிக்கோவைகள் எனப்படும். ((1)-ல் $2^2 = 4$ மூலகங்களும்,(2)-இல் $3^2 = 9$ மூலகங்களும் உள்ளன என்பதை அறியவும்).

இங்கு எடுத்துக்காட்டு (1) -இல் a_1, b_1 எனும் எண்களும், a_2, b_2 எனும் எண்களும் நிரைகளை (Rows) உண்டாக்குவதாகவும், a_1, a_2 என்பனவும், b_1, b_2 என்பனவும் நிரல்களை (Columns) உண்டாக்குவதாகவும் கூறப்படும். இவ்வாறு, (1)-இல் இரண்டு நிரைகளும், இரண்டு நிரல்களும் உள்ளன. ஆகையால், இதை வரிசை எண் இரண்டு என்றுள்ள ஓர் அணிக்கோவை என்று (A Determinant of the second order) அழைக்கிறோம்.

இதேபோன்று, (2)-இல் உள்ளது, வரிசை எண் மூன்று என்றுள்ள அணிக்கோவை எனப்படும். ஏனெனில், இங்கு 3 நிரைகளும், 3 நிரல்களும் உள்ளன.

பொதுவாக n^2 எண்களை இரண்டு நிலைக்குத்துக் கோடுகளுக்கிடையே அமைந்துள்ள n நிரைகளாலும், n நிரல்களாலும் குறிப்பிடுவோமானால், வரிசை எண் n என்றுள்ள ஓர் அணிக் கோவை கிடைக்கப்பெறும்.

இவ்வாறு,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

என்பது n-ஐ வரிசை எண்ணாக உடைய ஓர் அணிக்கோவையாகும் (nth order determinant).

அணிக்கோவையை விரித்தெழுதுதல்

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

எனும் அணிக்கோவை $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$ என்ற கோவையைக் குறிப்பதாகக் கொள்கிறோம்.

அதாவது, $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$ எனும் கோவையைக் குறிப்பிடப் பயன்படும் ஒரு சுருங்கிய முறைதான் அணிக்கோவை என்பது நன்கு விளங்கும்.

அடுத்து, 3-ஐ வரிசை எண்ணாக உடைய அணிக்கோவையின் விரிவு பின் வருமாறு:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right)$$

$$+a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right)$$

இவ்விரிவு முதல் நிரையிலுள்ள மூலகங்களாகிய a_{11}, a_{12}, a_{13} ஆகியவற்றின் மூலம் கிடைக்கப்பெற்றுள்ளது. இங்குக் குறிப்பிட்ட மூலகம் உள்ள நிரையையும், நிரலையும் நீக்கக் கிடைக்கும் 2-ஐ வரிசை எண்ணாக உடைய அணிக்கோவைதான், அந்த மூலகத்தின் குணகமாக அமைந்துள்ளது. மேலும், இவ்வாறு விரித்தெழுதும்போது முதல் உறுப்பிற்கு மிகை அடையாளமும், அடுத்த உறுப்பிற்குக் குறை அடையாளமும் மூன்றாவது உறுப்பிற்கு மீண்டும் மிகை அடையாளமும் கொள்ள வேண்டும். அதாவது, முதலில் மிகை அடையாளத்தில் ஆரம்பித்து, அடுத்தடுத்து அடையாளங்களை மாற்றி அமைக்கவேண்டும் என்பதை நன்கு கவனிக்க வேண்டும்.

இதே முறையில் முதல் நிரலில் உள்ள a_{11}, a_{12}, a_{13} எனும் மூலகங்கள் வழியாகவும் அணிக்கோவையின் விரிவைப் பெறலாம் என்பதை அறியவும். இவ்வாறு பெறப்படும் விரிவின் மதிப்பும், முதலில் கிடைத்த விரிவின் மதிப்பிற்குச் சமமாக இருக்கும்.

பொதுவாக, எந்த வரிசை எண்ணையும் உடைய அணிக் கோவையின் விரிவையும் இம்முறையைப் பின்பற்றி எழுத முடியும்.

மேலே கண்ட விரிவில் உள்ள a_{11}, a_{12}, a_{13} -இன் குணகத்தை , $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ மூலகம் -இன் சிற்றணிக்கோவை (Minor) என்கிறோம். அதாவது, ஒரு கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையிலிருந்து, குறிப்பிட்ட மூலகம் உள்ள நிரையையும், நிரலையும் நீக்கக்கிடைக்கும் அணிக்கோவை அம்மூலகத்தின் சிற்றணிக்கோவை எனப்படும். a_{11} என்ற மூலகத்தின் சிற்றணிக்கோவை a_{11} என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கமாகும். இவ்வாறு,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவை எனில்,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ என்பதாகும்.

எனவே, அணிக்கோவையின் விரிவைப் பின்வருமாறு எழுதக் கூடும்.

. $\Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$ மேலும்,
$\Delta = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$ என்றும் எழுதலாம்.

இணைக்காரணிகள்

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவை எனில் $\Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$ என்று நமக்குத் தெரியும். இவ்விரிவை,

$\Delta = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$ என்று கொள்வோமானால், பின் $C_{13} = M_{13}$, $C_{12} = -M_{12}$, $C_{13} = M_{13}$ என்று கண்டுகொள்ளலாம்.

இங்கு C_{11}, C_{12}, C_{13} என்பன முறையே a_{11}, a_{12}, a_{13} எனும் மூலகங்களின் இணைக் காரணிகள் (Cofactors) என்று கூறப்படும்.

ஓர் அணிக் கோவையிலுள்ள மூலகங்களின் சிற்றணிக் கோவைகளும், இணைக் காரணிகளும் அம் மூலகங்களின் நிலைகளைப் பொறுத்து, அடையாளத்தில் மட்டும் மாறுபடும் என்பதையும், மற்றும் அவற்றின் மதிப்புகள் எண்ணளவில் சமமாக இருக்கும் என்பதையும் கவனிக்கவும்.

இவ்வாறு,

$\Delta = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$ என்றோ, அல்லது,

$\Delta = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$ என்றோ, இருக்கும் என்பதை நன்கு கவனிக்க வேண்டும்.

இதேபோன்று, எந்த ஒரு நிரையிலும் (நிரலிலும்) உள்ள மூலகங்களின் இணைக்காரணிகள் மூலமும், அணிக்கோவையின் மதிப்பைப் பெறலாம் என்பது நன்கு விளங்கும்.

குறிப்பு

எந்த ஒரு நிரையிலும் (நிரலிலும்) உள்ள மூலகங்களை, வேறு ஏதேனும் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒத்த மூலகங்களின் இணைக்காரணிகளினால் முறையாகப் பெருக்கி, அவற்றைக் கூட்டக் கிடைக்கும் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

அதாவது, $a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} = 0$ என்பது உண்மையாகும். ஏனெனில்

$$
\begin{aligned}
& a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} \\
&= a_{11}(-M_{21}) + a_{12}(M_{22}) + a_{13}(-M_{23}) \\
&= -a_{11}[a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}] + a_{12}[a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}] - a_{13}[a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}] \\
&= -a_{11}a_{12}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{31}a_{31} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{31}a_{12} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

இதேபோன்று, என்றும், இன்ன பிற முடிவுகளையும் நிறுவலாம்.

லாப்லாஸ் விரிவு (Laplace expansion)

இணைக் காரணிகளின் மூலமாக அணிக்கோவைகளின் மதிப்பைக் கணக்கிடும் முறையே லாப்லாஸ் விரிவு முறையாகும். பொதுவாக ஒரு அணிக் கோவை தனி எண்ணில் குறிப்பிடப்படுகிறது. இது இரண்டு அல்லது அதிக பெருக்கல்களுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு ஆகும்.

இரண்டாம் வரிசை $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

தீர்வுக் கூறு என்பது இரண்டு மூலைவிட்ட பகுதிகளுக்கிடையில் உள்ள மூலகங்களின் **(Elements)** பெருக்கங்களின் வேறுபாடு (முக்கிய மூலைவிட்டப் பெருக்கல் - பகுதி மூலை விட்டப் பெருக்கல்) $= ad - bc$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

கீழ்க் கண்ட அணிக் கோவையை மதிப்பிடு.

$$\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12\times3-6\times5=36-30=6$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -5\times8-(-7)\times4=-40+28=-12$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 9\times-1-(-6)\times3=-9+18=9$$

$$\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 10\times8-(-5)\times6=80+30=110$$

மூன்றாம் வரிசை அணிக்கோவையின் மதிப்பைப் பெற லாப்லாஸ் முறையைப் பயன்படுத்தி

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}|$$

$$= a_{11}(a_{22}a_3 - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

அணிக்கோவை மதிப்பைப் பெற மூன்று தனிப்பட்ட வரிசை (நிரை) மூலகங்களுக்கும் **(Row elements)** மூன்று தனிப்பட்ட பத்தி (நிரல்) மூலகங்களுக்கும் **(Column elements)** இடையிலான பெருக்கல்களின் வேறு பாடுகளைக் கணக்கிட வேண்டும். அதே போல் எந்த வரிசை **(Row)** அல்லது பத்தி **(Column)** மூலமாகவும் அவற்றின் இணைக்காரணிகளின் அடிப்படையில் அணிக்கோவையின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் **A**-இன் முதல் வரிசையின் மூலகங்கள் அதனுடைய இணைக் காரணிகளால் பெருக்கப்படுகின்றன. அதே போல் **A**-இன் இரண்டாம் வரிசையின் மூலகங்கள் மூலம் நாம் **A**-இன் அணிக்கோவையைப் பெறமுடியும்.

$$|A| = a_{21}|C_{21}| + a_{22}|C_{22}| + a_{23}|C_{23}|$$

மூன்றாம் வரிசையின் மூலகங்களைப் பயன்படுத்தி

$$|A| = a_{31}|C_{31}| + a_{32}|C_{32}| + a_{33}|C_{33}|$$

அப்படியில்லாமல், எந்த ஒரு வரிசை அல்லது பத்தியின் மூலகங்களை இணைக் காரணிகளைக் கொண்டு பெருக்குவோமானால் அதன் மதிப்பு பூச்சியம் ஆகும்.

ஆகவே, $a_{11}|C_{21}| + a_{12}|C_{22}| + a_{13}|C_{23}| = 0.$

குறிப்பு: ஒரு வரிசை அல்லது பத்தியைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் அணிக் கோவைகள் மதிப்பிடப்படுகின்றன. பூச்சியம் மூலகங்கள் உள்ள வரிசை அல்லது பத்தியைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் கணக்கிடுதல் எளிதாக்கப்படுகிறது. இணைக் காரணிகளுக்குப் பொருத்தமான குறியீட்டைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்காகப் பின்வரும் முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

இப்படியாக அணிக்கோவையில் குறியீடுகளை மாற்றியமைத்து குறியீட்டை மிக உயர்ந்த பகுதி அல்லது மிகக் கீழுள்ள பகுதியில் சேர்க்க வேண்டும்.

அணிப் பெருக்கலைப் பயன்படுத்தி இந்த அமைப்பை அணி வடிவத்தில் மாற்றி எழுத முடியும். முதல் சமன்பாட்டின் குணகங்களை முதல் வரிசையிலும், இரண்டாவது சமன்பாட்டின் குணகங்களை இரண்டாவது வரிசையிலும், மூன்றாவது சமன்பாட்டின் அணிக்குணகத்திலும் அல்லது மாறிகளின் குணகங்களைப் பத்தியிலும் எழுத நாம் பெறுவது.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

அணிக்குணகம் , $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ தெரியாத வெக்டர்

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

மற்றும் $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

எனப்பதிலிட கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு $AX = B$ என அணி வடிவில் குறைக்கப்படுகிறது. A^{-1} ஆல் இரண்டு பக்கமும் முன் பெருக்கலிட நாம் $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ எனப் பெறுகிறோம்.

ஆகையால் . $X = A^{-1}B$ ஏனெனில் $A^{-1}\ A = I$ மற்றும் அதன் அமைப்பு ஒத்த தீர்வைக் கொண்டிருக்கும். எதிர் அணி கணக்கிட இணைக் காரணி முறை அல்லது கிராமரின விதியை **(Cramer's Rule)** பயன்படுத்தலாம்.

அணிக்கோவையின் உறுப்புகளின் சிற்றணிகள் மற்றும் இணைக்காரணிகள்

சிற்றணிருகோவை மற்றும் இணைக் காரணி (Minors and Co-factors)

A என்ற அணிக்கோவையின் a_{ij} என்ற உறுப்பின் சிற்றணி (minor) என்பது A-இல் இருந்து a_{ij} ள்ள நிரை, நிரல்களை விடுத்துப் பெறப்படும் அணிக்கோவை ஆகும். அதை M_{ij} எனக் குறிப்போம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக் கோவையில் $|C_{ij}|$ என்பது i^{th} வரிசை மற்றும் j^{th} பத்தி நீக்கப்பட்டு பொருத்தமான குறியீடுகளை $(+ \text{ or } -)$ உடைய இணைக்காரணி ஆகும். சுருக்கமாக $|C_{ij}|$ என்றது இணைக்காரணியானது $|M_{ij}|$ என்னும் சிற்றணிக்கோவையில் பொருத்தமான குறியீடுகள் சேர்த்து பெறப்படுகிறது. இணைக்காரணியின் குறியீட்டுக்கான விதி $|C_{ij}| = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{2\times 2}$ என்ற அணிக்கோவையின் உறுப்புகளின் சிற்றணிகள் மற்றும் இணைக்காரனிகளைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக்கோவையில் $|M_{ij}|$ என்பது i^{th} வரிசை மற்றும் j^{th} பத்தி நீக்கப்படுவதன் மூலம் பெறப்படும் சிற்றணிக்கோவை ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக்கோவை, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ எனில்

a_{11} என்ற உறுப்பின் சிற்றணி (minor) என்பது, $M_{11} = a_{22}$

a_{12} என்ற உறுப்பின் சிற்றணி (minor) என்பது, $M_{12} = a_{21}$

a_{21} என்ற உறுப்பின் சிற்றணி (minor) என்பது, $M_{12} = a_{12}$

a_{22} என்ற உறுப்பின் சிற்றணி (minor) என்பது, $M_{11} = a_{11}$

$\therefore\ M_{11} = a_{22}\ \ M_{12} = a_{21},\ M_{12} = a_{21},\ M_{22} = a_{11}$

மேலும்

a_{11} என்ற உறுப்பின் இணைக்காரணி (Cofactor) என்பது, $C_{11} = a_{22}$

a_{12} என்ற உறுப்பின் இணைக்காரணி (Cofactor) என்பது, $C_{12} = -a_{21}$

a_{21} என்ற உறுப்பின் இணைக்காரணி (Cofactor) என்பது, $C_{12} = -a_{12}$

a_{22} என்ற உறுப்பின் இணைக்காரணி (Cofactor) என்பது, $C_{11} = a_{11}$

$\therefore\ C_{11} = a_{22}\ ,\ C_{12} = -a_{21}\ ,\ C_{21} = -a_{12}\ ,\ C_{22} = a_{11}$

எடுத்துக்காட்டு:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் உறுப்புகளின்

சிற்றணிகள் மற்றும் இணைக் காரணிகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவையில்

$|M_{11}| = a_{11}$ = இன் சிற்றணிக்கோவை $= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|M_{12}| = a_{12}$ = இன் சிற்றணிக்கோவை $= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|M_{13}| = a_{13}$ = இன் சிற்றணிக்கோவை $= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$|M_{21}| = a_{21}$ = இன் சிற்றணிக்கோவை $= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|M_{22}| = a_{22}$ = இன் சிற்றணிக்கோவை $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|M_{23}| = a_{23}$ = இன் சிற்றணிக்கோவை $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$|M_{31}| = a_{31}$ = இன் சிற்றணிக்கோவை $= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|M_{32}| = a_{32}$ = இன் சிற்றணிக்கோவை $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

$|M_{33}| = a_{33}$ = இன் சிற்றணிக்கோவை $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

M_{ij} என்பது a_{ij} -இன் சிற்றணி எனில் a_{ij} இன் இணைக்காரணி (cofactor) C_{ij} என்பது கீழ்குகண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

இணைக்காரணியின் குறியீட்டுக்கான விதி $|C_{ij}| = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ ஆகும்.

$i+j$ இரட்டைப்படை எண் எனில் $C_{ij} = M_{ij}$

$i+j$ ஒற்றைப்படை எண் எனில் $C_{ij} = -M_{ij}$,

இவற்றின் கீழாக எழுதப்பட்ட குறிப்பீடுகளின் கூட்டுத்தொகை ஒற்றைப்படை எண் எனில் $|C_{ij}| = -|M_{ij}|$ இவை (-1) -இன் ஒற்றை அடுக்குக் குறியீடு காரணமாக எதிர்மறை எண்ணாக உள்ளது. மாறாக, இவற்றின் கீழாக எழுதப்பட்ட குறியீடுகளின் கூட்டுத்தொகை இரட்டைப்படை எண் எனில் $|C_{ij}| = |M_{ij}|$ இவை (-1)-இன் இரட்டை அடுக்கு காரணமாக நேர்மறை எண்ணாக உள்ளது. அதாவது இணைக்காரணிகள், குறியிடப்பட்ட சிற்றணிகள் ஆகும்.

M_{ij} என்பது a_{ij} இன் சிற்றணி எனில் a_{ij} -இன் இணைக்காரணி (cofactor) C_{ij} என்பது கீழக்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$|C_{11}| = a_{11}$ -இன் இணைக்காரணி $= (-1)^{1+1} |M_{11}| = +|M_{11}|$

$|C_{12}| = a_{12}$ -இன் இணைக்காரணி $= (-1)^{1+2} |M_{12}| = -|M_{12}|$

$|C_{13}| = a_{13}$ -இன் இணைக்காரணி $= (-1)^{1+3} |M_{13}| = +|M_{13}|$

$|C_{21}| = a_{21}$ -இன் இணைக்காரணி $= (-1)^{2+1} |M_{21}| = -|M_{21}|$

$|C_{22}| = a_{22}$ -இன் இணைக்காரணி $= (-1)^{2+2} |M_{22}| = +|M_{22}|$

$$|C_{23}| = a_{23} \text{ -இன் இணைக்காரணி} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -|M_{23}|$$

$$|C_{31}| = a_{31} \text{ -இன் இணைக்காரணி} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = +|M_{31}|$$

$$|C_{32}| = a_{32} \text{ -இன் இணைக்காரணி} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -|M_{32}|$$

$$|C_{33}| = a_{33} \text{ -இன் சிற்றணிக்கோவை} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = +|M_{33}|$$

சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி (Adjoint of a square matrix)

A என்ற சதுர அணியின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அணிக்கோவை A இல் அந்த உறுப்பின் இணைக் காரணியால் பதிலீடு செய்து பெறப்படும் அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி, A சேர்ப்பு அணி ஆகும். அதனை Adj A என்று குறிப்போம்.

அதாவது, Adj A $= A_c^t$

குறிப்பு :

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ எனில், $A_c = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$\therefore AdjA = A_c^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

எனவே $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற 2×2 சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணியை

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ என உடனடியாக எழுதலாம்.

2. $AdjI = I$, இதில் I என்பது ஓரலகு அணி.

3. $A(AdjA) = (AdjA)A = |A|I$

4. $Adj(AB) = (AdjB)(AdjA)$

5. A என்பது வரிசை 2 உடைய சதுர அணியெனில், $|AdjA| = |A|$

A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணியெனில், $|AdjA| = |A|^2$

எடுத்துக்காட்டு:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியை எழுதவும்.

தீர்வு:

$$\text{AdjA} = A_c' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியைக் (Adjoint matrix) காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{எனில்},$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\therefore A_c = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

எனவே, $AdjA = A_c^t$

$$A_c^t = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ஓர் அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a matrix)

பூச்சியக் கோவை அணியாக இல்லாத அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a non-singular matrix).

A என்ற பூச்சியக்கோவை அணியாக இல்லாத அணியின் நேர்மாறு அணி என்பது $AB = BA = I$ என அமையும் B என்ற அணி ஆகும். B ஐ A^{-1} எனக் குறிப்போம்.

குறிப்பு :

1. சதுர அணி அல்லாத அணிக்கு நேர்மாறு கிடையாது.
2. $|A| \neq 0$ என இருந்தால் மட்டுமே A என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இருக்கும். அதாவது A ஒரு பூச்சியக் கோவை அணி எனில் A^{-1} கிடையாது.
3. B என்பது A இன் நேர்மாறு எனில் A என்பது B-இன் நேர் மாறு ஆகும். அதாவது $B = A^{-1}$ எனில் $A = B^{-1}$ ஆகும்.
4. $AA^{-1} = I$

5. ஓர் அணிக்கு நேர்மாறு இருக்குமானால் அது ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும். அதாவது எந்த அணிக்கும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்மாறுகள் இருக்காது.

6. A^{-1} இன் வரிசையும் A-இன் வரிசையும் சமமாக இருக்கும்.

7. $I^{-1} = I$

8. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, (நேர்மாறுகள் இருக்குமானால்)

9. $A^2 = I$ எனில் $A^{-1} = A$ ஆகும்.

10. $AB = C$ எனில்

(a) $A = CB^{-1}$ (b) $B = A^{-1}C$, (நேர் மாறுகள் இருக்குமானால்)

11. $A(AdjA) = (AdjA)A = |A|I$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$$\therefore A\frac{1}{|A|}(AdjA) = \frac{1}{|A|}(AdjA)A = I \quad (\because |A| \neq 0)$$

எனவே, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(AdjA)$. அதாவது, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A_c^t$

12. 2×2 வரிசையுடைய $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற சதுர அணியின் நேர்மாறு:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, |A| = ad - bc \neq 0$ என்க.

எனவே, $A_c = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, A_c^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\therefore 2\times 2$ வரிசையுடைய $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற சதுர அணியின் நேர்மாறு

$ad-bc\neq 0$ எனில், $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$ என்று உடனடியாக எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, என்ற அணிக்கு நேர்மாறு அணி இருக்குமானால் அதனைக் காண்க.

தீர்வு:

$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \therefore A^{-1}$ உள்ளது.

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு:

(i) $A=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ (ii) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு நேர்மாறு அணிகள் கிடையாது எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

(i) $|A|=\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}=0 \quad \therefore A^{-1}$ கிடையாது.

(ii) $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix}=0 \quad \therefore A^{-1}$ கிடையாது.

எடுத்துக்காட்டு:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இருக்குமானால்,

அதனைக் காண்க.

தீர்வு:

$$|A| = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 15 \neq 0 \therefore A^{-1}$$ உள்ளது.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_c^t$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 10, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

எனவே,

$$A_c = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 10 & -8 & 1 \\ -5 & 10 & -5 \end{pmatrix},$$

$$A_c^t = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 7 & -8 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 7 & -8 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு :

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\frac{1}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17}\\ \frac{8}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{9}{17}\\ \frac{10}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{7}{17}\end{pmatrix},$$ என்ற அணிகள்

ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும் என்று காட்டுக.

தீர்வு :

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17}\\ \frac{8}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{9}{17}\\ \frac{10}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{7}{17}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{17}\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 8 & 6 & -9\\ 10 & -1 & -7\end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}17 & 0 & 0\\ 0 & 17 & 0\\ 0 & 0 & 17\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

A மற்றும் B சதுர அணிகளாகவும் $AB=I$ என்றும் இருப்பதால் அவை ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. $\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 2\end{bmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாற்று அணியைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{i.e., } |A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=3(0-2)-1(4-10)+1(2-0)$$

$$=2$$

மேலும்,

$$C_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=(0-2)=-2$$

$$C_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=-(4-10)=6$$

$$C_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=(2-0)=2$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(2-1)=-1$$

$$C_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=(6-5)=1$$

$$C_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-(3-5)=2$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (2-0) = 2$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(6-2) = -4$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (0-2) = -2$$

$$A_c = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

எனவே, $A_c^t = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

இப்பொழுது, A - இன் நேர்மாறு அணி, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\mathrm{A}_c^t\right)$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

அணிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணல் (Solutions by matrix method)

எடுத்துக்காட்டு:

$2x - y = 3, 5x + y = 4$ என்ற சமன்பாடுகளை அணிமுறையில் தீர்க்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணிவடிவம்

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

$$A_c^t = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

இணைக்காரணி முறையில்,

$$A^{-1} = \frac{A_c^t}{|A|} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A| \neq 0,$ எனும் போது $AX = B$ என்ற சமன்பாடுகளின் ஒரே தீர்வு $X = A^{-1}B$ ஆகும்.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = 1, y = -1$$

எடுத்துக்காட்டு

அணி எதிர் முறையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட அமைப்புக்குத் தீர்வு காண்.

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$3x + y + 2z = 11$$

$$2x + 3y + z = 11$$

தீர்வு:

இங்கு $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$

என்று நாம் எடுத்துக்கொள்வோம். பின், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகள் கீழ்க்காணும் அமைப்பை ஏற்கும்.

இப்பொழுது,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1-6) - 2(3-4) + 3(9-2)$$

$$= 18 \neq 0$$

இணைக்காரணிகள்:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1-6) = -5$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (9-2) = 7$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-9) = 7$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-6) = -5$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2-9) = 7$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1-6) = -5$$

இங்கு, $A_c = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A_c^t = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

A -இன் நேர்மாறு அணி, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_c^t\right)$ எனவே,

$$\frac{1}{18} = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{-5}{18} \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது சமன்பாடு $AX = B$ -லிருந்து, $X = A^{-1}B$ என்று பெற முடியும்.

$$i.e., \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{-5}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{-5\times14+7\times11+1\times11}{18} \\ \frac{1\times4-5\times11+7\times11}{18} \\ \frac{7\times14+1\times11-5\times11}{18} \end{bmatrix} = i.e \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ஆகையால், $x = 1, y = 2, z = 3$ என்று கிடைக்கின்றது.

சரிபார்த்தல்:

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$3x + y + 2z = 11$$

$$2x + 3y + z = 11$$

முதல் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,

$$[x + 2y + 3z = 14], LHS = 1 + 4 + 9 = 14 = RHS$$

இரண்டாவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,

$$[3x + y + 2z = 11], LHS = 3 + 2 + 6 = 11 = RHS$$

மூன்றாவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,

$$[2x + 3y + z = 11], LHS = 2 + 6 + 3 = 11 = RHS$$

எடுத்துக்காட்டு:

$2x + 8y + 5z = 5, x + y + z = -2, x + 2y - z = 2$ என்ற சமன்பாடுகளை அணிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

சமன்பாடுகளின் ஒரே தீர்வு $X = A^{-1}B$ ஆகும்.

இணைக்காரணிகள்

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1-2) = -3$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-1) = 1$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-8-10) = 18$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2-5) = -7$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-8) = 4$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (8-5) = 3$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-5) = 3$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-8) = -6$$

$$A_c = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 18 & -7 & 4 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_c^t = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

இப்போது A^{-1} ஐக் காண்போம். A இன் நேர்மாறு அணி,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_c^t\right)$$

எனவே,

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -45 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} ie., \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x = -3, y = 2, z = -1$

எடுத்துக்காட்டு:

அணி எதிர் முறையில் தீர்வு பெற்று உனது முடிவைச் சரி பார்.

$$\begin{aligned} 2X + 4Y - Z &= 52 \\ -X + 5Y + 3Z &= 72 \\ 3X - 7Y + 2Z &= 10 \end{aligned}$$

அணி வடிவில் மாற்றியமைத்தால்

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 72 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

இங்கே அணிக்குணகம் $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$

முதல் வரிசை மூலமாக விரிவுபடுத்த

$$=2\begin{vmatrix}5 & 3\\-7 & 2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-1 & 3\\3 & 2\end{vmatrix}+[-1]\begin{vmatrix}-1 & 5\\3 & -7\end{vmatrix}$$

$$=2(10+21)-4(-2-9)-1(7-15)$$

$$=62+44+8=114\neq 0$$

இணைக்காரணி முறையில் A -இன் நேர்மாறு அணி,

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A_c^t\right)$ எனவே, இணைக்காரணிகளின் அணி

$$A_c=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\C_{21} & C_{22} & C_{23}\\C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 3\\-7 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 3\\3 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 5\\3 & -7\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4 & -1\\-7 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 4\\3 & -7\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}4 & -1\\5 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\-1 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 4\\-1 & 5\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(10+21)- & (-2-9) & (7-15)\\-(8-7) & (4+3)- & (-14-12)\\(12+5)- & (6-1) & (10-4)\end{pmatrix}$$

$$A_c=\begin{pmatrix}31 & 11 & 18\\-1 & 7 & 26\\17 & -5 & 6\end{pmatrix}$$

$$A_c^t = \begin{pmatrix} 31 & -1 & 17 \\ 11 & 7 & -5 \\ -8 & 26 & 14 \end{pmatrix}$$

A-இன் நேர்மாறு அணி, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_c^t\right)$ எனவே,

$$A^{-1} = 1/114 \begin{pmatrix} 31 & -1 & 17 \\ 11 & 7 & -5 \\ -8 & 26 & 14 \end{pmatrix}$$

முடிவைச் சரிபார்க்க $A\,A^{-1}$ ஐப் பெறவும்.

$$AA^{-1} = 1/114 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 & -1 & 17 \\ 11 & 7 & -5 \\ -8 & 26 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= 1/114 \begin{pmatrix} (62+44+8) & (-2+28-26) & (34-20-14) \\ (-31+55-24) & (1+35+78) & (-17-25+42) \\ (93-77-16) & (-3-49+52) & (51+35+28) \end{pmatrix}$$

$$= 1/114 \begin{pmatrix} 114 & 0 & 0 \\ 0 & 114 & 0 \\ 0 & 0 & 114 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

அணி எதிர் முறையைப் பயன்படுத்தி,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A^{-1}B = 1/114\begin{pmatrix} 31 & -1 & 7 \\ 11 & 7 & -5 \\ -8 & 26 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 52 \\ 72 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= 1/114\begin{pmatrix} (1612 - 72 + 170) \\ (572 + 504 - 50) \\ (-416 + 1872 + 140) \end{pmatrix}$$

$$= 1/114\begin{pmatrix} 1710 \\ 1026 \\ 1596 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

அணிகளின் சமத்துவத்தைப் **(equlity)** பயன்படுத்தி

$X = 15, Y = 9, Z = 14$

சரிபார்த்தல்:

முதல் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,

$[2X + 4Y - Z = 52], LHS = 30 + 36 - 14 = 52 = RHS$

இரண்டாவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,

$[-X + 5Y + 3Z = 72], LHS = 15 + 45 + 42 = 72 = RHS$

மூன்றாவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,

$[3X - 7Y + 2Z = 10], LHS = 45 - 63 + 28 = 10 = RHS$

அணிக்கோவை முறையில் தீர்வு காணல் (Solution by determinant method).

கிராமரின் விதி (Cramer's rule)

$a_1x + b_1y + = d_1, \quad a_2x + b_2y + = d_2$, என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$ என்க.

$\Delta \neq 0$, எனும்போது ஒரே தீர்வு

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$2x - 3y - 1 = 0, 5x + 2y - 12 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளைக் கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் $2x - 3y = 1, \ 5x + 2y = 12,$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 19 \neq 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 38 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 19;$$

கிராமரின் விதிப்படி

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1,$$

$$\Rightarrow x = 2, y = 1$$

எடுத்துக்காட்டு: பின்வரும் சமன்பாடுகளை கிராமரின் விதிப்படித் தீர்க்க.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட பின்வரும் சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \quad a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$ என்க.

$\Delta \neq 0$, எனும்போது ஒரே தீர்வு

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$x + 2y + 5z = 23, 3x + y + 4z = 26, 6x + y + 7z = 47$ என்ற சமன்பாடுகளை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள்:

$$x + 2y + 5z = 23$$
$$3x + y + 4z = 26$$
$$6x + y + 7z = 47$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 23 & 2 & 5 \\ 26 & 1 & 4 \\ 47 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -24$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 23 & 5 \\ 3 & 26 & 4 \\ 6 & 47 & 7 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 3 & 1 & 26 \\ 6 & 1 & 47 \end{vmatrix} = -18$$

கிராமரின் விதிப்படி

$$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-24}{-6} = 4;$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2;$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-18}{-6} = 3;$$

$$\therefore x = 4, y = 2, z = 3.$$

எடுத்துக்காட்டு:

பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் கிராமரின் விதிப்படித் தீர்க்க.

$$9x + 10y + 2z = 80$$
$$13x + 5y + 4z = 90$$
$$6x + 10y + 3z = 85$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 2 \\ 13 & 5 & 4 \\ 6 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -175 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 80 & 10 & 2 \\ 90 & 5 & 4 \\ 85 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -350$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 9 & 80 & 2 \\ 13 & 90 & 4 \\ 6 & 85 & 3 \end{vmatrix} = -700$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 80 \\ 13 & 5 & 90 \\ 6 & 10 & 85 \end{vmatrix} = -1925$$

கிராமரின் விதிப்படி,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-350}{-175} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-700}{-175} = 4$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1925}{-175} = 11.$$

$\therefore x = 2, y = 4, z = 11.$

<+>

வகை நுண் கணிதம்

Differential Calculus

நவீன கணிதமானது பெரும்பாலும் நுண் கணிதத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டே அமைந்துள்ளதெனலாம். இம்முறையானது அறிவியல், பொறியியல், பொருளாதாரம் ஆகியவற்றின் பிரிவுகளனைத்திலும் பேரளவு பயன்பட்டு நிற்கின்றது. கணிதம், இயற்பியல், பொருளியல் முதலிய துறைகளின் இந்நாளில் காணப்படும் அபிவிருத்திக்கெல்லாம் இந் நுண் கணிதமே அடிப்படைக் காரணமாகும். கணிதத் துறையின் வரலாற்றிலேயே இந்நுண் கணிதத்தைக் கண்டுபிடித்து அபிவிருத்தி செய்ததொன்றே அரும்பெரும் சாதனையாகுமென அறிவியல் அறிஞர்கள் யாவரும் நம்புகின்றனர். ஆங்கில நாட்டுப் பெரிய கணித மேதையான ஐசக் நியூட்டன் என்பவரும், ஜெர்மனி நாட்டுத் தத்துவ அறிஞரும், கணித மேதையுமான லெய்ப்னிட்ச் **(Leibnitz)** என்பவரும் ஒருவரையொருவர் சம்பந்தப்படாமலேயே நுண் கணித முறைகளைக் கண்டு பிடித்தனர் என்பது யாவர்க்கும் உடன்பட்டதொன்றாகும்.

வகை நுண் கணிதம்

சாதாரணக் கணக்கில் எண்ணளவை, முகத்தலளவை எனும் பலவித அளவைகளையும், அவற்றைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடும் முறைகளையும் படிக்கிறோம். அதில் முழு எண்கள், பின்ன எண்கள் முதலியனவற்றைப் பயன்படுத்துகிறாம். ஆனல் இயற்கையில் ஏற்படும் மாறுதல்கள் மிகமிக நுண்ணிய அளவில் தொடர்ச்சியாக ஏற்பட்டுப் பிறகு கணிசமான அளவுள்ள மாறுதலாகின்றன. பல துளி பெருவெள்ளம் ஆவது போல துளித்துளியாகச் சேருவது கண்ணுக்குப் புலப்படாது; பெரு வெள்ளம் வருவது தான் தெரியும். நுண்ணிய மாறுதல்களையும், அவை மாறும் விதங்களையும், நுண்ணிய மாறுதல்கள் தொடர்ந்து ஏற்படுவதால் நிகழும் தொகைகளையும் கணக்கிட்டு ஆராய்வது நுண் கணிதமாகும்.

நேர்கோட்டின் சரிவு அல்லது சாய்வு விகிதம்

சரிவு அல்லது சாய்வு என்பது ஒரு அளவீடாகும். ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது $Y = bX + c$ என்றமையும். இதில் b என்பது சரிவு ,

(Slope), c என்பது Y-வெட்டி, (Y – intercept) தோற்றுவாயின் **(Origin)** வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் சரிவு **b** எனில் அதன் சமன்பாடானது $Y = bX$ என்றிருக்கும்.

$Y = 2X - 1$ என்பது ஒரு நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு. இச்சார்பினைக் கொண்டு இருபுள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள சரிவை எவ்வாறு அளவிடுவது என்பதை பட்டியல் மற்றும் வரைபடம் மூலமாகக் காணலாம்.

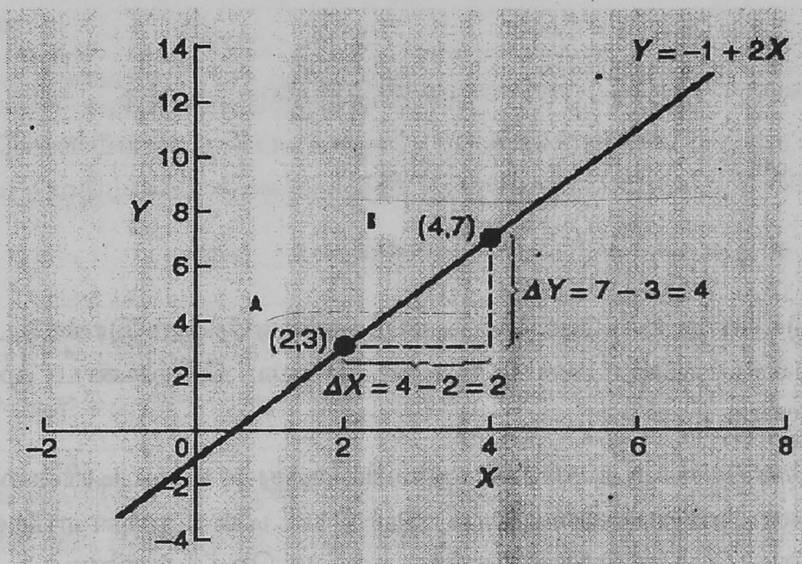
$Y = 2X - 1$ என்ற சார்பில் X – க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பிரதியிடும் போது Y – க்கு வெவ்வேறு மதிப்புக்கள் கிடைப்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலிடலாம்.

பட்டியல் 1

$Y = 2X - 1$	X	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	Y	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7

ஒவ்வொரு X-இன் மதிப்பிலும் Y-இன் மதிப்புகளைப் புள்ளிகளாகக் குறித்து அவைகளை இணைத்தால் ஒரு நேர்கோடு கிடைக்கும். இக்கோடு இடமிருந்து வலமாக மேல் நோக்கிச் செல்லும் கோடாக இருப்பதை வரைபடத்தில் காணலாம். இது X- க்கும் Y- க்கும் இடையேயுள்ள நேரியல் (linear) தொடர்பைக் காட்டுகிறது. இதன் கணித வடிவமே $Y = 2X - 1$ என்பதாகும். OX அச்சில் X-இன் அளவு இரண்டாக இருந்தால் Y-ஆனது மூன்றாகவும், X-ஆனது மூன்றாக அதிகரிக்கும் பொழுது Y – ஆனது ஐந்தாக அதிகரிப்பதையும் பட்டியல் 1இல் காணலாம்.

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ என்பன நேர் கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகள் (அதாவது (2,3), (4,7). இவ்விரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள சரிவை 'b' என்று குறிப்பிடலாம். நேர்கோட்டின் மீதுள்ள எந்தவொரு இரண்டு புள்ளி நிலைகளுக்கிடையேயுள்ள சரிவானது ஒரே மதிப்புடையதாகும் (வரைபடம்).



நேர் கோட்டின் மீதுள்ள A புள்ளியை (2,3) என்றும் B புள்ளியை (4,7) என்றும் எடுத்துக் கொள்க. A என்ற புள்ளியிலிருந்து B என்ற புள்ளிக்குச் செல்ல X-இன் அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தை ΔX என்றும் Y-இன் அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தை ΔY. என்றும் குறிப்பிடலாம். அதாவது வரைபடத்தில் X-ஆனது OX_1-இலிருந்து OX_2- விற்கு மாறுவதை ΔX என்றும், Y-ஆனது OY_1- லிருந்து OY_2-விற்கு மாறுவதை ΔY என்றும் குறிப்பிடலாம்.

எனவே சரிவானது $b = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$

$$b = \frac{Y\text{ -அச்சில் வேறுபாடு}}{X\text{-அச்சில் வேறுபாடு}} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

(Δ டெல்டா என்பது மாறுதலைக் குறிக்கும் அடையாளம்). இரண்டு புள்ளி நிலைகளுக்கிடையேயுள்ள சரிவை, வரைபடத்திலிருந்து கீழ்க்கண்டவாறு கணிக்கலாம்.

நேர்கோட்டின் சரிவு , $(b) = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

$$= \frac{7-3}{4-2}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

இவ்வாறு, ஒரு நேர்கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகள் கொடுக்கப்படின், அக்கோட்டின் சரிவை மேற்கண்ட முறையில் காணலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட சரிவின் மதிப்பிலிருந்து Y -வெட்டியின் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு அளவிடலாம். நேர் கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை (2,3) எடுத்துக் கொண்டால், Y -வெட்டியானது

$$Y = c + bX$$

$$= c + 2(2)$$

$$c = -1$$

அதாவது நேரியல் சார்பானது $Y = -1 + 2X$ என்றிருக்கும்.

நேர்கோடிலாச் சார்புகளின் சரிவு (Slope of a Non Linear Function)

இவ்வகைச் சார்புகளைக் காட்டும் வளை கோடுகளில் பல்வேறு பகுதிகளிலும் சரிவானது வேறுபடும். எனவே ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி நிலையில் வளை கோட்டின் சரிவைக் கணிக்க அவ்விடத்தில் ஒரு தொடுகோடு வரைந்து இக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கணிக்க வேண்டும்.

$Y = X^2 - 4X + 6$ என்ற ஒரு சார்புக் கோட்டுக்கு (4,9) என்ற புள்ளி நிலையில் சரிவைக் காண அப்புள்ளியில் ஒரு தொடுகோடு வரையவேண்டும். இந்தத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $Y = 4X + 7$ என்ற நேர் கோட்டு அமைப்பில் இருந்தால் கோட்டின் சரிவானது 4 ஆகும். தொடும் புள்ளி நிலையில் சார்புக் கோட்டின் (இப்புள்ளி நிலையில்) சரிவானது 4 ஆகும். ஆனால் வளை கோட்டில் காணப்படும் சரிவானது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வேறுபடும் என்பதை அறியவும். தொடுகோடு தெரியாவிடில் நுண் கணித முறையைப் பயன்படுத்தித்தான் சரிவு காண

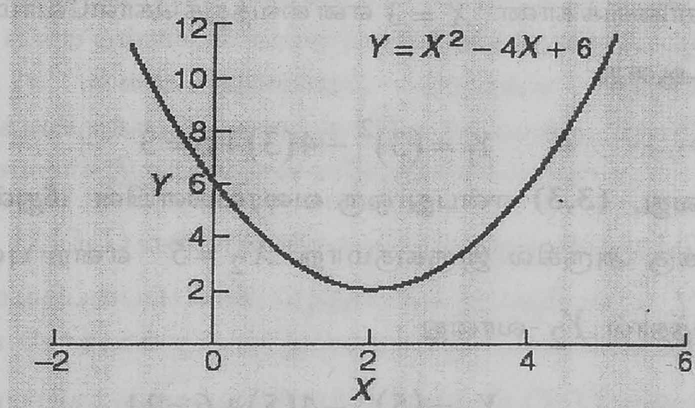
வேண்டும்.

$Y = X^2 - 4X + 6$ என்பது ஒரு வளை கோட்டுச் சார்பு. இச்சார்பில் X-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பிரதியிடும் பொழுது Y-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் கிடைப்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலிடலாம்.

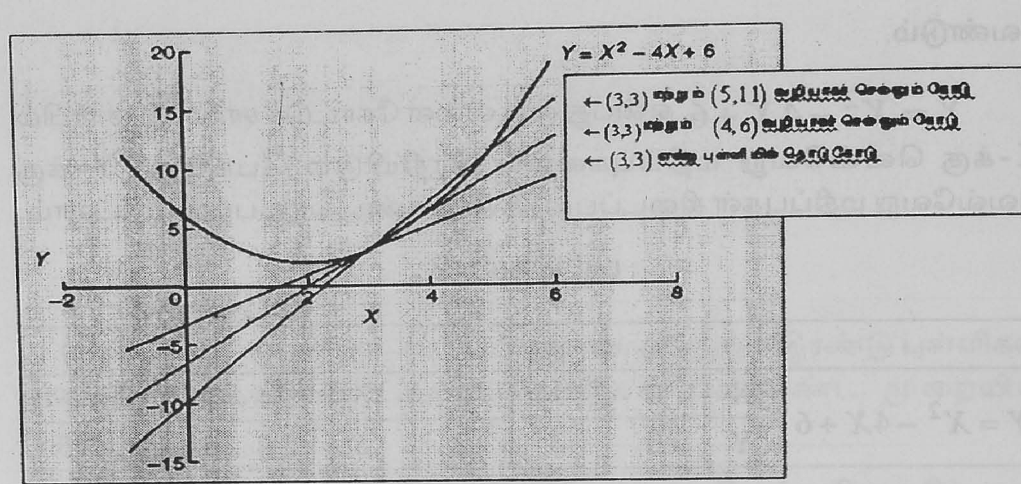
பட்டியல் 2

		A	B	C	D	E	F	G
$Y = X^2 - 4X + 6$	X	0	1	2	3	4	5	6
	Y	6	3	2	3	6	11	18

ஒவ்வொரு X-இன் மதிப்பிலும் Y-இன் மதிப்புகளைப் புள்ளிகளாகக் குறித்து அவைகளை இணைத்தால் ஒரு வளைவரை (கோடு) கிடைக்கும். இக்கோடு ஒரு வளை கோடாக இருப்பதை வரைபடத்தில் காணலாம். (வரைபடம்).



இது X-க்கும் Y-க்கும் இடையேயுள்ள நேர்கோடிலாச் சார்பைக் **(non-linear)** காட்டுகிறது. இதன் கணித வடிவமே $Y = X^2 - 4X + 6$ என்பதாகும். OX அச்சில் X-ன் அளவு மூன்றாக இருந்தால் Y-ஆனது மூன்றாகவும், X ஆனது நான்காக அதிகரிக்கும் பொழுது Y-ஆனது ஆறாக அதிகரிப்பதையும் பட்டியல் 2-இல் காணலாம்.



வளைகோட்டின் சரிவுகள்

வளைகோட்டின் சரிவைக் காண வரைபடத்தில் 'D' புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். AG என்ற வளைவரையில் $X = 3$ என்ற புள்ளியில் சரிவைக் காண $X = 3$ என வைத்துக் கொள்வோம். $X_1 = 3$ எனில் Y_1 ஆனது

$$Y_1 = (3)^2 - 4(3) + 6 = 3$$

அதாவது, **(3,3)** என்பது ஒரு வரைவளையின் மீதுள்ள புள்ளி (D). X_1-க்கு அருகில் இருக்குமாறு $X_2 = 5$ என்ற புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுத்தால் Y_2-வானது

$$Y_2 = (5)^2 - 4(5) + 6 = 11$$

அதாவது, $(5,11)$ என்பது வரைவளையின் மீது காணப்படும் மற்றொரு புள்ளி (F). இவ்விரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள சரிவானது,

$$b = \frac{Y\text{-அச்சில் வேறுபாடு}}{X\text{-அச்சில் வேறுபாடு}} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{11-3}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$$

$X_1 = 3$ என்ற புள்ளியில் சரிவைக் காண, X_1-க்கு இன்னும் நெருக்கமாக இருக்குமாறு $X_2 = 4$ என்ற புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுத்தால் Y_2-வானது,

$$Y_2 = (4)^2 - 4(4) + 6 = 6$$

அதாவது, $(4,6)$ என்பது வளைவரையின் மீதுள்ள X_1-க்கு இன்னும் நெருக்கமான புள்ளி (E) எனில், சரிவானது,

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{6-3}{4-3} = \frac{3}{1} = 3.$$

இச்சரிவானது இரண்டு நெருக்கமான புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள சரிவே தவிர D என்ற புள்ளியில் வளைவரையின் சரிவாகாது. மேலும், இவ்வாறு X ஆனது D என்ற புள்ளியை நெருங்க நெருங்க D என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சரிவுக்கு மிக மிக அருகாமையில் இருக்குமே தவிர D என்ற புள்ளியில் வளைவரையின் சரிவாகாது. ஆனால் X ஆனது D என்ற புள்ளியை நெருங்க நெருங்க நாம் கண்டுபிடிக்கவிருக்கும் வளைவரையின் சரிவானது தொடுகோட்டின் சரிவுக்குச் சமமாக இருக்கும் என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

நாம் $D, (3,3)$ என்ற புள்ளிக்கு மிக மிக நெருக்கமாகச் செல்வதற்கு ΔX என்ற மதிப்பைப் பயன்படுத்துவோம். இம்மதிப்பை $X = 3$ என்ற மதிப்புடன் சேர்த்தால் நமக்கு இரண்டாவது புள்ளி கிடைக்கும். ΔX-இன் மதிப்பு மிகக் குறைவாக இருக்குமாறும் $D, (3,3)$ என்ற புள்ளிக்கு மிக மிக அருகாமையில் இருக்குமாறும் நாம் $(X + \Delta X, Y_2)$ என்ற புள்ளியைக் காண வேண்டும்.

$$Y = X^2 - 4X + 6$$

$$Y_1 = 3^2 = 3^2 - 4(3) + 6 = 3$$

$D(X,Y)$-என்ற புள்ளியை மிக மிக அருகாமையில் நெருங்குவதற்கு மிகச் சிறிய மதிப்பான ΔX-ஐச் சேர்க்க வேண்டும். அவ்வாறு மிகச் சிறிய எண்ணான ΔX -ஐச் சேர்க்கும் போது $D',(X+\Delta X,\ Y+\Delta Y)$ என்ற மற்றொரு புள்ளி கிடைக்கும். ΔX ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்கும் போது D' என்ற புள்ளி $D,(X\ ,Y)$ என்ற புள்ளியை நெருங்கும் இதை $\lim\limits_{\Delta x\to}\dfrac{\Delta Y}{\Delta X}=\dfrac{dy}{dx}$ என்று குறிப்பிடலாம்.

$X=3$ என இருக்கையில், வளைவரையின் சரிவானது:

$$
\begin{aligned}
Y &= X^2-4X+6\\
Y_1 &= 3^2-4(3)+6=3\\
Y_2 &= (3+\Delta X)^2-4(3+\Delta X)+6\\
&= 9+\Delta X^2+6\Delta X-12-4\Delta X+6\\
&= \Delta X^2+2\Delta X+3\\
\Delta Y &= Y_2-Y_1\\
&= \Delta X^2+2\Delta X+3-3\\
&= \Delta X^2+2X
\end{aligned}
$$

எனவே சரிவு,

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{\Delta Y}{\Delta X}=\frac{\Delta X^2+2\Delta X}{\Delta X}=\frac{\Delta X(\Delta X+2)}{\Delta X}\\
&= \Delta X+2
\end{aligned}
$$

ΔX ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்குகையில் வளைவரையின் சரிவு, $\dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$, ஆனது தொடுகோட்டின் **(Slope of the Tangent Line)** சரிவை

நெருங்கும். இந்த எடுத்துக்காட்டில் ΔX -ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்கும் போது தொடுகோட்டுச் சரிவின் எல்லையான 2 என்ற எல்லையை அடையும். எனவே வளைவரையின் சரிவானது ,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2) = 2$$

எனவே $x = 3$ என இருக்கையில் சரிவானது

எடுத்துக்காட்டு:

வளைவரையின் சரிவைக் கண்டுபிடி.

$$\mathrm{Y{=}f}(X) = X^2 - 4X + 6$$

வளை வரையின் சரிவு: $b = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X} = \dfrac{(Y + \Delta Y) - Y}{X + \Delta X - X}$

$$\mathrm{Y{=}f}(X)$$

$$\Delta \mathrm{Y{=}f}(X + \Delta X) - \mathrm{f}(X)$$
$$\Delta \mathrm{Y{=}f}[(X + \Delta X)^2 - 4(X + \Delta X) + 6] - \mathrm{f}[X^2 - 4X + 6]$$

$$\Delta \mathrm{Y{=}f}(X + \Delta X) - \mathrm{f}(X)$$
$$\frac{\Delta \mathrm{Y}}{\Delta X} = \frac{\mathrm{f}[(X + \Delta X)^2 - 4(X + \Delta X) + 6] - \mathrm{f}[X^2 - 4X + 6]}{(X + \Delta X) - X}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(X^2 + 2X\Delta X + \Delta X^2 - 4X - 4\Delta X + 6 - X^2 + 4X - 6)}{\Delta X}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2X\Delta X + \Delta X^2 - 4\Delta X)}{\Delta X}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta X(2X + \Delta X - 4)}{\Delta X}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2X + \Delta X - 4$$

$$= 2X + 0 - 4$$

$$= 2X - 4$$

எனவே வளைவரையின் சரிவு : $2X - 4$

எடுத்துக்காட்டு:

வளைவரையின் சரிவைக் கண்டுபிடி.

$$Y = f(X) = 16X^2$$

வளைவரையின் சரிவு:

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{(Y + \Delta Y) - Y}{X + \Delta X - X}$$

$$Y = f(X)$$

$$(Y + \Delta Y) = f(X + \Delta X)$$

$$(Y + \Delta Y) = 16(X + \Delta X)^2$$

$$Y + \Delta Y = 16[X^2 + 2(X)(\Delta X) + (\Delta X)^2]$$

$$Y + \Delta Y = 16X^2 + 32(X)(\Delta X) + 16(\Delta X)^2$$

$$\Delta Y = 16X^2 + 32(X)(\Delta X) + 16(\Delta X)^2 - 16X^2 \quad \therefore \; Y = 16X^2$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{32(X)(\Delta X) + 16(\Delta X)^2}{\Delta X}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{32(X)(\Delta X) + 16(\Delta X)^2}{\Delta X}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta X(32X + 16\Delta X)}{\Delta X}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 32X + 16\Delta X$$
$$= 32X + 0$$
$$= 32X$$

எனவே, வளைவரையின் சரிவு: $32X$.

இவ்வாறு, $\frac{dy}{dx}$ கண்டுபிடிப்பதை வகையீடு என்கிறோம். இதைப்பற்றி அடுத்த அத்தியாயத்தில் காண்போம்.

<+>

வகையிடுதல்
(Differentiation)

$y = f(x)$ என்பது x-இன் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு எனக்கொள்வோம். Δx என்பது x-இல் ஏதோ ஒரு சிறு கூடுதல் (increment) எனவும், Δy அதற்கேற்ப y-இல் ஏற்படும் கூடுதல் எனவும் கொள்வோம். Δx பூச்சியத்தை நெருங்கினால் Δy-யும் பூச்சியத்தை நெருங்கும். $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ என்பதன் எல்லை, Δx பூச்சியத்தை நெருங்கும் பொழுது, ஒரு முடிவுள்ள எல்லையை நெருங்கும். இவ்வெல்லை x-ஐப் பொறுத்த y-இன் வகைக்கெழு (differential coefficient of y with respect to x) எனக் கூறப்படும். இதனை $\dfrac{dy}{dx}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவது வழக்கம். ஆகவே $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ என்றறிய முடிகிறது.

வகைக்கெழுவைக் கணக்கிடும் முறை

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $y = f(x)$ என்க. Δx என்பது x இல் ஏதோ ஒரு சிறு கூடுதல் (increment) எனவும், Δy அதற்கேற்ப y-இல் ஏற்படும் கூடுதல் எனவும் கொள்க.

எனவே, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ என்றாகும்.

அதாவது, $\Delta y = f(x + \Delta x) - y$

அதாவது, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

எனவே, $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

இதையே, $\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ என்றும் குறிக்கலாம்.

மேலும், $\frac{dy}{dx}$ ஐ $y_1, y', y'(x), Dy, f'(x), \frac{df(x)}{dx}$ என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு. $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் $y = f(x)$ என்ற தொடர்ச்சார்பின் X-ஐக் குறித்த வகைக்கெழு

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ என வரையறுக்கப்படும்.

ஆகவே, $f(x)$-இன் வகைக்கெழுவை, $f'(x)$ என்றும் $Df(x)$ என்றும், y-இன் வகைக்கெழுவை $D_x y$ என்றும் அல்லது வெறும் Dy என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

இவ்வாறு, வகைக்கெழு காணும் முறையை வகையிடுதல்∴ வகைக்கெழு காணுதல் (Differentiation) என்பர்.

முதற்கொள்கையிலிருந்து வகையிடல் (Differentiation from first principles)

வரையறையை உபயோகித்து வகைக்கெழு காணும் முறையை முதற்கொள்கைப்படி காணும் வகைக்கெழு (Differential Co-efficient from first principles) எனச் சொல்வது வழக்கம். இம்முறைப்படி எந்தவொரு சார்பின் வகைக்கெழுவையும் காணலாம். முதற்கொள்கையிலிருந்து வகைக்கெழு காணக் கையாள வேண்டிய வழிகள் :

1. கொடுக்கப்பட்ட சார்பினை y எனக் குறிக்க வேண்டும்.

2. அதில், x-ஐ $(x+\Delta x)$ஆலும், y-ஐ $(y+\Delta y)$ஆலும் பிரதியிடுக.

3. Δy-இன் மதிப்பை (2)-(1)க் காண்க.

4. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ஐ மதிப்பிடுக.

5. $\Delta x \to 0$ ஆகும்பொழுது, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ -இன் எல்லையைக் காண்க.

இதுதான் x-ஐப் பொருத்த y-இன் வகைக்கெழு ஆகும்.

குறிப்பு :

1. $\Delta x \to 0$ ஆகும் பொழுது இதன் எல்லையைக் காண வேண்டும். இதைக் காண நாம் $\Delta x = 0$ எனப் பிரதியிடுவதில்லை. ஏனெனில், அப்பொழுது $\Delta y = 0$ ஆகும். அந்நிலையில் $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{0}$ என வரையறுக்கப்படாததொன்றாகி விடும். மேலும் இப்படிச் செய்ய வேண்டிய அவசியமும் இல்லை. ஏனெனில், Δx ஆனது 0-ஐ அணுகும் பொழுது எல்லை மதிப்பைக் கணிக்க வேண்டும். சார்புக்கு $\Delta x = 0$ ஆகும்பொழுது என்ன ஆகின்றது என்பதல்ல நமது பிரச்சனை.

$\Delta x \to 0$ ஆக அணுகுங்கால், Δy -ம் பூச்சியத்தை அணுகும். $\Delta y \to 0$ ஆனால் இரண்டு மறைவுறும் பரிமாணங்களின் விகிதம் ஒரு குறிப்பிட்ட வரம்பை அடையும் எனப் பார்த்திருக்கிறோம். இந்த எல்லை மதிப்பு நிலையுள்ளதாயின், அது சார்பின் மாறுவீதத்தை வரையறை செய்யும்.

வகைக்கெழுவைக் கணக்கிடும் முறை

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $y = f(x)$ என்க.

ஆகையால் $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ என்றாகும்.

அதாவது, $\Delta y = f(x + \Delta x) - y$

அதாவது, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

எனவே, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

இப்பொழுது, Δx-ஐப் பூச்சியத்தை அணுகச் செய்வோமானால்,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

அதாவது, $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x0}{\Delta x}\right]$

குறிப்பு:

(i) இங்கு $\dfrac{dy}{dx}$ என்பது, $\Delta x \to 0$ எனும் போது $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ என்ற விகிதத்தின் எல்லையைக் குறிக்கும் அடையாளமே தவிர, dy, dx ஆகியவற்றின் விகிதம் அல்ல என்பதை நன்கு புரிந்து கொள்ள வேண்டும். அதாவது, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(y) = D(y)$ என்பதாகும். இங்கு '$D = \dfrac{d}{dx}$' எனும் குறியீடு x-ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழு காணும் செயலைக் குறிப்பதாகும்.

(ii) $\dfrac{dy}{dx}$ -ஐ y-இன் வகைக்கெழு (Derivative of y) என்றும் கூறுவர். இவ்வாறு,ஒரு விகிதத்தின் எல்லை மதிப்பாக வகைக்கெழு காண்பதை, முதல் தத்துவத்திலிருந்து வகையிடுதல் என்று கூறப்படும்.

(iii) வகைக்கெழு காணும் முறையை நன்கு புரிந்து கொள்ள பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு உதவியாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு: $y = 2x^3$ எனும் சார்பின் வகைக்கெழு காண்பதாகக் கொள்வோம். இங்கு x-இன் கூடுந்தொகையை Δx என்றும்,அதற்கேற்ப, அமையும் y-இன் கூடுந்தொகையை Δy

என்றும் குறிப்பிடுவோம். ஆகையால்,

$$y = 2x^3$$

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3$$

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^3 - y$$

$$= 2(x + \Delta x)^3 - 2x^3$$

$$= 2[x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3]$$

$$= 2[3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3]$$

$$= 2\Delta x[3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2]$$

i.e. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2[3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2]$

$\therefore$ Δx பூச்சியத்தை அணுகும்போது எல்லை காண

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} 2[3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2]$$

அதாவது,

i.e. $\dfrac{dy}{dx} = 2[\lim_{\Delta x \to 0}(3x^2) + \lim_{\Delta x \to 0} 3x(\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x)^2]$

$$= 2[3x^2 + 3x.0 + 0]$$

$$= 6x^2$$

i.e. $\dfrac{d}{dx}(2x^3) = 6x^2$

எடுத்துக்காட்டு 1: முதற்கொள்கை வரையறையிலிருந்து $y = x^n$ என்ற சார்புக்கு x -ஐக் குறித்து வகைக்கெழு அல்லது வகையீடு காண்க.

x -ன் கூடுந்தொகை Δx ஆகவும், y -இன் கூடும் தொகை Δy ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$$y + \Delta y = (x + \Delta)^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}$$

Δx பூச்சியத்தை நெருங்கும்பொழுது, $(x + \Delta x)$-வானது xஐ நெருங்கும்.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{(x+\Delta x) \to x} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x} = n.x^{n-1}$$

((முதல் அடிப்படை எல்லைத் தேற்றத்தை உபயோகிக்கிறோம்.

அதாவது, $\frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$)

$$\frac{dy}{dx} = n.x^{n-1}$$

இச்சூத்திரமானது n-இன் எல்லா விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கும் (Rational values of n) உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: முதற் கொள்கை வரையறையிலிருந்து e^x-இன் x-ஐக் குறித்து வகைக்கெழு காண்க.

$y = e^x$ எனக் கொள்க.

பின்னர் $y = \Delta y = e^{x + \Delta x}$

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^{x}$$

$$= e^{x}(e^{\Delta x} - 1)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x}(e^{\Delta x} - 1)}{(x+\Delta x) - x}$$

$$= \frac{e^{x}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$ வாக எல்லை மதிப்பானது

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= e^{x} \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)$$

[$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{e^{\Delta} - 1}{x}\right) = 1$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த]

$$= e^{x} * 1$$

$$= e^{x}$$

$\therefore y = e^{x}$ எனில் $\frac{dy}{dx} = e^{x}$

எடுத்துக்காட்டு 3: முதற் கொள்கை வரையறையிலிருந்து $\log x$ -இன் x-ஐக் குறித்து வகைக்கெழு காண்க.

$y = \log_e x$ என்க.

பின்னர் $y + \Delta y = \log_e (x + \Delta x)$

$$\Delta y = \log_e (x + \Delta x) - \log_e{}^x$$

$$= \log_e \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)$$

$$= \log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left[\frac{x}{\Delta x} \log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{x} . \log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \qquad \left[\therefore n \log_e x = \log_e x^n \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \frac{\Delta x}{x} \to 0$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log e \left(\frac{1 + \Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$\Delta x \to 0$ ஆக $\frac{\Delta x}{x} \to 0$

$$= \frac{1}{x} . \lim_{\frac{\Delta x}{x} \to 0} \log_e \left(\frac{1 + \Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x} . \log_e{}^e$$

$$= \frac{1}{x}.1$$

$$= \frac{1}{x}$$

$y = \log_e{}^x$ எனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

எடுத்துக்காட்டு 4: முதற்கொள்கை வரையறையிலிருந்து $\sqrt{x}$-இன் x-ஐக் குறித்து வகைக்கெழு காண்க.

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{y}$$

$$= \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{y}\right)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$y = \sqrt{x}$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

எடுத்துக்காட்டு 5: முதற்கொள்கையிலிருந்து $\sqrt{x}+1$-இன் -x-ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$y=\sqrt{x+1}=f(x)$$

Δx என்பது x-ல் ஏதேனும் ஒரு சிறு கூடுதல் எனில், Δy என்பது, அதற்கேற்ப y-ல் ஏற்படும் சிறு கூடுதல்.

$$\therefore f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}+1$$

$$\therefore \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}\quad\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x+1)-(x+1)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}.$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\sqrt{x+\Delta x+1}+1+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

இவ்வாறு, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

எடுத்துக்காட்டு 6: முதற்கொள்கையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட சார்புக்கு வகைக்கெழுவினைக் கண்டுபிடி.

$$y=e^{7x}$$

$$y+\Delta y=e^{7(x+\Delta x)}$$

$$\Delta y=e^{7(x+\Delta x)}-y$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^{7(x+\Delta x)}-e^{7x}}{\Delta x}$$

$$=\left[\frac{e^{7x}.e^{7\Delta x}-e^{7x}}{\Delta x}\right]$$

$$=e^{7x}\left[\frac{e^{7\Delta x}-1}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}e^{7x}\left(\frac{e^{7\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$$

$$=e^{7x}\lim_{\Delta x\to 0}7\left(\frac{e^{7\Delta x}-1}{7\Delta x}\right)$$

$$=7e^{7x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}\quad[\because t=7\Delta x\to 0 as \Delta x\to 0]$$

$$=7e^{7x}\times 1=7e^{7x}\left(\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1\right)$$

குறிப்பாக $y=e^{ax}$ எனில் $\frac{d}{dx}(e^{ax})=ae^{x}$

மேலே கண்ட முறையில் எல்லாச் சார்புகளையும் முதற்கொள்கையிலிருந்தே வகையிடுவது எளிதல்ல. தேவையும் அல்ல. நியமச்சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களைப் பயன்படுத்தி, அவை அடங்கிய மற்ற சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களைக் காணலாம். அதற்குப் பின்வரும் தேற்றங்கள் பயன்படும். அதாவது, சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களை முதற்கொள்கையிலிருந்து பெறப்படுவதை விட வெகு எளிதாகவும், விரைவாகவும் மேலே கண்ட நியமப் பலன்களையும் (Standard results) பின்வரும் பொதுத் தேற்றங்களைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கப் பெறலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{x}$-இன் வகைக்கெழுவை நியமப் பலனை பயன்படுத்திக் காண்க.

$y=\sqrt{x}$ எனக் கொள்க.

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

வகையிடலின் சில நியம விளைவுகள்

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலுள்ள சார்புகளின் வகைக் கெழுக்களை மனதில் இருத்திக்கொள்வது அவசியம்.

வ. எண்.	சார்பு	$\frac{dy}{dx}$=வகைக்கெழு
1	x^n	nx^{n-1}
2.	e^x	e^x
3.	e^{ax}	ae^{ax} (a என்பது மாறிலி)
4.	$\log_e x$	$\frac{1}{x}$
5.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6.	e^{-x}	$-e^{-x}$
7.	a^x	$a^x \log_e a$ (a என்பது மாறிலி)

அடிப்படை விதிகள் / தேற்றங்கள் :

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலுள்ள சார்புகளின் வகைக்கெழு காணும் விதிகளை மனதில் இருத்திக்கொள்வது அவசியம்.

வ. எண்.	y	$\frac{dy}{dx}$
1.	c	0 (c என்பது மாறிலி)
2.	cu	$c\frac{du}{dx}$ (c என்பது மாறிலி)
3.	$u \pm v \pm w$	$\frac{dy}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$
4.	uv	$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
5.	uvw	$uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{dy}{dx}$
6.	$\frac{u}{v}$	$\frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

(1). மாறிலியின் வகைக்கெழு காணல்

$y = C$ எனில், $\frac{dy}{dx} = 0$

எ.கா.: $y = 400$ எனில் $\frac{dy}{dx} = c(0)(x)^{0-1} = 0$

எ.கா.: $y = 10$ எனில் $\frac{dy}{dx} = 0$

(2) நேரியல் சார்பின் வகைக்கெழு

(Linear Function Rule)

எடுத்துக்காட்டு: $y = a + bx$ எனில் $\frac{dy}{dx} = b$

எடுத்துக்காட்டு: $0 + 6x$ எனில் $\frac{dy}{dx} = 6$

(3). படிச்சார்பின் வகைக்கெழு (Power rule for differentiation)

$$y = x^n \text{ எனில் } \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = x^3, n = 3 \rightarrow$ எனவே $3x^{3-1} = 3x^2$

$y = ax^n$, எனில் $\dfrac{dy}{dx} = n.a.x^{n-1}$

எடுத்துக்காட்டு: $= 4x \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 4x^0 = 4$

எடுத்துக்காட்டு: $y = 4x^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 8x$

எடுத்துக்காட்டு: $y = 4x^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 12x^2$

எடுத்துக்காட்டு: $y = 4x^{-2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -8x^{-3}$

எடுத்துக்காட்டு: $y = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ எனில் $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு : $y = 3x^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

(4). $Kf(x)$ என்பதின் வகைக்கெழுவானது $Kf'(x)$ இதில் K என்பது மாறிலி.

$f(x)$-ன் வகைக்கெழு $f'(x)$ என்றால் $Kf(x)$-ன் வகைக்கெழு $Kf'(x)$

k என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட மாறிலியாகவும், u எனும் x இன் சார்பு x-இன் சார்ந்த வகைக்கெழுவை உடையதாகவும் கொள்வோம். மேலும் $y = ku$ என்றும் Δx எனும் x-ன் கூடுந்தொகைக்கு ஒப்ப அமையும் u, y -இன் கூடுந்தொகைகள் முறையே $\Delta u, \Delta y$ என்றும் இருக்கட்டும். இங்கு, $\Delta u, \Delta y$ என்பதால், $y + \Delta y = k(u + \Delta u)$ என்றாகும்.

$$\Delta y = k(u + \Delta u) - ku$$

$$= k\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$ எனும்போது எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிடுவோமானால்,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = k \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

i.e ; $\dfrac{dy}{dx} = k\dfrac{du}{dx}$ i.e $y' = ku'$

குறிப்பு: $y = cu$ என்பதில் c மாறிலியாகவும், y-ம், u-ம் x-இன் சார்பலன்களாகவும் ஆனால், $\dfrac{dy}{dx} = c\dfrac{dy}{dx}$ ஆகும்.

குறிப்பு : $y = cu$ என்பதில் c மாறிலியாகவும், y-ம், u-ம் x – இன் சார்பலன்களாவும் ஆனால்

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{du}{dx}$$ எனவாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு: $5x^2$ $\frac{dy}{dx} = 5\frac{d(x^2)}{dx} = 5 \times 2x = 10x$

(5). கூட்டல் விதி (Addition formula)

u, v என்பன இரண்டு x-இன் சார்புகளாகவும், அவற்றின் வகைக்கெழுக்கள் இருக்கின்றன எனக் கொள்வோம். மேலும், y என்பது இச்சார்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் குறிக்கட்டும். பின், $y = u + v$ என்பதால், y-இன் வகைக்கெழுவும் இருக்க வேண்டும். அதாவது, $\frac{du}{dv}, \frac{dv}{dx}$ என்பன இருக்கின்றன எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், $\frac{dy}{dx}$-ம் இருத்தல் வேண்டும்.

இங்கு x என்ற சார்பிலா மாறி ஏற்கும் கூடுந்தொகையை Δx என்றும், அதற்கொப்ப u, v, y ஆகிய மாறிகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை (அதாவது, கூடுந்தொகைகளை) முறையே, $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ என்று குறிப்பிடுவோம். பின் $\Delta x \to 0$ எனில், $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ இவை ஒவ்வொன்றும் பூச்சியத்தை அணுகும்.

இவ்வாறு, $y = u + v$ என்பதால்,

$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$ என்றாகும்.

$$\Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta y) - y$$

$$= (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (u + v)$$

i.e. $\Delta y = \Delta u + \Delta v$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

இப்பொழுது, $\Delta x \to 0$ எனும் நிலையில் எல்லை காண,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$$

i.e. $\frac{dy}{dx} = \lim_{x\Delta \to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] + \lim_{x\Delta \to 0}\left[\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$

i.e. $\frac{dy}{dx} = \lim_{x\Delta \to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] + \lim_{x\Delta \to 0}\left[\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$

i.e. $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

i.e. $y' = u' + v'$

துணை முடிவுகள் :

(i) $y = u - v$ என்று கொடுக்கப்பட்டால், $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$ என்று பெறலாம்.

(ii) $y = u \pm v \pm w \pm .....$ என்றால், $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm ....$ என்று விரித்துக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: $x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 2$-இன் வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு :

$$y = x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 8x + 2$$

$$y' = \frac{d(x^5)}{dx} + \frac{d(4x^4)}{dx} + \frac{d(7x^3)}{dx} + \frac{d(6x^2)}{dx} + \frac{d(8x)}{dx} + \frac{d(2)}{dx}$$

$$= 5x^4 + 4 \times 4x^3 + 7 \times 3x^2 + 6 \times 2x + 8 \times 1 + 0$$

$$= 5x^4 + 16x^3 + 21x^2 + 12x + 8$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = u + v + w$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$

எடுத்துக்காட்டு: $y = x^3 + 2x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2 + 0$$

$$= 3x^2 + 2$$

எடுத்துக்காட்டு: y = 2x2 + 3x => $\frac{dy}{dx} = 4x + 3$

எடுத்துக்காட்டு: y = 4x2 - x3 - 4x => $\frac{dy}{dx} = 8x - 3x^2 - 4$

எடுத்துக்காட்டு: y = 5x + 4 => $\frac{dy}{dx} = 5$

எடுத்துக்காட்டு: $y = 3x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = 3x^4 - x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - x^{-\frac{1}{3}})$$

$$= 3\frac{d(x^4)}{dx} - \frac{d}{dx}(x^{-\frac{1}{3}})$$

$$= 3 \times 4x^{4-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$= 12x^3 - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

(6). பெருக்கல் விதி (Product formula)

இங்கு $u, v, w...$ என்பன x-ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழுக் களையுடைய x-இன் சார்புகளாகவும், $y = uv$ என்றும் இருக்கட்டும். பின், $\frac{dy}{dx}$ -ம் இருக்க வேண்டும் என அறிகிறோம்.

இப்பொழுது x-இன் கூடுந்தொகையை Δx-என்றும், அதற்குத் தகுந்தாற்போல் அமையும் u, v, y-ன் கூடுந்தொகைகளை முறையே $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ என்றும் கொள்வோம். எனவே $\Delta \to 0$ என்றால் $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ ஆகிய ஒவ்வொன்றும் பூச்சியத்தை அணுகும்.

$$\therefore\ y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$= uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$\text{i.e. } \Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta u} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta v}\Delta v$$

இப்பொழுது $\Delta x \to 0$ எனும் போது இரண்டு பக்கங்களின் எல்லை மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[u\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right]$$

$$\text{i.e. } \frac{dy}{dx} = u \underset{\Delta x \to 0}{L} + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + v \underset{\Delta x \to 0}{L}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) \times \underset{\Delta x \to 0}{L}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right)$$

$$\text{i.e. } \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) \times \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta v)$$

$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} \times 0$$

i.e. $\frac{dv}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$ i.e . $y'=uv'+vu'$

துணை முடிவு :

(i) இவ்விதியைப் பலசார்புகளின் பெருக்குத் தொகைக்கும் விரித்தும் கூறலாம். இவ்வாறு,

$y=uvw$ எனில், $(u,v,w$ என்பன x-இன் சார்புகள்)

$\frac{dy}{dx}=(uv)\frac{dw}{dx}+(vw)\frac{du}{dx}(wu)\frac{dv}{dx}$ என்று கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு: $y=uv$ எனில், $\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$

$$y=(x^2-2)(x^4+5)$$

$u=(x^2-2), v=(x^4+5)$ எனக் கொள்வோமெனில்

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$=(x^2-2)(4x^3)+(x^4+5)(2x)$$

$$=4x^5-8x^3+2x^5+10x$$

$$=6x^5-8x^3+10x$$

எடுத்துக்காட்டு: $(x^2-1)(x^2+2)$ ஐ x-ஐச் சார்ந்த (பொறுத்து) வகைக்கெழுவைப் பெருக்கல் விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

$y=(x^2-1)(x^2+2)$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)(x^2+2)\right]$

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2+2)+(x^2+2)\frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$=(x^2-1)(2x)+(x^2+2)2x$$

$$=2x^3-2x+2x^3+4x$$

$= 4x^3 + 2x$

$= 2x(2x^2 + 1)$

எடுத்துக்காட்டு: y = (x+²)(ax²+bx)

எடுத்துக்காட்டு: y = (4x³-3x+²)(2x²+4x)

(7) வகுத்தல் விதி : (Quotient formula)

$y = \frac{u}{v}$ என்றும், u, v என்பன இரண்டு x-இன் சார்புகள் என்றும், மற்றும் அவற்றின் வகைக்கெழுக்கள் இருப்பதாயிருக்கும் என்றும் கொள்வோம். மேலும், x-இன் கூடுந்தொகையை Δx என்றும், u, v, y ஆகியவற்றின் கூடுந்தொகைகளை முறையே $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே, $\Delta x \to 0$ எனும் போது, $\Delta v \to 0$, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ என்று அறியவும்.

$\therefore\ y = \frac{u}{v}$ என்பதால்,

$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$ என்றாகும்.

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v(v + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{(v + \Delta v)v}$$

$$= \frac{(v\Delta u) - u(\Delta v)}{v(v + \Delta y)}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v(v + \Delta v)}\left[v - \frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$$

$\Delta x \to 0$ எனும் போது இருபுறமும் எல்லை காண,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right]$$

$$= \frac{\lim_{\Delta x \to 0}\left[v - \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right]}{\lim_{\Delta x \to 0} v(v+\Delta v)}$$

i.e. $$\frac{dy}{dx} = \frac{v\lim_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) - u\lim_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{v^2}$$

i.e. $$\frac{dv}{dx} = \frac{\left(v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{v^2}$$

i.e. $$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

குறிப்பு: இம்முடிவினைப் பின்வரும் அமைப்பிலும் எழுதுவதுண்டு.

அதாவது, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{u'}{u} - \dfrac{v'}{v}$ என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு: $y = \dfrac{u}{v}$ எனில் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - v\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

$$y = \frac{x^2 - 7}{2x + 8}$$

$$u = x^2 - 7, v = 2x + 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(2x+8)(2x)-(x^2-7)(2)}{(2x+8)^2}$$

$$= \frac{4x^2+16x-2x^2+14}{(2x+8)^2}$$

$$= \frac{2x^2+16x+14}{(4x+4)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+8x+7)}{4(x+4)^2}$$

$$= \frac{x^2+8x+7}{2(x+4)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = \dfrac{x^2-7}{5x+2}$ x- ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழுவை வகுத்தல் விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x+2)\frac{d}{dx}(x^2-7)-(x^2-7)\frac{d}{dx}(5x+2)}{(5x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{(5x+2)^2}\left[(5x+2)(2x)-(x^2-7)(5)\right]$$

$$= \frac{1}{(5x+2)^2}\left[(10x^2+4x)-(5x^2-35)\right]$$

$$= \frac{1}{(5x+2)^2}\left[10x^2+4x-5x^2+35\right]$$

$$= \frac{1}{(5x+2)^2}\left[5x^2+4x+35\right]$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$, x-ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழுவை வகுத்தல் விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - x + 1)\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1)\frac{d}{dx}(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)2}$$

$$= \frac{1}{(x^2 - x + 1)}\left[(x^2 - x + 1)(2x + 1) - (x^2 + x + 1)(2x - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{(x^2 - x + 1)}\left[(2x^3 - 2x^2 + 2x + x^2 - x + 1) - (2x^3 + 2x^2 + 2x - x^2 - x - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{(x^2 - x + 1)}(2x^3 - 2x^2 + 2x + x^2 - x + 1 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 + x + 1)$$

$$= \frac{1}{(x^2 - x + 1)} - 4x^2 + 2x^2 + 2$$

$$= \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{-2(1 - x^2)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)}$, x-ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழுவை வகுத்தல் விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1) - (x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^2}\left[(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)\right]$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^2}(2x^3+2x)-(2x^3-2x)$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^2}(2x^3+2x-2x^3+2x)$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு: y = (x+2)/(x+4)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+4)-(x+2)}{(x+4)^2}=\frac{2}{(x+4)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு: y = (3x+2)/(x2+4)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+4)(3)-(3x+2)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$=\frac{-3x^2-4x+12}{(x^2+4)^2}$$

(8) சார்பின் சார்பு விதி : (Function of function rule- Chain Rule)

$y=f(u)$ என்றும், $u=g(x)$ என்றும் கொடுக்கப் பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். x-இன் சார்பாக y தரப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். பல சமயங்களில் y-ஐ u என்ற ஓர் இடைப்பட்ட மாறியின் சார்பாகவும், u-ஐ x-இன் சார்பாகவும் கொள்வது வகையிடுவதற்குப் பயனுடையதாக இருக்கும்.

$y = f(u)$ ம் , $u = g(x)$ ம் ஆனால், $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ஆகும்.

x-இல் ஏற்படும் ஒரு சிறிய கூடுதல் Δx, அதற்கேற்ப u, g ஆகியவற்றின் கூடுதல்கள் $\Delta u, \Delta y$ எனக் கொள்வோம். இதை

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ என எழுதலாம்.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ஆகும்.

இதைச் சங்கிலித் தொடர்விதி (Chain rule) என்றும் கூறுவர்.

கிளைத் தேற்றம் :

$y = f(u), u = f(v), v = f(x)$ எனில் அதாவது, y ஆனது u-இன் சார்பாகவும், u ஆனது v-இன் சார்பாகவும் v ஆனது x-இன் சார்பாகவும் அமையுமானால்

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ ஆகும்.

கிளைத்தேற்றங்கள்:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv}$ என்ற சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

(a) $\frac{dy}{du} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{du}{dv}}$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}, dx \neq 0$ (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \frac{dx}{dy} \neq 0$

குறிப்பு :

இங்கு u-வைச் சார்ந்த y-இன் வகைக்கெழுவாகவும், x-ஐச் சார்ந்த u-இன் வகைக்கெழுவும் இருப்பதைக் கவனிக்க வேண்டும்.

$y = f(u)$ மற்றும் $u = g(x)$ எனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} . \frac{du}{dx}$

எடுத்துக்காட்டு: $y = (3+2x^2)^3$

$u = (3x+2x^2)$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2 . 4x$$

$$= 12xu^2 \qquad = 12x(3+2x^2)^2$$

எடுத்துக்காட்டு: x-ஐக் குறித்து வகையிடு : $(x^3+1)^2$

$y = (x^3+1)^2$ எனக்கொள். இதை

$y = u^2, u = x^3 + 1$ என எழுதலாம். இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{dy}{du} = 2u, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = 2u.3x^2 = 6(x^3+1)x^2$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = (ax^2 + bx)^{½}$

$v = (ax^2 + bx)$ எனக்கொள் , $y = v^{½}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(ax^2 + bx\right)^{-\frac{1}{2}} . (2ax + b)$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = (4x^3 + 3x - 7)^4$

$v = (4x^3 + 3x - 7)$ எனக்கொள், $y = v^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4\left(4x^3 + 3x - 7\right)^3 . \left(12x^2 + 3\right)$$

(9) உட்படுசார்புகளின் வகைக்கெழு காணல் (Differentiation of implicit function)

x, y என்பவை இரு மாறிகள். y-இன் மதிப்பு x-இன் மதிப்பைச் சார்ந்ததாயின், சார்பை $y = f(x)$ என, y-ஐ x-ல் கூறமுடியும். y இத்தகைய தொடர்புடையதெனின் y எனும் மாறி x எனும் தனிமாறியின் வெளிப்படைச்சார்பு (explicit function) எனப்படும். இதுவரை அத்தகைய சார்பலன் பற்றியே விவரித்து வந்துள்ளோம். $\frac{dy}{dx}$ ஐ எளிதில் விதிகளைக் கொண்டு காணலாம். ஆனால் x-ம், y-ம் கலந்து வரும் தொடர்புகளும் உள்ளன. $2x^2 + 3xy + y^2 = 8$ எனும் சமன்பாட்டில x-ம் y-ம் கலந்து வந்துள்ளன. இவ்வாறு வெளிப்படையாக y-இன் மதிப்பு x-இன் சார்பலனாகக் கூறாமல் சமன்பாட்டால் கூறப்படுமாயின், y-ஆனது x-இன் உட்படு சார்பலன் எனப்படும் அத்தகைய சார்பலனில் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$ -ம்/ x, y இல் சார்பலனாக அமையும்.

$x^2 + y^2 = a^2$ போன்ற சார்புகளில் y-ஆனது x-இன் நேர்முகச் சார்பாகக் கொடுக்கப்படாமல், x-ம் y-ம் கலந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சமன்பாட்டிலிருந்து y-க்கு தீர்வு கண்டு, - y ஐ x-இன் நேர்முகச் சார்பாகக் கண்டறிந்து, இதிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காணலாம். கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் இதனை விளக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற தொடர்பிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.

y-ஆனது x-இன் சார்பானதால், இருபக்கங்களையும் x-ஐ ஒட்டிய வகைக்கெழுக் காணவும்.

$$2ax + 2h(y + x\frac{dy}{dx}) + 2by\frac{dy}{dx} + 29 + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

அதாவது $(2hx + 2by + 2f)\dfrac{dy}{dx} = -2ax - 2hy - 2g$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}$$

எடுத்துக்காட்டு: $x^3 + 8xy + y^3 = 64$ எனும் போது $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு: $x^3 + 8xy + y^3 = 64$

x-ஐப் பொறுத்து இருபுறமும் வகைப்படுத்த,

$$3x^2 + 8[x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}] + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 + 8y + 8x\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x^2 + 8y) + (8x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(8x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = -(3x^2 + 8y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(3x^2 + 8y)}{(8x + 3y^2)}$$

எடுத்துக்காட்டு: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனில் $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் x-ஐக் குறித்து வகையிட,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y + 2f)\frac{dy}{dx} = -2x - 2g$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x+g)}{2(y+f)}$$

$$= -\frac{x+g}{y+f}$$

எடுத்துக்காட்டு: $2x^2 + 3xy + y^2 = 8$ என்றால் $\frac{dy}{dx}$ -இன் மதிப்பு என்ன?

இங்கு y-இன் மதிப்பு, x-இன் சார்பாக வெளிப்படையாகக் கொடுக்கப்படவில்லையாதலால், இத்தகைய சார்பு உட்படு சார்பு (Implicit function) என்று கூறப்படும்.

தீர்வு: இருபுறமும் வகைக்கெழு காண (x-ஐப் பொறுத்து)

$$4x + 3y + 3x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x + 2y)\frac{dy}{dx} = -4x - 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(4x+3y)}{(3x+2y)}$$

எடுத்துக்காட்டு: $x^2 - 3xy + y^2 = 19$ x-ஐப் பற்றி வகைக்கெழு காண்:

$$2x - 3(x\frac{dy}{dx} + y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - 3x\frac{dy}{dx} - 3y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(-3x+2y)\frac{dy}{dx}=-2x-3y$$

$$=\frac{-(2x+3y)}{(-3x+2y)}$$

எடுத்துக்காட்டு: $2x-3y=6$ இருபுறமும் x-ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழு காண்.

$$2.1-3\frac{dy}{dx}=0$$

$$2=3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு: $x^2+y^2=3axy$ என்ற சமன்பாட்டை வகையிட்டு $\frac{dy}{dx}$-இன் மதிப்பைக் காண்.

$x^3+y^3=3axy$ என்ற சமன்பாட்டை x-ஐப் பொறுத்து வகையிட்டால்,

$$3x^2+3y\frac{dy}{dx}=3ax\frac{dy}{dx}+3ay$$

$$\frac{dy}{dx}(3y-3ax)=-3x^2+3ay$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^2+ay}{y-ax}$$

எடுத்துக்காட்டு: $y^2+xy^2=2$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ கண்டுபிடி.

இருபுறமும் x-ஐக் குறித்து வகைக்கெழு காண,

$$2y\frac{dy}{dx}+x2y\frac{dy}{dx}+y^2=0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y+x2y)=-y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{(2y+x2y)}$$

$$=\frac{-y}{2+2x}$$

(10). நேர்மாறுச் சார்புகள் (Inverse functions)

$y = f(x)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு x-இன் ஒரு மதிப்புச் சார்பாக இருக்கட்டும். இத்தொடர்பிலிருந்து, x — எனும் சார்பிலா மாறியை y எனும் சார்புடை மாறி மூலம் எழுத முடியுமானால், அத்தகைய y-இன் சார்பைக் கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் நேர்மாறுச் சார்பு என்கிறோம். இதைக் குறிப்பிட, $x = f^{-1}(y)$ என்ற குறியீடு பயன்படுத்தப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக,

$y = \left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கட்டும்.

இதிலிருந்து,

$x = \left(\frac{1-2y}{5y-3}\right)$ என்று பெற முடியும். இச்சார்பை முதல் சார்பின் நேர்மாறுச் சார்பு என்கிறோம்.

y என்பது x-இன் ஓர் தொடர்ச்சியான சார்பெனில், x என்பது y-இன் தொடர்ச்சியான சார்பாகவே பொதுவாக இருக்கும். Δx என்பது x-இல் ஒரு சிறு கூடுதல், அதற்கேற்ப y-இன் கூடுதல் Δy ஆக இருக்கட்டும். $\Delta x \to 0$ எனில் $\Delta x \to 0$ அப்பொழுது.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$ என எழுதலாம்.

இனி நேர்மாறும் சார்பின் வகைக்கெழு காணும் முறையை விளக்குவோம். $x=\phi(y)$ எனும் சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். இத்தொடர்பிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ -இன் மதிப்பைப் பின்வருமாறு பெறலாம். இங்கு, x, y என்ற மாறிகளில் ஏற்படும் கூடுந்தொகைகளை முறையே $\Delta x, \Delta y$ என்க. இப்பொழுது,

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}$ என்று தெரியும்.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}$$

i.e., $$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \frac{dx}{dy}\neq 0$$

அதாவது, x-ஐக் குறித்த y-இன் வகைக்கெழு, y-ஐக்குறித்து x-இன் வகைக்கெழுவின் தலைகீழ் மதிப்புக்குச் சமம்

vLj J f f hl L : $x = 3y^2$ எனில், $\frac{dx}{dy}=6y$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{6y}$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = 4x^3$ எனில், $\frac{dy}{dx} = 12x^2$

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{12x^2}$$

எடுத்துக்காட்டு: கீழ்க்கண்ட சார்பலனுக்கு x-ஐக் குறித்த வகைக்கெழு காண்க.

$$x = y^2 + 9y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{dx}{dy} = 2y + 9$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y+9}$$

இதே போன்று, $y = e^x$ எனும் சார்பின் நேர்மாறுச் சார்பு $x = \log_e^{y}$ என்பதாகும். $\sin x . \cos x . \tan x$ ஆகியவற்றின் நேர்மாறும் சார்புகளை முறையே $\sin^{-1}(y) . \cos^{-1}(y) . \tan^{-1}(y)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். மேலும், $f(x)$-இன் நேர்மாறுச் சார்பு $\phi(y)$ என்றால், $\phi(y)$-இன் நேர்மாறுச் சார்பு $f(x)$ என்றும் கூறுகிறோம்.

(11). அடுக்கு மாறிச்சார்பின் வகைக்கெழு காணுதல் (Derivatives of exponential functions)

அடுக்கு மாறிச் சார்பின் நேரெதிர் தொடர்பே மடக்கைச் சார்பாகும்.

வகைக்கெழு காண் : கொடுக்கப்பட்ட $f(x)$ என்ற அடுக்கு

மாறிச் சார்புக்கு வகையீடு $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ காண்.

$x = e^{y}$ எனில் $\rightarrow (1)$

$\therefore y = \log_e x$

$x = \log_e y$ எனில் $\rightarrow (2)$

$y = e^{x}$

இவ்வாறு இரு சார்புகளும் தொடர்புடையதெனில் அவைகளின் வகைக்கெழுவுகளும் தொடர்புடையதாகும்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

$$\frac{de^{x}}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\frac{d\log_e y}{dy}} = \frac{1}{1/y} = y = e^{x},$$

$\left(y = e^{x} \text{எனில் } x = \log_e y\right)$

கொடுக்கப்பட்ட அடுக்குமாறிச் சார்பே அச்சார்பின் வகைக்கெழுவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு: $y = Ae^{rx}$ எனில் $\frac{dy}{dx} = rAe^{rx} = ry$

எடுத்துக்காட்டு: $y = e^{2x}$ எனில் $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$

எடுத்துக்காட்டு: $y = e^{-7x}$ எனில் $\frac{dy}{dx} = -7e$

(12). மடக்கையைப் பயன்படுத்தி வகையிடல் (Logarithmic differentiation)

வகைப்படுத்த வேண்டிய சார்பை y எனக் குறித்துக் கொண்டு, e-இன் அடிப்படையில் மடக்கையெடுத்து வகையிட்டு, அதிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காணும் முறையைக் கீழ்க்கண்ட இடங்களில் கையாள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு: $y = u^v$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ கண்டுபிடி.

$$\log y = v \log u$$

இருபுறமும் x-ஐ குறித்து வகையிட

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left[\log u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\frac{1}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[(\log u)\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{v}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)\right]$$

வகைப்படுத்த வேண்டிய சார்பு பல காரணிகளை உடையதால் இருத்தல் (இதை மடக்கை எடுக்காமலேயே வகையிடலாம் என்றாலும், மடக்கை எடுத்து வகையிடல் எளிது).

எடுத்துக்காட்டு: x குறித்த வகைக்கெழு காண் : $\frac{1+x\sqrt{2+x}}{(1-x)^2\sqrt[3]{2-x}}$

$$y = \frac{1+x\sqrt{2+x}}{(1-x)^2\sqrt[3]{2-x}}$$

$$\log y = \log(1+x) + \frac{1}{2}\log(2+x) - 2\log(1-x) - \frac{1}{3}\log(2-x)$$

x-ஐக் குறித்து வகையிட

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1+x)}+\frac{1}{2(2+x)}+\frac{2}{(1-x)}-\frac{1}{3(2-x)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(1+x)\sqrt{2+x}}{(1-x)^2\sqrt[3]{2-x}}\left[\frac{1}{(1+x)}+\frac{1}{2(2+x)}+\frac{2}{(1-x)}-\frac{1}{3(2-x)}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு: வகையிடுக: $\dfrac{(1-x)\sqrt{x^2+2}}{(x+3)\sqrt{x-1}}$

தீர்வு: $y=\dfrac{(1-x)\sqrt{x^2+2}}{(x+3)\sqrt{x-1}}$ என்க.

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க,

$$\log y=\log[(1-x)\sqrt{x^2+2}]-\log[(x+3)\sqrt{x-1}]$$

$$\log y=\log[(1-x)+\frac{1}{2}\log(x^2+2)-\log(x+3)-\frac{1}{2}\log(x-1)$$

x-ஐப் பொறுத்து வகையிட:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1-x}+\frac{2x}{2(x^2+2)}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2(x-1)}$$

$$\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{x}{(x^2+2)}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{x+3}\right]$$

$$=\frac{(1-x)\sqrt{x^2+2}}{(x+3)\sqrt{x-1}}\left[\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{x+3}\right]$$

(13). மடக்கைச் சார்பின் வகைக்கெழு காணுதல்

$$y = \log u, u = g(x) \text{ எனில் } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = \log(10x^2 + 4x - 8)$

$$u = (10x^2 + 4x - 8)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{(10x^2 + 2x + 8)}(20x + 4)$$

$$= \frac{20x + 4}{10x^2 + 2x + 8}$$

$$= \frac{10x + 2}{5x^2 + x4}$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = \log\sqrt{x}$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$u = \sqrt{x}$ எனில் சங்கிலித் தொடர்விதிப்படி (Chainrule):

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ ஆகும்.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = \log ax$, $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\left(\frac{du}{dx}\right) u = ax$$

$$= \frac{1}{ax} a$$

$$= \frac{1}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = \log x^5$ எனில் $\dfrac{dy}{dx}$ கண்டுபிடி.

$$u = x^5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{u} 5x^4$$

$$= \frac{1}{x^5} 5x^4$$

$$= \frac{5}{x}$$ (அல்லது)

$y = \log x^5$ எனில் $\dfrac{dy}{dx}$ ஆனது.

$$y = \log x^5 = 5 \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = 5\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு: $y = a^x$ எனில் $\frac{dy}{dx} = a^x \log a$ a என்பது ஒரு மாறிலி.

எடுத்துக்காட்டு: $y = 16^x$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ கண்டுபிடி.

$$\frac{dy}{dx} = 16^x \log 16$$

(or)

$$y = 16^x$$

$$\log y = x \log 16$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log 16$$

$$\frac{dy}{dx} = 16^x \log 16$$

$$y = \log[f(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

$y = \log(10x^2 + 2x - 5)$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்.

$$\frac{dy}{dX} = \frac{d}{dx}[\log(10x^2 + 2x - 5)]$$

$$= \frac{1}{(10x^2 + 2x - 5)} \cdot \frac{d}{dx}(10x^2 + 2x - 5)$$

$$= \frac{1}{(10x^2 + 2x - 5)}(20x + 2)$$

$$= \frac{(20x + 2)}{(10x^2 + 2x - 5)}$$

(14). ஒரு சார்பை மற்றொரு சார்பைக் குறித்து வகையிடல்-துணையலகின் மூலம் வகையிடல் (Differentiation of parametric functions).

u, v எனும் இரண்டு மாறிகள் மூன்றாவது மாறி t-இன் சார்புகளாக இருப்பின், u, v என்பவை துணையலகுச் சார்புகள் எனப்படும்.

$u = f(t),\ \ v = \phi(t)$ என்பன துணையலகுகள்.

t-இன் உயர்வாகிய Δt க்கு இணையாக u, v க்களின் உயர்வை, $\Delta u, \Delta v$ என்போம்.

எனவே $u + \Delta u = f(t + \Delta t)$ மற்றும்

$v + \Delta v = \phi(t + \Delta t)$

$\Delta u = f(t + \Delta t) - f(t),$

$\Delta v = \phi(t + \Delta t) - \phi t.$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{dt} \Big/ \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \frac{dv}{du} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta u} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta u}{\Delta t}} \right] = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}}$$

இங்கு $\frac{du}{dt} \neq 0.$ $\Delta u \to 0 \Rightarrow$ $f(t + \Delta t) \to f(t) \Delta t \to 0$ என்பதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு: $\sqrt{x^2+1}$ என்பதை $2x^3$ என்பதைக் குறித்து வகையிடு

$$u = f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$v = \phi(x) = 2x^3$ எனக் கொள்வோமெனில்

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ சங்கிலி விதிப்படி

$$\frac{dv}{dx} = 6x^2$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{dx}\bigg/\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \div 6x^2$$

$$= \frac{x}{6x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{6x\sqrt{x^2+1}}$$

எடுத்துக்காட்டு: $\sqrt{t^2+1}$ என்பதை $2t^3$ என்பதைக் குறித்து வகையிடு.

$$u(t) = \sqrt{t^2+1}$$

$v(t) = 2t^3$ எனக்குறிப்போம்.

$$\frac{du}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \qquad i.e., \left[\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$\frac{dv}{dt} = 6t^2$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{dt} / \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{t}{6t^2\sqrt{t^2+1}}$$

$$= \frac{1}{6t\ \sqrt{t^2+1}}$$

தொகைநுண் கணிதமானது (Integral Calculus) வகை நுண்கணிதத்தின் தலைகீழ் மாற்று முறையாகும். எனவே கீழ்க்காணும் அட்டவணையை மனதில் இருத்திக்கொள்வது அவசியம்.

வகையிடல் (Derivatives)	தொகையிடல் (Integrals -Antiderivatives)
$\frac{d(x)}{dx} = 1$	$\int 1dx = x + c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$
$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C$
$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{\log(ax+b)}{a}\right] = \frac{1}{ax+b}$	$\int \frac{1}{(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\log(ax+b) + C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}\right) = (ax+b)^n$	$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^n}{a(n+1)} + C$

தொடர்ந்து வகையிடல் (Successive Differentiation)

$y = f(x)$ எனும் தொடர்ச்சியான சார்பை ஒருமுறை வகையிட $\frac{dy}{dx}$ எனும் y-இன் வகைக்கெழு கிடைக்கும். பொதுவாக, $\frac{dy}{dx}$ என்ற வகைக்கெழுவும் ஒரு x-இன் சார்பாக இருக்கும், இதை x-ஐச் சார்ந்த y-இன் முதல் வகைக்கெழு என்றும் கூறுவர். $\frac{dy}{dx}$ என்ற x-இன் சார்பும் வகையிடத்தக்கதாக இருக்குமானால், இதன் வகைக்கெழுவாகிய $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$-ஐ y-இன் இரண்டாம் வகைக்கெழு என்கிறோம். இந்த வகைக்கெழுவைக் குறிப்பிட,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), y'', y_2, D^2(y)$$

எனும் அடையாளங்களில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பயன்படுத்துதல் வழக்கமாகும்.

இதே போன்று $\frac{d^2y}{dx}$ -ம் ஒரு x-இன் சார்பாக இருக்கக் கூடுமாதலால், அது வகையிடத்தக்கதாக இருக்குமானால், அதன் வகைக்கெழுவை y-இன் மூன்றாம் வகைக்கெழு என்பர். அந்த வகைக்கெழுவை,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}, y''', y_3 D^3(y)$$

என்ற குறியீடுகளினால் குறிப்பிடுகிறோம்.

குறிப்பு : பொதுவாக, x ஐக் குறித்த y-இன் முதல், இரண்டாம் மூன்றாம்,.... பொதுவாக n ஆம் வகைக்கெழுக்கள் முறையே

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

என்று குறிக்கப்படும். இவற்றின் வேறு வடிவங்கள் :

$$y'(x), y''(x), y'''(x), \ldots, y^{n'}(x);$$
$$y_1(x), y_2(x), y_3(x) \ldots, y_n(x);$$
$$Dy, D^2y, D^3y, \ldots, D^ny\left(D = \frac{d}{dx}\right)$$

$y = f(x)$ என்பது சார்பு எனில், இவற்றை

$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ எனவும் குறிக்கலாம். சாராத மாறி இன்னதென்று தெளிவாகத் தெரிவதனால் அதை அடைப்பில் குறிப்பிடாமலும் இருக்கலாம். இம்மாதிரி கிடைக்கப்பெறும் x-ஐச் சார்ந்த y-இன் வகைக்கெழுக்களாகிய $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ என்பனவற்றை y-இன் தொடர்ந்த வகைக்கெழுக்கள் அல்லது அடுத்தடுத்த வகைக்கெழுக்கள் என்று கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு: கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்புகளின் $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ கணக்கிடுக.

$$(i) \quad \left(x^3 - 12x + 4\right)$$
$$(ii) \quad x(1-x)^2$$
$$(iii) \quad \left(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)$$

தீர்வு:

(i) $y = x^3 - 12x + 4$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12 + 0$$
$$= 3\left(x^2 - 4\right)$$

மேலும்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3(2x - 0)$$
$$= 6x$$

(ii) $y = x(1-x)^2$ என்க.

$$\frac{dy}{dx} = 1(1-x)^2 + x.2(1-x)(-1)$$
$$= (1-x)\left[(1-x) - 2x\right]$$
$$= (1-x)(1-3x)$$

மேலும் $\dfrac{d^2y}{dx^2} = (-1)(1-3x) + (1-x)(-3)$

$$= (6x - 4)$$

(iii) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(1 + x + x^2\right)(-1 + 2x) - \left(1 - x + x^2\right)(1 + 2x)}{\left(1 + x + x^2\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(x^2 - 1\right)}{\left(1 + x + x^2\right)^2}$$

மேலும்

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(1+x+x^2\right).2(x)-2\left(x^2-1\right)\frac{d}{dx}\left[\left(1+x+x^2\right)^2\right]}{\left(1+x+x^2\right)^4}$$

சில திட்ட அமைப்புச் சார்புகளின் n-ஆம் வகைக்கெழு காணுதல்

எடுத்துக்காட்டு:

$$y=(ax+b)^m$$

என்றால், $y_n = a^n m(m-1)(m-2)....(m-n+1)(ax+b)^{m-n}$

நிரூபணம்:

$$y=(ax+b)^m$$

ஒரு முறை X-ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழு காண்.

$\frac{dy}{dx}=m(ax+b)^{m-1}\frac{d}{dx}(ax+b)$ என்று பெற முடியும்.

i.e. $y_1 = m(ax+b)^{m-1}a$

$$= am(ax+b)^{m-1}$$

மேலும், $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

இதே போன்று, $y^3 = a^3 m(m-1)(m-2)(ax+b)^{m-3}$ என்று நிறுவலாம். இவ்வாறு, அடுத்தடுத்த வகைக்கெழுக்களைக் காண்போமானால், இறுதியாக,

$y_n = a^n m(m-1)(m-2).....(m-n+1)(ax+b)^{m-n}$ என்று நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: $y=e^{ax}$ என்றால், $y_n = a^n e^{ax}$

நிருபணம் :

$y = e^{ax}$ என்ற சார்பை x-ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழு காண்.

$y_1 = \frac{d}{dx}(e^{ax}) = e^{ax}a$ என்றும்.

$y_2 = \frac{d}{dx} = \left(e^{ax}a\right) = a\left(e^{ax}a\right)^{ax} = a^2e^{ax}$ என்றும்.

$y_3 = \frac{d}{dx} = \left(a^2e^{ax}\right) = a^2\left(e^{ax}a\right)^{ax} = a^3e^{ax}$ என்றும் பெற முடியும்.

x-ஐச் சார்ந்த மூன்றாம் வகைக்கெழு காண்: $(4x-3)^{\frac{3}{2}}$

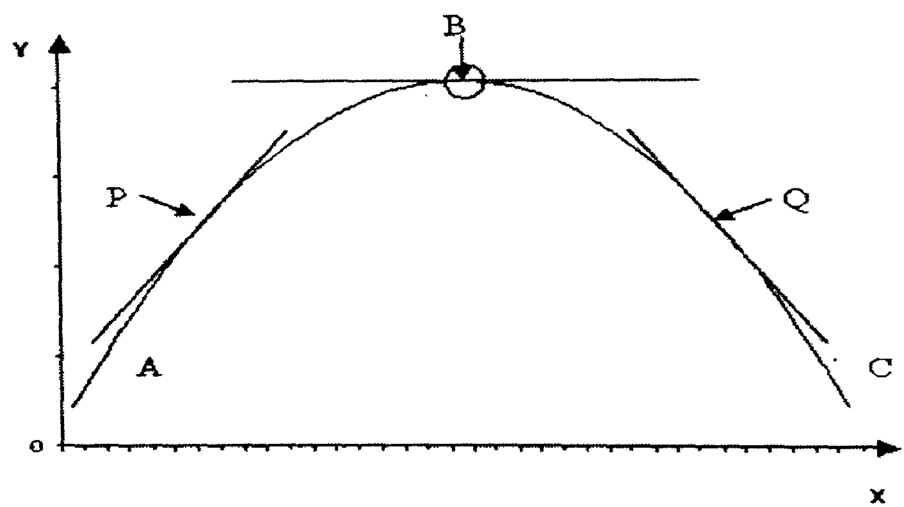
$$y = (4x-3)^{\frac{3}{2}}$$
$$y_1 = \frac{3}{2}(4x-3)^{\frac{1}{2}}.4$$
$$= 6(4x-3)^{\frac{1}{2}}$$
$$y_2 = 6\frac{1}{2}(4x-3)^{-\frac{1}{2}}.4$$
$$= 12(4x-3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$y_3 = 12(-\frac{1}{2})(4x-3)^{-\frac{3}{2}}.4$$
$$= -24(4x-3)^{-\frac{3}{2}}$$

மூன்றாம் வகைக்கெழு: $\frac{d^3y}{dx^3} = -24(4x-3)^{-\frac{3}{2}}$

மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் (Maxima and Minima)

இங்கு x-இன் எம்மதிப்புகளுக்கு, $f(x)$ எனும் சார்பின் மதிப்பு மீப்பெரிதாக அல்லது மீச்சிறியதாக இருக்கும் என்பதை அறிய, வகைக் கெழுக்களை எவ்வாறு பயன்படுத்த முடியும் என்பதை காணவிருக்கிறோம். முதலில் கூடுஞ்சார்பு, குறையுஞ்சார்பு இவற்றை வரையறுப்போம். பின்னர்க் கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் பெருமம், சிறுமம் ஆகியவற்றைக் காணும் முறையை விளக்குவோம்.

கூடுஞ்சார்பும் குறையும் சார்பும் (Increasing and Decreasing Functions)



$y=f(x)$ என்ற ஒரு x-இன் சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு, $f(x)$ -இன் முதல் வகைக்கெழு இருப்பதாகக் கொள்வோம். $y-$ன் மதிப்பு x-ஐச் சார்ந்திருப்பதால், x-இன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது, $y-$இன் மதிப்பும் அதிகரிக்கவோ, அல்லது குறையவோ கூடும். x-இன் மதிப்புடன் $y-$ இன் மதிப்பும் அதிகரிக்குமானால், $f(x)-$ ஐக் கூடுசார்பு என்றும், மாறாக $-x$ இன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் போது $y-$ இன் மதிப்புக் குறையுமானால், $f(x)$ ஐக் குறையும் சார்பு என்றும் அழைக்கிறோம். (x-இன்

மதிப்பு குறையும் போது, $f(x)$ – இன் மதிப்பு அதிகரித்தாலும் $f(x)$-ஐக் குறையும் சார்பு எனலாம்.

$y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும் வளைவரையைப் படத்தில் உள்ளவாறு வரைவோம். படத்திலிருந்து, A எனும் புள்ளியிலிருந்து B வரை $f(x)$ – இன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் என்றும், B – யிலிருந்து C வரை, $f(x)$ – ன் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே செல்கிறது என்றும் அறியலாம். AB எனும் பகுதியில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை P என்றும், BC என்ற பகுதியில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை Q என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

P எனும் புள்ளியில் $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ – இன் மதிப்பு மிகையாக இருக்கும். இதே போன்று AB எனும் பகுதியினுள் இருக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ – இன் மதிப்பு மிகையாக இருக்கும். இவ்வாறு, ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் அமையும் x-இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் ஒப்பக் கிடைக்கப்பெறும் $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ – இன் மதிப்பு மிகையாக இருக்குமானால். அந்த இடைவெளியில் $f(x)$ என்பது ஒரு கூடுஞ்சார்பாக இருக்கும் என அறிகிறோம். அதாவது, எந்த ஓர் இடை. வெளியிலும் $f(x)$ எனும் சார்பு கூடுஞ்சார்பாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை, அந்த இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், $\frac{dy}{dx} > 0$ என்றிருக்கவேண்டும் என்பதாகும்.

எனும் புள்ளியில் $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ – இன் மதிப்பு குறையெண்ணாக இருக்கும். இதே போன்று BC எனும் பகுதியினுள் இருக்கும்

ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$- இன் மதிப்பு குறையெண்ணாக இருக்கும். இவ்வாறு, ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் அமையும் - x ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் ஒப்பக் கிடைக்கப்பெறும் $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$- இன் மதிப்பு குறையெண்ணாக இருக்குமானால். அந்த இடைவெளியில் $f(x)$ என்பது ஒரு குறையும் சார்பாக இருக்கும் என அறிகிறோம். அதாவது, ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் $f(x)$ என்ற சார்பு குறையும் சார்பாக இருப்பதற்கான நிபந்தனையாவது, அந்த இடைவெளியில் அமையும் x-இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் ஒப்ப $\dfrac{dy}{dx}<0$ என்றிருக்க வேண்டும் என்பதாகும்.

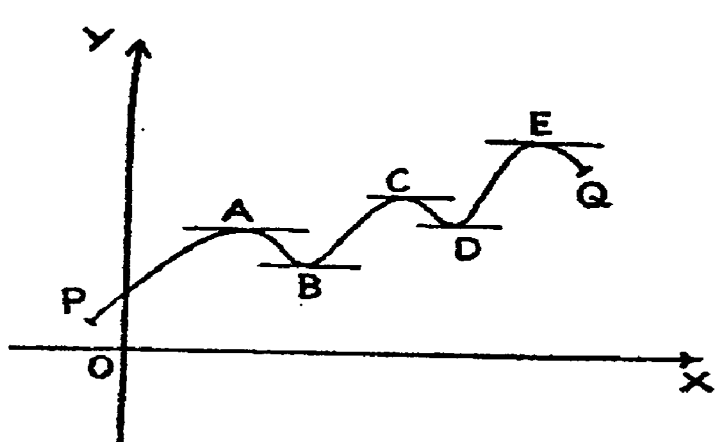
இவ்வாறு, ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் $f(x)$ என்ற சார்பு கூடுஞ் சார்பாக அல்லது குறையும் சார்பாக இருப்பதை அறிய $f(x)$- இன் வகைக்கெழுவின் அடையாளம் பயன்படுவதை அறிகிறோம்.

குறிப்பு: இம்முடிவுகளைப் பின்வரும் விளக்கத்தின் மூலமும் பெறக் கூடும். $y=f(x)$ எனும் சார்பு கூடுஞ்சார்பாக இருக்குமானால் x, y இவற்றின் கூடுந்தொகைகளாகிய $\Delta x, \Delta y$ இரண்டும் ஒரே அடையாளத்தை உடையனவாகவும் (அதாவது இரண்டுமே மிகையாகவோ, அல்லது குறையாகவோ இருக்கும்), அச் சார்பு குறையும் சார்பாக இருப்பின், Δx, Δy என்பன மாறுபட்ட அடையாளங்களை உடையனவாகவும் (அதாவது Δx குறையாக இருப்பின் Δy மிகையாகவும், Δx மிகையாக இருந்தால் Δy குறையாகவும்) இருக்க வேண்டுமென்பது நன்கு விளங்கும். மேலும் $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதால், $\dfrac{dy}{dx}$- இன் அடையாளம், $\Delta y, \Delta x$ இவற்றின் அடையாளங்களைப் பொறுத்து

அமையும். அதாவது கூடுந்தொகைகள் இரண்டும் மிகையாகவோ அல்லது இரண்டும் குறையாகவோ இருந்தால் $\left(\frac{dy}{dx}\right)$- இன் அடையாளம் மிகையாகவும், கூடுந் தொகைகள் இரண்டும் மாறுபட்ட அடையாளங்களை உடையனவாக இருப்பின், $\left(\frac{dy}{dx}\right)$- இன் அடையாளம் குறையாகவும் இருக்கும் என்று தெரிகிறது. எனவே, $f(x)$ கூடுஞ் சார்பாக இருக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f'(x)>0$ என்றும், $f(x)$ குறையும் சார்பாக இருக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f'(x)<0$ என்றும் அமைந்திருக்கும் என்று அறிகிறோம்.

மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள்

$y=f(x)$ என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான x- இன் சார்பாக இருக்கட்டும். மேலும் அச்சார்பின் முதல் இரண்டு வகைக் கெழுக்களும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள இடைவெளியில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். $y=f(x)$ எனும் சமன்பாட்டினால் குறிக்கப்படும் வளை வரையின் ஒரு பகுதியாகிய PQ-வைப் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு எடுத்துக்கொள்வோம். வளைவரையின் மீது குறிப்பிடப்பட்டுள்ள A,B,C,D,E ஆகிய ஐந்து புள்ளிகளின் x- ஆயக் கூறுகளை முறையே a,b,c,d,e எனக் கொள்வோம்.



வளைவரையின் மீதுள்ள $x=a$ எனும் புள்ளியில் கிடைக்கப் பெறும் y – இன் மதிப்பு, அப்புள்ளிக்கு மிக அருகிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் பெறப்படும் y – இன் மதிப்பை விடப் பெரியதாக இருக்குமானால் $x=a$ என்ற புள்ளியில் $y=f(x)$ என்ற சார்பு மீப்பெரு மதிப்பை உடையதாகக் கூறுகிறோம். மேலும் அப்புள்ளியில் கிடைக்கும் $f(x)$-இன் மதிப்பாகிய $f(a)$என்பது $f(x)$ – இன் மீப்பெரு மதிப்பு (அல்லது மீப்பெருமம் அல்லது பெருமம்) எனப்படும். படத்திலிருந்து A எனும் புள்ளியின் குத்துயரம் அதனருகிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் குத்துயரத்தைவிடப் பெரியதாகும் எனக் கண்டுகொள்ளலாம்.

இதேபோன்று, $x=b$ எனும் புள்ளியில் கிடைக்கும் y – இன் மதிப்பானது, அதற்கருகில் இருக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் கிடைக்கப்பெறும் இன் மதிப்பைவிடச் சிறியதாக இருக்குமானால், $x=b$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$ எனும் சார்பு மீச்சிறு மதிப்பை உடையது என்றும், $f(b)$ எனும் மதிப்பு $f(x)$ – இன் மீச்சிறு மதிப்பு (அல்லது மீச்சிறுமம் அல்லது சிறுமம்) என்றும் கூறுகிறோம். படத்திலிருந்து, B என்ற புள்ளியின் குத்துயரம், அதனருகிலுள்ள மற்றெல்லாப் புள்ளிகளின் குத்துயரங்களையும் விடச் சிறியதாக இருக்கும் என்று அறிகிறோம்.

படத்தில் காணப்படும் PQ எனும் பகுதியில் கொடுக்கப்பட்ட வளைவரைக்கு, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பெருமங்களும், சிறுமங்களும் இருப்பதைக் கவனிக்கவும். அதாவது, $f(x)$ எனும் சார்பிற்கு A, C, E என்ற மூன்று புள்ளிகளிலும் மீப்பெரு மதிப்புகளும், B, D எனும் இரண்டு புள்ளிகளிலும் மீச்சிறு மதிப்புகளும் உள்ளன என்று தெரிகிறது. மேலும், A என்ற புள்ளியில் காணப்படும் $f(x)$ – இன் பெருமம், C, E எனும் புள்ளிகளில் கிடைக்கப் பெறும் பெருமங்களைவிடச் சிறியதாகவும் இருக்கிறது என்பது நன்கு விளங்கும். எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் பெறப்படும் ஒரு சார்பின் பெருமம்(அல்லது சிறுமம்) அப்புள்ளிக்கு மிக அருகிலுள்ள புள்ளிகளில் கிடைக்கும் அச்சார்பின் மதிப்புகளைவிடப் பெரியதாக (அல்லது சிறியதாக) இருக்குமே தவிர, கொடுக்கப்பட்டுள்ள இடைவெளி முழுவதும் காணப்படும் $f(x)$ – இன் மதிப்புகளுள்

மிகப் பெரியதாக (அல்லது மிகச் சிறியதாக) இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை என்பதைப் புரிந்துகொள்ளுதல் வேண்டும். மேலும், இரண்டு பெருமங்களுக்கிடையே குறைந்தது ஒரு சிறுமமும், இரண்டு சிறுமங்களுக்கிடையே குறைந்தது ஒரு பெருமமும் இருக்கும் என்பதையும் அறிந்துகொள்ளுதல் நலம். இனிப் பெருமம், சிறுமம் காணும் முறையைப் பார்ப்போம்.

சார்பின் பெருமம், சிறுமம் காணும் முறை

படத்தில் காணப்படும் வளைவரையின் அமைப்பிலிருந்து, $f(x)$ என்ற சார்பானது, A எனும் புள்ளிக்கு இடப்புறம் கூடுஞ் சார்பாகவும், A–க்கு வலப்புறம் குறையும் சார்பாகவும் இருப்பது நன்கு விளங்கும். எனவே, A–க்கு இடப்புறமுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f'(x)$ எனும் வகைக் கெழுவின் மதிப்பு மிகையாகவும், A–க்கு வலப்புறமுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f'(x)$-இன் மதிப்பு குறையாகவும் இருக்கவேண்டும். அதாவது, $f'(x)$ இன் மதிப்பானது $x = a$ எனும் மதிப்பை ஏற்கும் முன் மிகையாகவும் அம் மதிப்பை அடைந்த பிறகு குறையாகவும் இருக்கும் என்பது பொருளாகும். ஆனால், இரண்டாம் வகைக்கெழு $f''(x)$ இருப்பதாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், $f'(x)$ என்ற சார்பு தொடர்ச்சியானதாக இருக்கவேண்டும். அதாவது x-இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் ஒப்ப $f'(x)$–க்கும் ஒரு மதிப்பு இருந்தாக வேண்டும். எனவே, $f'(x)$ என்ற சார்பு மிகை மதிப்பிலிருந்து குறை மதிப்பை அடையும் முன் பூச்ஸயத்தை அடையவேண்டும் என்பது தெளிவாகும். அதாவது, $x = a$ என்ற புள்ளியில $f'(x)$-இன் மதிப்பு பூச்ஸயமாகும். இவ்வாறு, $f'(x)$ என்று பெறுகிறோம்.

மேலும் $f'(x)$ என்பதும் ஒரு x-இன் சார்பாக இருக்குமாதலால், அச்சார்பு, $x = a$ எனும் புள்ளிக்கருகில் மிகை மதிப்பிலிருந்து குறை மதிப்பை அடைகிறது. எனவே, $x = a$ புள்ளிக்கருகில் $f'(x)$ எனும் சார்பு குறையும் சார்பாக உள்ளது என்று தெரிகிறது. எனவே, $x = a$ எனும்போது $f'(x)$-இன் வகைக்கெழுவாகிய $f'(x)$ இன் மதிப்பு குறையானதாக இருக்க

வேண்டும். அதாவது, $f''(a)<0$ என்று அறிகிறோம்.

இவ்வாறு, $x=a$ எனும் புள்ளியில் $f(x)$-இன் மதிப்பு மீப்பெரு மதிப்பாக இருக்க வேண்டுமானால்,

1. $f'(a)=0$ என்றும்

2. $f''(a)<0$ என்றும் இருக்கவேண்டும் என்று தெரிகிறது.

3. இதேபோன்று, $x=b$ என்ற புள்ளியில் $f(x)-$இன் மதிப்பு மீச்சிறு மதிப்பாக இருக்கவேண்டுமானால்.

$f'(b)=0$ என்றும்,

$f''(b)>0$ என்றும் இருக்கவேண்டும் என்று தெரிகிறது.

நடைமுறையில் $f(x)$ என்ற சார்பின் மீப்பெருஇ மீச்சிறு மதிப்பு காண கீழ்க்காணும் வழியைப் பின்பற்றுதல் நலமாகும்.

1) $f'(x)-$ இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து அதைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்த வேண்டும்.

2) $f''(x)=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணுதல் வேண்டும். அவற்றை $\alpha,\beta,\gamma......$ எனக் கொள்வோம்.

3) $x=\alpha,\beta,\gamma,......$ எனும் போது $f''(x)-$ இன் அடையாளத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். பின் $f''(\alpha)<0$ எனில் $x=\alpha$ எனும் புள்ளியில் $f(x)$ என்ற சார்பு மீப்பெரு மதிப்பு உடையதாகவும், $f''(\alpha)>0$ எனில், $x=\alpha$ எனும் புள்ளியில் $f(x)$ என்பது மீச்சிறு மதிப்பு உடையதாகவும் தெரியவரும். இதேபோன்று, ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f(x)-$ இன் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பு காண முடியும்.

மீப்பெரு மதிப்பையும், மீச்சிறு மதிப்பையும் கண்டறிவதற்குக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையை மனதில் இருத்திக்கொள்வது அவசியம்.

	மீப்பெருமம்	மீச்சிறுமம்
தேவையான நிபந்தனை	$\frac{dy}{dx}=0$	$\frac{dy}{dx}=0$
போதுமான நிபந்தனை	$\frac{dy}{dx}=0 \quad \frac{d^2y}{dx^2}<0$	$\frac{dy}{dx}=0 \quad \frac{d^2y}{dx^2}>0$

எடுத்துக்காட்டு: கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்புகளின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

$(i)\quad \left(x^3-12x+4\right)$

$(ii)\quad x(1-x)^2$

$(iii)\quad \left(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)$

தீர்வு:

$(i)\quad y=x^3-12x+4$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-12+0$$

$$=3\left(x^2-4\right)$$

மேலும்,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=3(2x-0)$$

$$=6x$$

இப்பொழுது, $\frac{dy}{dx}=0$ என்றிட, $x^2-4=0$ என்றாகும். அதாவது, $x=2$, அல்லது (-2) என்று கிடைக்கும்.

(2)-லிருந்து, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=2}=6\times 2=12$, ஒரு மிகை எண்ணாகும். ஆகையால் $x=2$ எனில், y மீச்சிறு மதிப்பை அடையும் என்று தெரிகிறது. மீச்சிறுமம் $y=(2)^3-12(2)+4=12.$

இதேபோன்று, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-2}=6*-2=-12$, ஒரு குறையெண்ணாக இருப்பதால், $x=-2$ எனில், y – இன் மதிப்பு மீப்பெரு மதிப்பை அடையும் என்று தெரிகிறது . எனவே, y – இன் மீப்பெருமம்:

$$y=(-2)^3-12(-2)+4=20.$$

(ii) $y=x(1-x)^2$ என்க.

$$\frac{dy}{dx}=1(1-x)^2+x.2(1-x)(-1)$$
$$=(1-x)[(1-x)-2x]$$
$$=(1-x)(1-3x)$$

மேலும், $$\frac{d^2y}{dx^2}=(-1)(1-3x)+(1-x)(-3)$$
$$=(6x-4)$$

$\frac{dy}{dx}=0$ எனும்போது, $x=1$ அல்லது $\frac{1}{3}$ என்று கிடைக்கும்.

மேலும், $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}=6*1-4=2,$ ஒரு மிகை எண். ஆகையால்,

$x=1$ எனும்போது, $y-$ இன் மதிப்பு மீச்சிறு மதிப்பை அடையும் என்று தெரிகிறது.

எனவே, $y-$ இன் சிறுமம் $=0$ எனக் கண்டுகொள்ளலாம்.

இதேபோன்று, $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{1}{3}} = 6*\frac{1}{3}-4=-2$, ஒரு குறையெண்ணாக இருப்பதால், $y-$ இன் மதிப்பு மீப்பெருமமாக இருக்கும்.

எனவே, $y-$ இன் பெருமம் $=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{27}$

(iii) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(1+x+x^2\right)(-1+2x)-\left(1-x+x^2\right)(1+2x)}{\left(1+x+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(1+x+x^2\right)^2}$$

மீண்டும்,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(1+x+x^2\right).2(x)-2\left(x^2-1\right)\frac{d}{dx}\left[\left(1+x+x^2\right)^2\right]}{\left(1+x+x^2\right)^4}$$

இப்பொழுது, $\dfrac{dy}{dx}$ ஐப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்த,

$\left(x^2-1\right)=0$ என்றாகும்.

அதாவது, $x = \pm\ 1$ என்று கிடைக்கும்.

மேலும், $x = 1$ எனில் $\dfrac{d^2y}{dx^2}$-இன் மதிப்பு மிகையாகவும்,

$x = -1$ எனில், $\dfrac{d^2y}{dx^2}-$ இன் மதிப்பு குறையாகவும் இருக்கும் என்று அறிகிறோம்.

ஆகையால், $x = 1$ எனும்போது, $y-$இன் மதிப்பு மீச்சிறியதாகவும், $x = -1$ எனும்போது, $y-$இன் மதிப்பு மீப்பெருமமாகவும் இருக்கும் எனத் தெரிகிறது.

எனவே, மீப்பெரு $y = \dfrac{1-(-1)+1}{1-1+1} = 3$

மீச்சிறு $y = \dfrac{1-1+1}{1+1+1} = \dfrac{1}{3}$

எடுத்துக்காட்டு: $x^3 + 3x^2 - y^2 + 4$ என்ற சார்பினை மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளுக்குப் பரிசோதிக்கவும்.

தீர்வு:

$u = x^3 + 3x^2 - y^2 + 4$ என்க.

$\therefore \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6x;$ மற்றும் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y} = 6x + 6$

இதே போல், $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y;$ மற்றும் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$

மேலும், $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(-2y)$$
$$= 0$$

இப்பொழுது $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0$

i.e., $x = 0, -2$

இதேபோன்று $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = 0$

எனவே, தேவையான புள்ளிகள் $P(0,0)$, $Q(-2,0)$ என்பனவாகும்.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P = 6 > 0; \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P + -2 < 0$$
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P = 6(-2) = -12 < 0$$

ஆனால், $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_P = 0$ என்றும், $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) < \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$ என்றும் தெரிகிறது. எனவே, P எனும் புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்ட சார்பு மீப்பெருமத்தையோ அல்லது மீச்சிறுமத்தையோ அடைய முடியாது.

<+>

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள்

பொருளியலில் வகையீட்டின் பயன்பாடு இன்றியமையாதது ஆகும். வகையிடல் என்ற கருத்துரு எவ்வாறு பொருளியலில் பயன்படுகிறது என்பதைப் பற்றி இந்தப் பகுதியில் நாம் காணலாம். NkY k;வகையீட்டின் பயன்பாடுகளைப் பற்றி அறிவதற்கு முன் நாம் இங்கு பொருளியலில் உள்ள முக்கிய சொற்றொடர்களை அறிமுகப்படுத்துவோம்.

தேவைச் சார்பு (Demand function)

சந்தையில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் விலை p என்க. விற்கப்படும் பொருளின் அளவு x எனில், தேவைச் சார்பானது $q = f(p)$ ஆகும்.

அளிப்புச் சார்பு (Supply function)

சந்தையில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் விலை p என்க. விற்கப்படும் பொருளின் அளவு p எனில், அப்பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $q = f(p)$ ஆகும்.

நெகிழ்ச்சி (Elasticity)

x-ஐப் பொறுத்து $y = f(x)$ என்ற சார்பின் நெகிழ்ச்சி

$$\eta = \frac{Ey}{Ex}$$

$$\eta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

x-ஐப் பொறுத்து y-இன் நெகிழ்ச்சியானது, $\Delta x \to 0$ எனும் பொழுது y-இன் ஒப்ப மாறும் வீதம் y-இன் ஒப்ப மாறும் வீதத்திற்கு உள்ள விகிதத்தின் எல்லையே ஆகும். (η ஒரு மிகை எண்).

எடுத்துக்காட்டு:

$y = 4x - 8$ என்ற சார்பின் நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. மேலும் $x = 6$ ஆக இருக்கும்பொழுது அதன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : $y = 4x - 8 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 4$

நெகிழ்ச்சி $\eta = \dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}$

$$= \frac{x}{4x-8}(4)$$

$$= \frac{x}{x-2}$$

$x = 6$ எனில் $\eta = \dfrac{6}{6-2} = \dfrac{3}{2}$

தேவை நெகிழ்ச்சி (Elasticity of demand)

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளில், $q = f(p)$ என்பது தேவைச் சார்பு என்க. q என்பது தேவை, p என்பது விலை எனில், தேவை நெகிழ்ச்சி

$$\eta_d = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு p-இன் விகிதாசார ஏற்றம், q-இல் விகிதாசார இறக்கத்தைக் குறிக்குமாதலால், நெகிழ்ச்சியின் மதிப்பு எல்லா p புள்ளிகளிலும் எதிர்மறையில் இருக்கின்றதால், இதை நேர்மறையாக்குவதற்காக ஒரு எதிர்மறைக் குறியைச் (negative sign); சேர்க்கிறோம். எனவே,

$$\eta_d = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \text{ ஆகும்.}$$

தேவை வளைவரையின் சரிவு (slope) குறை எண் மற்றும் நெகிழ்வு ஒரு மிகை எண் ஆகையால் தேவையின் நெகிழ்ச்சியானது,

இப்படி வரையறையில், குறி (negative sign) சேர்ப்பதால் நெகிழ்ச்சித் தத்துவம் பொருளுடைய முறையில் மாறாது.

அதாவது q மாறி, p-இன் இறங்கும் சார்பலனாதலால், $\frac{dq}{dp}$ ஒரு எதிர்மறை மதிப்புடையது. எனவேதான் $\eta = \frac{Eq}{Ep}$ என்று நேரடியாகக் குறிப்பிடுவதற்குப் பதிலாக ஒரு (-) குறியால் $\left[\frac{Eq}{Ep}\right]$ யைப் பெருக்கி $\eta = -\frac{Eq}{Ep}$ என்று அழைக்கின்றோம்.

எந்த ஒரு புள்ளியிலாவது, $\eta = 0$ நெகிழ்ச்சியின் மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்குமானால், அந்தப்புள்ளியில் தேவை முற்றிலும் நெகிழ்ச்சியற்றதாக இருக்கும், நெகிழ்ச்சி மிகமிக அதிகமாக இருக்கும்போது, தேவை முற்றிலும் நெகிழ்ச்சியுள்ளதாக இருக்கும். மேலும் $\eta > 1$ என்றால், தேவை அதையொட்டி ஒரு நெகிழ்ச்சியுடையதாக இருக்கும். $\eta < 1$ என்றால், தேவை அதை ஒட்டியதான நெகிழ்ச்சியற்ற அளிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$q = 100 - p - p^2$ என்ற சார்பின் $p = 5$-இல் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு :

$$q = 100 - p - p^2$$

$$\frac{dq}{dp} = -1 - 2p.$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = \frac{p}{q} - \frac{dq}{dp}$

$$= -\frac{p(-1-2p)}{100-p-p^2} = \frac{p+2p^2}{100-p-p^2}$$

$p = 5$ எனில்

$$\eta_d = \frac{5+50}{100-5-25} = \frac{55}{70} = \frac{11}{14}$$

எடுத்துக்காட்டு:

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $q = \frac{p}{p-5}, (p > 5), p$ என்பது ஓர் அலகு பொருளின் விலை என்க. $p = 7$ எனில், தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு $q = \frac{p}{p-5}$ எனில் p-ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dq}{dp} = \frac{(p-5)(1) - p(1)}{(p-5)^2}$$

$$= \frac{-5}{(p-5)^2}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி

$$\eta_d = -\frac{q}{p}\frac{dq}{dp} = \frac{-P(-5)}{p}\left\{\frac{-5}{-(p-5)^2}\right\} = \frac{5}{p-5}$$

$$p = 7 \text{ எனில் } \eta_d = \frac{5}{7-5} 2.5$$

அதாவது $p = 7$ எனில் விலையானது 1% அதிகரித்தால், தேவையின் அளவு 2.5% குறைகிறது. அவ்வாறே $p = 7$ எனில் விலையானது 1% குறைந்தால், தேவையின் அளவு 2.5% அதிகரிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு:

தேவைச் சமன்பாடு $q = 8 - 2p^2$ எனில், $p = 1$ என்ற புள்ளியில் தேவையின் நெகிழ்ச்சியைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு : தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp}$

$$q = 18 - 2p^2$$

$$\frac{dq}{dp} = -4p.$$

இப்போது $p = 1$ எனில், q = 8-2(1)2 =6 . எனவே $p = 1$ என்ற புள்ளியில் தேவையின் நெகிழ்ச்சி.

$$\eta = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp}$$

$$= \frac{p}{q}.\left(-\frac{dq}{dp}\right)$$

$$= \frac{1}{6}[.-(-4(1))]$$

இங்கு $\eta < 1$ என்பதால் தேவை ஒரு நெகிழ்ச்சியற்ற தேவை (inelastic demand) எனக் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு:

தேவைச் சமன்பாடு $q = 8 - 2p^2$ என்றால் $(p = 2, q = 10)$ என்ற புள்ளியில் தேவையின் நெகிழ்ச்சியைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு : தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp}$

$$q = 18 - 2p^2$$

$$\frac{dq}{dp} = -4p.$$

தேவையின் நெகிழ்ச்சி: $\eta = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp} = \frac{p}{q}.\left(-\frac{dq}{dp}\right)$

$$= \frac{p}{q}.(4p) = \frac{4p^2}{q}.$$

$$q = 18 - 2p^2$$

$$2p^2 = 18 - q$$

$$4p^2 = 36 - 2q.$$

எனவே $\eta = \frac{4p^2}{q} = \frac{2(18-q)}{q} = \frac{36-2q}{q}$

இப்போது $q = 10$ என்ற புள்ளியில் தேவையின் நெகிழ்ச்சி

$$\eta = \frac{36 - 2(10)}{10}$$

$$= \frac{16}{10} = 1.60$$

இங்கு $\eta > 1$ என்பதால் தேவை ஒரு நெகிழ்ச்சியான தேவை (elastic demand) எனக் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு:

தேவைச் சமன்பாடு $x = \frac{27}{p^3}, \left(\frac{1}{8} < x < 8\right)$ என்றால் $x = 2$ புள்ளியில் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு : தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp}$

$$\frac{dx}{dp} = 27(-3)p^{-4.}$$

$$= \frac{-81}{p^4}.$$

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = \frac{p}{x}\left(-\frac{dx}{dp}\right)$

$$= \frac{p}{x} \cdot \frac{81}{p^4}$$

$$= \frac{p}{27} \cdot p^3 \cdot \frac{81}{p^4}$$

$$= 3$$

எனவே $x = 2$ புள்ளியில் தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta = 3$ இங்கு $\eta > 1$ என்பதால் தேவை ஒரு நெகிழ்ச்சியான தேவை (elastic demand) எனக் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு:

தேவைச் சமன்பாடு $p = 100 - x - x^2$ எனில், தேவையின் நெகிழ்ச்சியைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு:

அதாவது, p -ஐக் குறித்து x-இன் வகைக்கெழு, x-ஐக் குறித்த p -இன் வகைக்கெழுவின் தலைகீழ் மதிப்புக்குச் சமம்.

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = \frac{p}{x}\left(-\frac{dx}{dp}\right)$ அதாவது $\eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{1}{\left[-\frac{dp}{dx}\right]}$

$$= \frac{-p}{x} \cdot \left[\frac{1}{\frac{d}{dx}\left(100 - x - x^2\right)}\right]$$

$$= \frac{-p}{x} \cdot \left[\frac{1}{-1 - 2x}\right]$$

$$= \frac{+p}{x(1+2x)}$$

$$= \frac{p}{x+2x^2}$$

$$\therefore \eta = \frac{100-x-x^2}{x+2x^2}$$

எடுத்துக்காட்டு:

தேவைச் சமன்பாடு $P = 200 - 40\ln(Q+1)$ என்றால் $Q = 20$ என்ற புள்ளியில் தேவையின் நெகிழ்ச்சியைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு : தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp}$

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = \frac{p}{Q}\left(-\frac{dQ}{dp}\right)$ அதாவது p -ஐக் குறித்து Q-இன் வகைக்கெழு, Q-ஐக் குறித்த p -இன் வகைக்கெழுவின் தலைகீழ் மதிப்புக்குச் சமம்

$$\frac{dP}{dQ} = -\frac{40}{Q+1}$$

$$\frac{dQ}{dP} = -\frac{Q+1}{40}$$

$$\eta = \frac{p}{Q}.\frac{1}{\left[-\frac{dp}{dQ}\right]}$$

$$= \frac{p}{Q}.\left[\frac{Q+1}{40}\right]$$

தேவைச் சமன்பாடு $P = 200 - 40\ln(Q+1)$ என்றால் தேவையின் நெகிழ்ச்சி $Q = 20$ என்ற புள்ளியில்

$$P = 200 - 40\ln(20+1) = 78.22$$

$$\eta = \frac{78.22}{20}.\left[\frac{21}{40}\right] = 2.05$$

இங்கு $\eta > 1$ என்பதால் தேவை ஒரு நெகிழ்ச்சியான தேவை (elastic demand) எனக் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு:

$xy^2 = c(c,$ மாறிலி) எனும் தேவை வளைவரையில் தேவை நெகிழ்ச்சி எல்லாப் புள்ளிகளிலும் 2 என்ற எண்ணாக இருக்கும் என நிறுவுக. இங்கு y என்பது விலையைக் குறிக்கிறது.

தீர்வு :

$xy^2 = c$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$x = \frac{c}{y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2c}{y^3}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = \frac{y}{x}\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\frac{c}{y^2}}\left(\frac{-2c}{y^3}\right) = 2$

எடுத்துக்காட்டு:

தேவைச் சமன்பாடு $q^{\frac{4}{5}} = \frac{8}{p}$ எனில், தேவையின் நெகிழ்ச்சியைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp}$

$$\log q = \frac{5}{4}\log 8 - \frac{5}{4}\log p$$

$$\frac{d}{dp}(\log q) = -\frac{5}{4}.\frac{1}{p}$$

$$\therefore \frac{1}{x}.\frac{dq}{dp} = -\frac{5}{4}.\frac{1}{p}$$

$$\therefore \frac{p}{x}.\frac{dq}{dp} = -\frac{5}{4}$$

தேவையின் நெகிழ்ச்சி:

$$\eta = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp} = -\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\eta = \frac{5}{4} = 1.25$$

இங்கு $\eta > 1$ என்பதால் தேவை ஒரு நெகிழ்ச்சியான தேவை (elastic demand) எனக் கூறுகிறோம்.

இறுதி நிலை வருவாய்க்கும் தேவையின் நெகிழ்ச்சிக்கும் உள்ள தொடர்பு

விலை p ஆக இருக்கும்பொழுது q அலகுகள் தேவைப்படுகின்றன என்க. $\therefore p = f(q)$ (f – ஆனது வகையிடத்தக்கதாக இருக்க வேண்டும்).

மொத்த வருவாய் (Total Revenue), TR = pq

$[\therefore p = f(q)]$

q-ஐப் பொறுத்து $R(q)$-வை வகையிட கிடைப்பது இறுதி நிலை வருவாயாகும்.

$$MR = \frac{dR}{dq}$$

$$MR = \frac{d(p \times q)}{dq}$$

$$MR = p + q\frac{dp}{dq}$$

$$= p + q\frac{dp}{dq}$$

$$= p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right)$$

$$= p + q\frac{dp}{dq}$$

$$= p\left(1 - \left[-\frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right]\right)$$

$$= p\left(1 - \left[\frac{1}{-\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}}\right]\right)$$

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{p}{q} \times \frac{dq}{dp}$ என்பதால்

$$\text{MR} = = p\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

$\frac{dR}{dQ}$ – ஐ இறுதி நிலை வருவாய் (Marginal Revenue) என அழைக்கின்றோம். இங்கு இதன் மதிப்பு $= p\left(1-\frac{1}{\eta}\right)$

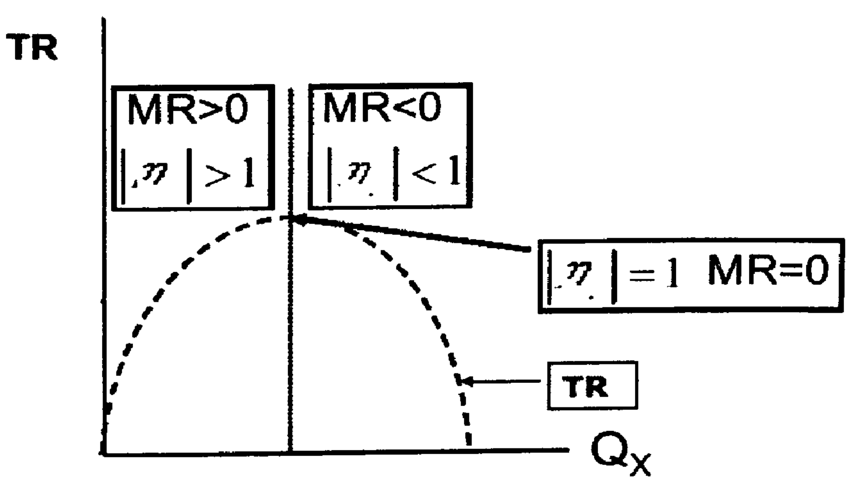
$p = AR = \frac{TR}{Q} =$ சராசரி வருவாய். எனவே

$$MR = AR\left[1-\frac{1}{\eta}\right]$$

$$= AR\left[1-\frac{1}{\eta}\right]$$

∴ இறுதி நிலை வருவாய் = சராசரி வருவாய் $\left(1-\frac{1}{\eta}\right)$

இதிலிருந்து சில முக்கிய விளைவுகளைக் கீழே விவரிப்போம்.



1. ஒரு பண்டத்தின் அளவு, விலை, தரப்பட்ட நிலையில் $\eta > 1$ என்றால், விலையில் ஒரு சிறிய இறக்கம் ஏற்பட்டால், தேவையில் விகிதாசார ஏற்றம் அதிகமாகிறது.

அதாவது $\eta > 1$ என்றால் $\frac{1}{\eta} < 1$

$$1 - \frac{1}{\eta} > 0$$

எனவே $\frac{dR}{dx}$ (ஒரு நேர்மறை மதிப்பாகிறது) மிகையாகிறது. எனவே தேவை கூடும்போது மொத்த வருவாயும் கூடுகிறது. ஆதலால் இது ஒரு நெகிழ்ச்சியான தேவை (elastic demand)

$\eta = 1$ என்றால், விலையில் சிறிய இறக்கமும், தேவையின் விகிதாசார ஏற்றமும் சமமாக இருக்கும். இங்கு இறுதி நிலை வருவாய் பூச்சியம். மொத்த வருவாய் ஒரு நிலையான மதிப்பு (உச்ச அளவு) ஆகும்.

$\eta < 1$ என்றால், விலையில் சிறிய இறக்கம், தேவையில் விகிதாசார சிறிய இறக்கத்தைக் காட்டும். அப்போது இறுதி நிலை வருவாய் எதிர்மறையில் இருக்கும். இச்சமயத்தில் தேவை கூடும்போது மொத்த வருவாய் குறைவதைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta = 1$ என்றும் மற்றும் பண்டத்தின் விலை p=8 என்றும் இருக்கும்பொழுது இறுதி நிலை வருவாயைக் காண்க.

$$\begin{aligned} MR &= p\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \\ &= p\left(1 - \frac{1}{1}\right) \\ &= p(1-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta = 2$ என்றும் மற்றும் பண்டத்தின் விலை p=8 என்றும் இருக்கும்பொழுது இறுதி நிலை வருவாயைக் காண்க.

$$= p\left(1-\frac{1}{\eta}\right)$$

$$= 8\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{MR} \quad = 8(1-0.5)$$

$$= 8(0.5)$$

$$= 4.0$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta = 0.5$ என்றும் மற்றும் பண்டத்தின் விலை p=8 என்றும் இருக்கும்பொழுது இறுதி நிலை வருவாயைக் காண்க.

$$= p\left(1-\frac{1}{\eta}\right)$$

$$= 8\left(1-\frac{1}{0.5}\right)$$

$$\text{MR} = \; = 8(1-2)$$

$$= 8(-1)$$

$$= -8$$

எடுத்துக்காட்டு:

எந்த ஒரு (புள்ளியிலும்) தேவையிலும், $AR, MR,$ என்பன முறையே சராசரி வருவாய், இறுதி நிலை வருவாய் என்றால், தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = \dfrac{AR}{AR-MR}$ எனக்காட்டு.

தீர்வு:

x, p என்பன முறையே பொருளின் அளவு, விலை என்றால், மொத்த வருவாய் $R = x.p.$

$AR =$ சராசரி வருவாய் $p = \dfrac{R}{x}$

இறுதி நிலை வருவாய் $MR = \dfrac{dR}{dx}$ என நாம் அறிவோம்.

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(xp)$$

$$= \left(x.\frac{dp}{dx}. + p.1 \right) = p + x.\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dR}{dx} = p.\left(1 + \frac{x}{p}.\frac{dp}{dx}\right).$$

$\eta =$ தேவையின் நெகிழ்ச்சி $= -\frac{p}{x}.\frac{dx}{dp}$ என்பது வரையறையாகும்

எனவே $\frac{dR}{dx} = MR = p\left[1 - \frac{1}{\eta}\right]$ ஆகும்.

மேலும் $p = AR$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad MR = AR\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

$$AR - MR = \frac{1}{\eta} AR$$

அல்லது $\eta = \frac{AR}{AR - MR}$ நிருபணமாகிறது

எடுத்துக்காட்டு:

எந்த ஒரு உற்பத்தி நிலையிலும் AR மற்றும் MR என்பன சராசரி வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை வருவாயைக் குறித்தால், தேவை நெகிழ்ச்சியானது $\frac{AR}{AR - MR}$ -க்குச் சமம் என நிறுவுக. இதை $p = a + bx$ என்ற தேவை கோடு விதிக்குச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

மொத்த வருவாய் $R = px$; சராசரி வருவாய $AR = p$

இறுதி நிலை வருவாய் MR $= \frac{d}{dx}(R) = \frac{d}{dx}(px) = p + x\frac{dp}{dx}$

இப்பொழுது $\frac{AR}{AR-MR} = \frac{p}{p-(p+x\frac{dp}{dx})} = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} =$

தேவைநெகிழ்ச்சி η_d $\frac{AR}{AR-MR} = \eta_d$

$p = a + bx$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) $\therefore \frac{dp}{dx} = b$

$R = px = ax + bx^2$

$AR = a + bx$ ($\because$ AR = விலை)

$$\text{MR} = \frac{d}{dx}(ax + bx^2) = a + 2bx.$$

$$\frac{AR}{AR-MR} = \frac{a+bx}{a+bx-a-2bx} = -\frac{a+bx}{bx} \quad \text{---- (1)}$$

$$\eta_d = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{a+bx}{x}\frac{1}{b} = -\frac{a+bx}{bx} \quad \text{--- (2)}$$

(1) மற்றும் (2) -இலிருந்து $\frac{AR}{AR-MR} = \eta_d$ என அறிய முடிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு:

ஒரு பொருளின் தேவை $q = -60p + 480, (0 < p < 7)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு p என்பது விலையைக் குறிக்கிறது. $p = 6$-ஆக இருக்கும்பொழுது தேவை நெகிழ்ச்சி மற்றும் இறுதி நிலை வருவாய் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு $q = -60p + 480$

p-ஐப் பொறுத்து வகையிட, $\frac{dq}{dp} = -60$

$p = 6$ எனில்,

$$q = -60(6) + 480$$

$$=-360+480=120$$

தேவை நெகிழ்ச்சி:

$$\eta_d = -\frac{6}{120}(-60)$$

$$= -\left(\frac{-360}{120}\right) = 3$$

இறுதி நிலை வருவாய் $= p(1-\frac{1}{\eta}) = 6(1-\frac{1}{\eta}) = 4$

இறுதி நிலை வருவாய் = ரூ. 4

எடுத்துக்காட்டு:

ஒரு பொருளின் தேவை D= 30- 4p - p எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு p என்பது விலையைக் குறிக்கிறது. $p = 3$ ஆக இருக்கும்பொழுது மொத்த வருவாய், இறுதி நிலை வருவாய், தேவை நெகிழ்ச்சி மற்றும் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

TR=PD

$$= p\ \left(30 - 4p - p^2\right)$$

$$= 30p - 4\ p^2 - p^2$$

p = 3 எனில், TR = 90 - 36 - 27

=27

தேவையின் நெகிழ்ச்சி: $\eta = -\frac{p}{q}.\frac{dD}{dp}$

$$= \frac{-p}{d}\left(0 - 4 - 2p\right)$$

$$= \frac{4p + 2p^2}{D}$$

$$= \frac{4p + 2p^2}{30 - 4p - p^2}$$

p = 3 எனில், $= \frac{12 + 18}{30 - 12 - 9}$

$$= \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$

$$MR = P\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

p=3 எனில், $\left[1 - \frac{1}{\left(\frac{10}{3}\right)}\right]$

$$= 3\left[1 - \frac{3}{10}\right]$$

$$= 3\left[\frac{7}{10}\right]$$

$$= \frac{21}{10}$$

∴ p=3, MR=2.1

எடுத்துக்காட்டு:

$p = \frac{a}{x+b} - c$ என்ற தேவைச் சமன்பாட்டுக்கான தேவை நெகிழ்ச்சியைக் கண்டுபிடித்து x கூடக்கூட, η குறைகிறது என்று நிரூபி.

தீர்வு:

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{p}{x}.\frac{dx}{dp}$

$$p = \frac{a-bc-cx}{(x+b)}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{a}{(x+b)^2}$$

$$\eta = -\frac{p}{x}.\frac{dx}{dp}$$

$$= .\frac{p}{x}.\frac{(x+b)^2}{a}$$

$$= \frac{1}{a}.\frac{a-bc-dx}{x(x+b)}(x+b)^2$$

$$= \frac{1}{a}(a-bc-cx)\frac{(x+b)}{x}$$

$$= \frac{1}{a}\left(1+\frac{b}{x}\right)(a-bc-cx).$$

இங்கு x கூடும்போது, η தொடர்ந்து குறைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு:

$p = \sqrt{a-bq}$ என்ற தேவைச் சமன்பாட்டுக்கான தேவை நெகிழ்ச்சியைக் கண்டுபிடித்து q கூடக்கூட, η குறைகிறது என்று நிரூபி. எப்போது $\eta = 1$ ஆகும்?

தீர்வு:

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$

$$p = \sqrt{a - bq}$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a - bq}} \times (-b)$$

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = \frac{p}{q}\left(-\frac{dq}{dp}\right)$

$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{2\sqrt{a - bq}}{b}$$

$$= \frac{2\sqrt{a - bq}}{bq} \cdot \frac{\sqrt{a - bq}}{1}$$

$$= 2\frac{a - bq}{bq}$$

$$= 2\left(\frac{a}{bq} - 1\right).$$

$$\eta = 2.\left(\frac{a}{bq} - 1\right)$$

இப்போது q அதிகரிக்க அதிகரிக்க $\frac{a}{bq}$ குறைகிறது. $a = 2, b = 3$ என்பன எதேச்சை மதிப்புகள் ஆனால்,

$$\eta = 2\left(\frac{2}{3q} - 1\right)$$

இப்போது, $q=1$ என்றால் $\eta = 2\left(\frac{2}{3}-1\right) = -\frac{2}{3}$

$q=2$ என்றால் $\eta = 2\left(\frac{2}{6}-1\right) = -\frac{4}{3}$

$q=5$ என்றால் $\eta = 2\left(\frac{2}{15}-1\right) = -\frac{26}{15}$

இவ்வாறு η-இன் மதிப்பு குறைகிறது.

இதேபோல $a=20, b=10$ என்றால்,

$$\eta = 2\left(\frac{20}{10q}-1\right)$$

$$x=1 \qquad \eta = 2$$

$$x=2 \qquad \eta = 0$$

$$x=3 \qquad \eta = -\frac{2}{3}$$

இவ்வாறு η-இன் மதிப்பு குறைகிறது.

இப்போது $\eta = 1$ என்றால்,

$$2\left(\frac{a}{bq}-1\right)=1$$

$$\frac{a}{bq}-1=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{bq}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$3bq=2a$$

$$q=\frac{2a}{3b}.$$

எனவே q – இன் மதிப்பு $\frac{2a}{3b}$ க்குச் சமமாக $\eta = 1$-ஆக இருக்கும்.

அளிப்பு நெகிழ்ச்சி (Elasticity of supply)

$q = f(p)$ என்பது அளிப்புச் சார்பு என்க. இங்கு q என்பது தேவை, p என்பது விலையாகும். அளிப்பு நெகிழ்ச்சியானது

$\eta = \frac{p}{q}.\frac{dq}{dp}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு:

$x = 2p^2 + 8p + 10$ என்ற அளிப்புச் சார்பின் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு:

அளிப்பு நெகிழ்ச்சியானது: $\eta = \frac{p}{x}.\frac{dx}{dp}$

$$x = 2p^2 + 8p + 10$$

$$\frac{dx}{dp} = 4p + 8$$

அளிப்பு நெகிழ்ச்சி $\eta_\delta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$

$$= \frac{4p^2 + 8p}{2p^2 + 8p + 10}$$

$$= \frac{2p^2 + 4p}{p^2 + 4p + 5}$$

எடுத்துக்காட்டு:

அளிப்புச் சார்பு $x = 2p^2 + 5$ எனில் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு :

அளிப்பு நெகிழ்ச்சி

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$$

$$= \frac{p}{2p^2+5}.4p$$

$$= \frac{4p^2}{2p^2+5}$$

செலவுச் சார்பு (Cost function)

பொதுவாக மொத்தச் செலவு இரண்டு பிரிவுகளாகும். (i) மாறும் செலவு (ii) மாறாச் செலவு. மாறும் செலவு உற்பத்தியின் ஒரு மதிப்புச் சார்பாக இருக்கும். ஆனால் மாறாச் செலவு உற்பத்தியைச் சாராமல் இருக்கும்.

$f(x)$ என்பதை மாறும் செலவு, k என்பதை மாறாச் செலவு என்க. x என்பது உற்பத்தியின் அலகு எனில் மொத்தச் செலவுச் சார்பானது $C(c) = f(x) + k$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு x என்பது மிகை எண்ணாகும்.

$f(x)$ எனும் சார்பிற்கு மாறிலி உறுப்பு கிடையாது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

சராசரி செலவு (Average Cost), சராசரி மாறும் செலவு (Average Variable Cost), சராசரி மாறாச்செலவு (Average Fixed Cost), இறுதி நிலைச் செலவு (Marginal Cost) மற்றும் இறுதிநிலைச் சராசரி செலவு (Marginal Average Cost) இவைகள் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

(i) சராசரி செலவு (AC) $= \frac{f(x)+k}{x} = \frac{\text{மொத்தச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

(ii) மாறும் சராசரி செலவு (AVC) $= \frac{f(x)}{x} = \frac{\text{மாறும் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

(iii) சராசரி மாறாச்செலவு $(\mathrm{AFC}) = \frac{k}{x} = \frac{\text{மாறாச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

(iv) சராசரி மாறாச்செலவு (AFC) $= \frac{d}{dx}C(x) = C'(x)$

(v) இறுதி நிலைச்சராசரி செலவு (MAC) $= \frac{d}{dx}(AC)$

குறிப்பு : $C(x)$ என்பது ஒரு பொருளை x அலகுகள் உற்பத்தி செய்ய ஆகும் மொத்தச் செலவு எனில், $C'(x)$ என்பது இறுதி நிலைச் செலவு ஆகும். அதாவது உற்பத்தியின் அளவு x அலகுகள் இருக்கும்பொழுது மேலும் ஓர் அலகு உற்பத்தி செய்ய ஆகும் தோராயமான செலவே இறுதி நிலைச் செலவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

Q-டன்கள் உற்பத்தி செய்ய ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த உற்பத்திச் செலவு $C(Q) =$ ரூ. $C = 420 + 60Q + Q^2$ எனில் மாறாச்செலவு மாறும் செலவு, சராசரி செலவு, சராசரி மாறாச்செலவு, சராசரி மாறும் செலவு, இறுதி நிலைச்செலவு ஆகியவைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்த உற்பத்திச் செலவு (TC) $= C = 420 + 60Q + Q^2$

$TC = FC + VC$

மாறாச்செலவு (FC) $= 420$

மாறும் செலவு (VC) $= 60Q+Q2$

சராசரி செலவு (ATC) $= TC/Q$

$= (420 + 60Q + Q2)/Q$

$= (420 + 60Q + Q2)/Q$

$= 420/Q + 60 + Q$

சராசரி மாறாச் செலவு (AFC)) $= FC/Q$

$= 420/Q$

சராசரி மாறும் செலவு (AVC) $= VC/Q$

$= (60Q + Q2)/Q$

$= 60 + Q$

இறுதி நிலைச்செலவு (MC) $= \frac{d}{dx}C(Q) = C'(Q)$

$= 60 + 2Q$

எடுத்துக்காட்டு:

ஒரு நிறுவனம் x-டன்கள் உற்பத்தி செய்யும்பொழுது அதன் மொத்தச் செலவு சார்பு $C(x) = \frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 20x + 5$ எனில் (i) சராசரி செலவு (ii) சராசரி மாறும் செலவு (iii) சராசரி மாறாச் செலவு (iv) இறுதி நிலைச் செலவு (v) இறுதிநிலைச் சராசரி செலவு என்பனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$C(x) = \frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 20x + 5 .$$

(i) சராசரி செலவு $= \frac{\text{மொத்தச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

$$= (\frac{1}{10}x^2 - 4^2 + 20 + \frac{5}{x})$$

(ii) சராசரி மாறும் செலவு $= \frac{\text{மாறும் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

$$= \frac{1}{10}x^2 - 4x + 20$$

(iii) சராசரி மாறாச் செலவு = $\dfrac{\text{மாறாச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}} = \dfrac{5}{x}$

(iv) இறுதி நிலைச் செலவு $= \dfrac{d}{dx}C(x)$

$$= \frac{d}{dx}(\frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 20x + 5)$$

$$= (\frac{3}{10}x^2 - 8x + 20)$$

(v) இறுதிநிலை சராசரிச் செலவு $= \dfrac{d}{dx}(AC)$

$$= \frac{d}{dx}(\frac{1}{10}x^2 - 4x + 20 + \frac{5}{x})$$

$$= (\frac{1}{5}x - 4 + \frac{5}{x^2})$$

எடுத்துக்காட்டு:

ஒரு பொருள் x-ஐ உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனத்தின் மொத்த உற்பத்திச் செலவு $TC = 8 + 2x + 3x^2$ எனின், (x என்பது உற்பத்திப் பொருளின் அளவு, MC என்பது இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு) $MC = 2 + 6x$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

இறுதி நிலைச்செலவு (MC) $= \dfrac{d}{dx}C(x) = C'(x)$

$$= \frac{d}{dx}(8 + 2x + 3x^2$$

$$= 2x + 6$$

எடுத்துக்காட்டு:

x-என்னும் பொருளுக்கு ஒரு நுகர்வோரின் பயன்பாடு சார்பு (utility function) $U = 10x - 3x^2$ எனின் இறுதிநிலைப் பயன்பாடு $MU = 10 - 6x$ என நிறுவுக

தீர்வு :

$$\text{இறுதி நிலைச்செலவு (MC)} = \frac{d}{dx}C(x) = C'(x)$$

$$= \frac{d}{dx}(10x + 3x^2)$$

$$= 10 + 6x$$

எடுத்துக்காட்டு:

பொருள் x ஐ உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனத்தின் மொத்த உற்பத்தி செலவு $TC = 5q^2 + 8q + 12$ எனில்,இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு காண்க. $q = 5$, $q = 8$ எனில், இறுதிநிலை செலவுகள் யாவை? (q என்பது உற்பத்திப் பொருளின் அளவு, MC இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு)

தீர்வு :

$$MC = \frac{d}{dx}C(x) = C'(x)$$

$$= 10q + 8.$$

$q = 5$, எனில், $MC = 10(5) + 8 = 58$

$q = 8$, எனில், $MC = 10(8) + 8 = 88$

எடுத்துக்காட்டு:

C அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்தச் செலவு $C = 0.00005x^3 - 0.06x^2 + 10x + 20000$ எனில், 1000 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதிநிலைச் செலவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$C = 0.00005x^3 - 0.06x^2 + 10x + 20000$$

இறுதி நிலைச் செலவு $\frac{dC}{dx} = (0.00005)(3x^2) - (0.06)2x + 10$

$= 0.00015x^2 - 0.12x + 10$

$x = 1000$ அலகுகள் எனில்,.

$$\frac{dC}{dx} = (0.00005)(1000)^2 - (0.12)(1000) + 10$$

$= 150 - 120 + 10 = 40$

$= 1000$

1000 அலகுகள் உற்பத்திக்கு இறுதி நிலைச் செலவு ரூ. 40.

எடுத்துக்காட்டு:

ஒரு நிறுவனம் Q என்னும் ஒரு பொருளை உற்பத்தி செய்ய மொத்த செலவுச் சார்பானது $TC = Q^3 - 4Q^2 - 12Q$ எனின், *சராசரி* செலவுச் சார்பைக் (average cost function) கண்டு , இச்சார்பு எந்த உற்பத்தி நிலையில் மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது எனவும் காண்க. அதன்பின் *சராசரி* செலவு வளைவரையின் மீச்சிறு புள்ளியிடத்து, இறுதிநிலைச் செலவும் *சராசரிச்* செலவும் சமமாகும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

சராசரி செலவு, AC = TC / Q = Q2 - 4Q + 12

இறுதி நிலைச் செலவு $\frac{d(TC)}{dQ} = 3Q^2 - 8Q + 12$

சராசரி செலவு வளைவரையின் *மீது மீச்சிறு* புள்ளி காண

$$AC = Q^2 - 4Q + 12$$

$$\frac{d(AC)}{dQ} = 2Q - 4 = 0$$

$$2Q - 4 = 0$$

உற்பத்தி Q = 2 நிலையில் *மீச்சிறு சராசரி* செலவு $AC = Q^2 - 4Q + 12$

$$AC = 22 - 4*2 + 12$$

$$=-4+12$$

$$=8$$

சராசரி செலவு = இறுதி நிலைச் செலவு

$$AC = MC$$

$$Q2 - 4Q + 12 = 3Q2 - 8Q + 12$$

$$2Q2 - 4Q = 0$$

$$2Q = 4$$

$$Q = 2$$

உற்பத்தி $Q = 2$ நிலையில் சராசரி செலவின் மீச்சிறு புள்ளியிடத்து, இறுதிநிலைச் செலவும் சராசரிச் செலவும் சமமாகும்.

மொத்த வருவாய், இறுதி நிலை வருவாய், சராசரி வருவாய் (Total Revenue, Marginal Revenue, Average Revenue)

ஒரு பொருளின் அளவு தேவைப்பட்ட அளவு x என்றும், அதன் ஒரு அலகின் விலை p என்றும் கொண்டால், தேவைச் சமன்பாடு $p = f(x)$ என்றும் எழுதினோம். இனி மொத்த வருவாய் R என்பது கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகின்றது.

$$R = xp = x.f(x)$$

$$= R(x).$$

இங்கு p, x என்பன மிகை எண்கள்.

$$\text{சராசரி வருவாய் (AR)} = \frac{\text{மொத்த வருவாய்}}{\text{விற்பனை அளவு}} = \frac{px}{x} = \frac{R}{x} = p$$

$$\text{இறுதி நிலை வருவாய் (MR)} = \frac{d}{dx}(R) = R'(x)$$

குறிப்பு: உற்பத்தி செய்யப்பட்டு, விற்கப்பட்ட x அலகுகளிலிருந்து கிடைக்கும் மொத்த வருவாய் $R(x)$ என்க. விற்கும் அளவு x அலகுகள் இருக்கும்பொழுது மேலும் ஓர் அலகு உற்பத்தி செய்யப்பட்டு விற்கப்பட்டதால் கிடைக்கும் தோராயமான வருவாயானது, இறுதி நிலை வருவாய் $R'(x)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

மொத்த வருவாய்ச் சார்பு $TR = 70q - 4q^3$ எனில், இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு காண்க. (q என்பது விற்பனை எண்ணிக்கையின் அளவு),

தீர்வு :

இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு, $MR = dTR/dq$

$$TR = 70q - 4q3$$

$$MR = 70-12q2$$

எடுத்துக்காட்டு:

மொத்த வருவாய்ச் சார்பு $TR = 264q - 0.6q^2$ எனில், எந்த உற்பத்தி நிலையில் TR மீப்பெரு மதிப்பை அடையும்?

தீர்வு :

$$TR = 264q - 0.6q2$$

முதல் வரிசை நிபந்தனையின் படி மீப்பெரு மதிப்பு பெற $dTR/dq = 0$ என இருக்க வேண்டும்.

$$dTR/dq = 264 - 1.2q$$

$$264 - 1.2q = 0$$

$$264 = 1.2q$$

$$q = 220$$

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனையின் படி மீப்பெரு மதிப்பு பெற

என இருக்க வேண்டும். $\dfrac{d^2TR}{dq^2} < 0.$ எனவே,

$$\frac{d^2TR}{dq^2} = -1.2 < 0.$$

q -ல் 220 அளவு உற்பத்தி செய்வதால், மிக அதிக ணடுடீ;டீ ஞக்ஞடச்; கிடைக்கிறது. மொத்த வருவாயின் மீப்பெரு மதிப்பு,

TR = 264q − 0.6q2

$= 264(220) - 0.6(220)^2$

இப்போது R மொத்த வருவாயை, $p-$ இன் சார்பலனாகவும் எழுதலாம்.

$$R = px = p. \quad g(p) = R(p).$$

p என்பதைக் குறித்த இறுதி நிலை வருவாய் $= \frac{dR}{dx}$.

$x -$ இன் வாயிலாக, $p -$ க்குத் தீர்வு காணமுடியாத சமயத்தில்,

$\frac{dR}{dp}$ -ஐக் கண்டுபிடித்து இதன் மூலம்

$\frac{dR}{dx} = \frac{dR/dp}{dx/dp}$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் $\frac{dR}{dx}$ -ஐக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

தேவை நியதி $3x + 2p = 9$ என்றால்

$$p = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}x$$

மொத்த வருவாய் $R = x.p$

$$= x.\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}x\right)$$

$$= \frac{9}{2}x - \frac{3}{2}x^2.$$

இறுதி நிலை வருவாய் $\frac{dR}{dx} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}.2x$

$$= \frac{9}{2} - 3x.$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -3 < 0.$$

எனவே R சார்பலன் ஒரு மீப்பெருமதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

$\frac{dR}{dx} = 0$ என்றால், $\frac{9}{2} - 3x = 0.$ $3x = \frac{9}{2}, x = \frac{9}{6} = 1.5$

$x = \frac{3}{2}$ என்ற புள்ளியில் $R' < 0$

எனவேதான் $x = \frac{3}{2}$ என்ற புள்ளியில் காணப்படும் மொத்த வருவாயின் மீப்பெரு மதிப்பு $= [R(x)]_{x=\frac{3}{2}}$

$$= \left[\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}x^2\right]_{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4}$$

$$= \frac{54 - 27}{8}$$

$$= \frac{27}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு:

தேவை நியதி $x = 9 - p^2$ என்றால்

$R =$ மொத்த வருவாய் $= xp = 9p - p^8$

$$\frac{dR}{dx}=\frac{dR}{dp}.\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dR}{dp}=9-3p^2 \quad \frac{dx}{dp}=-2p.$$

எனவே $\frac{dR}{dx}=R'=\frac{dR}{dp}.\frac{dp}{dx}=\frac{9-3p^2}{(-2p)}$

$\frac{dR}{dp}=0$ என்றால் $9-3p^2=0$ அதாவது $p^2=3, p=\sqrt{3}$

எனவே $x=9-p^2=9-3=6$ ஆகிறது.

$$\frac{d^2R}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\frac{9-3p^2}{-2p}\right]$$

$$=\frac{d}{dp}\left[\frac{9-3p^2}{-2p}\right].\frac{ap}{ax}$$

$$=\frac{[(-2p).(-6p)-(9-3p^2)(-2)]}{4p^2}\times\frac{1}{2p.}$$

$$=\frac{12p^2+18-6p^2}{-8p^2}=\frac{6p^2+18}{-8p^8}<0.$$

(இங்கு $p=\sqrt{3}$ என்று சமனிட) எனவே மொத்த வருவாய் ஒரு மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

அந்த மீப்பெரு மதிப்பு $=[9p-p^3]_{p=\sqrt{3}}$

$$=9\sqrt{3}-3\sqrt{3}=6\sqrt{3}.$$

இப்போது $R = xp = x.f(x)$ என்று வைத்துக் கொண்டு மீப்பெரு மதிப்பைக் கண்டுபிடித்தாலும் அதே மதிப்பு தான் வருவதைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

முற்றுரிமையாளர் எதிர்நோக்கி இருக்கும் தேவை வளைவரை p = 320 - 3q எனக் கொள்க. இங்கு q என்பது உற்பத்திப் பொருளின் அளவையும், p அதன் விலையும் குறிக்கும். அவரது மொத்தச் செலவு வளைவரை TC = 15 + 0.80q2 எனக் கொண்டு, நிறுவனத்திற்கு மீப்பெரு இலாபம் தரும் உற்பத்தி நிலைகளையும், விலையையும் காண்க.

தீர்வு :

மீப்பெரு இலாபம் கிடைக்க வேண்டுமாயின் MC= MR என்பதன் மதிப்பைக் காணவேண்டும். எனவே,

MR = dTR/dq

TR = p x q

TR = (320 - 3q) x q

TR = 320q - 3q2

MR = 320 - 6q

MC = dTC/dq

MC = 1.6q

முக்கிய நிபந்தனை : $\frac{dR}{dx} = \frac{dc}{dx}$

MR= MC நிபந்தனையின் படி

320 - 6q = 1.6q

320 = 7.6q

q = 42.1.

போதிய நிபந்தனை :

$$\frac{d^2R}{dx^2} < \frac{d^2C}{dx^2}$$

$$-6 < 1.6$$

அதாவது மீப்பெரு இலாபம் தரும் உற்பத்தியின் அளவு $q = 42.1$. $q = 42.1$ என்ற மதிப்பில் இலாபச் சார்பலன் ஒரு மீப்பெரு (உச்ச) மதிப்பை அடைகிறது.

மீப்பெரு இலாப மதிப்பு $\pi = TR - TC$

$$\pi = (320q - 3q^2) - (15 + 0.8q^2)$$

$$\pi = 320q - 3q^2 - 15 - 0.8q^2$$

$$\pi = 320q - 3.8\,q^2 - 15$$

$$\pi = 320(42.1) - 3.8(42.1)^2 - 15$$

$$\pi = 13{,}472 - 3.8(1772.41) - 15$$

$$\pi = 13{,}472 - 6735.16 - 15$$

$$\pi = Rs.6{,}721.84$$

மீப்பெரு இலாபம் தரும் விலை : $p = 320 - 3(42.1)$

$$= 320 - 126.3$$

$$= Rs.193.7$$

எடுத்துக்காட்டு:

மொத்த வருவாய்ச் சார்பு $R = 30x - x^2$ என்றும், மொத்தச் செலவு .$C=20+4x$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், எந்த உற்பத்தி நிலையில் நிறுவனம் மீப்பெரு இலாபம் அடையும்?

தீர்வு :

$$R = 30\,x - x^2$$

$$\therefore MR = \frac{dR}{dx} = 30 - 2x$$

$$C = 20+4$$

$$\therefore MC = \frac{dC}{dx} = 4$$

மீப்பெரு இலாபம் கிடைக்க வேண்டுமாயின் முக்கிய நிபந்தனை $MR = MC$

$$30 - 2x = 4$$

$$-2x = 4 - 40$$

$$-2x = -26$$

$$x = \frac{26}{2}$$

$$\therefore x = 13$$

இலாபம் =R - C

x =13, மீப்பெரு இலாபம் = $\left[\left(30x - x^2\right) - \left(20 + 4x\right)\right]$.

$= 30x - x^2 - 20 - 4x$

$= \left(26x - x^2 - 20\right)$

$= [26(13) - 169 - 20]$

=338-169-20

=149

x = 13 என்ற மதிப்பில் இலாபச் சார்பலன் ஒரு மீப்பெரு மதிப்பை அடைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு:

முற்றுரிமையில் பொருளின் தேவை $p = 12 - 4x$, என்றும், மொத்தச் செலவு $8x - x^2 (0 < x < 3)$, என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், உச்ச அளவு நிகர இலாபத்தைக் கணக்கிடவும். x, p ஆகியவற்றையும் காண்க.

தீர்வு :

x-ஐச் சார்ந்து அமையும் முதல் நிலையைக் கருதுக.

தேவைச்சார்பு $p = 12 - 4x$.

$\therefore$ மொத்த வருவாய் $R = x.p$

$= 12x - 4x^2.$

$\therefore$ இறுதிநிலை வருவாய் $\frac{dR}{dx} = 12 - 8x.$

மொத்தச் செலவு $C = 8x - x^2.$

எனவே, இறுதிநிலைச் செலவு $\frac{dC}{dx} = 8 - 2x.$

முக்கிய நிபந்தனை :

$\frac{dR}{dx} = \frac{dC}{dx}$

அல்லது $12 - 8x = 8 - 2x$

$\therefore \quad 6x = 4$

எனவே, $x = \frac{4}{6}$ அல்லது $\frac{2}{3}$

போதிய நிபந்தனை :

$$\frac{d^2R}{dx^2} < \frac{dC}{dx^2}$$

அதாவது $-8 < -2.$

ஆகவே, $x = \frac{2}{3}$ எனும் நிலையில், இலாப அளவு மீப்பெரு நிலை அடைகின்றது.

இதற்கேற்ற விலை $p = 12 - \left(4 \times \frac{2}{3}\right) = \frac{28}{3}$ ஆகும்.

மீப்பெரு அளவு இலாபம் :

நிகர இலாபம் $\pi = R - C$

$$= (12x - 4x^2) - (8x - x^2)$$

$$= 4x - 3x^2.$$

$x = \dfrac{2}{3}$ எனப் பிரதியிட, $\pi = \left(4 \times \dfrac{2}{3}\right) - \left(3 \times \dfrac{4}{9}\right)$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

$\therefore$ மீப்பெரு அளவு இலாபம் $\dfrac{4}{3}$ ஆகிறது.

எடுத்துக்காட்டு:

தேவை மற்றும் செலவுச் சார்புகள் $x = 75 - 3p$; $C = 100 + 3x$ என்று அமைந்திருப்பின், மீப்பெரு இலாப அளவை மதிப்பிடுக. பொருளின் விலை, உற்பத்தி ஆகியவற்றையும் காண்க.

தீர்வு :

p-யினைச் சார்ந்த நிலையினைக் கருதுக.

தேவைச் சார்பு $x = 75 - 3p$.

$\therefore$ மொத்த வருவாய் $R = 75p - 3p^2$

இறுதிநிலை வருவாய் $\dfrac{dR}{dp} = 75 - 6p.$

மேலும், உற்பத்திச் செலவு

$$C = 100 + 3x$$

$$= 100 + 3(75 - 3p)$$

$$= 325 - 9P$$

$\therefore$ இறுதிநிலைச் செலவு $\dfrac{dC}{dp} = -9$

முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{dR}{dp} = \frac{dC}{dp}$$

அதாவது $75 - 6p = -9$

அல்லது $6p = 66$

$\therefore \quad p = 11.$

போதிய நிபந்தனை

$$\frac{d^2R}{dp^2} < \frac{d^2C}{dp^2}$$

அதாவது $-6 < 0$

$\therefore$ $p = 11$ என்ற நிலையில், இலாபமானது மீப்பெரு நிலையை அடையும். இதற்கேற்ற உற்பத்தியானது,

$x = 75 - 3p = 75 - (3 \times 11)$

$= 75 - 33 = 42$

$\therefore$ $x = 42$ ஆகும்.

$\therefore$ மீப்பெரு இலாப அளவு :

$\pi = R - C$

$= [75p - 3p^2] - [325 - 9p]$

$= 84p - 3p^2 - 325$

$p = 11$ எனப் பிரதியிட,

மீப்பெரு மதிப்பு $= (84 \times 11) - (3 \times 11^2) - 325$

$= 925 - 363 - 325$

$= 236.$

$\therefore$ மீப்பெரு இலாப அளவு 236 ஆகிறது.

எடுத்துக்காட்டு:

தொலைககாட்சிப் பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்யும்- ஒரு முற்றுரிமை நிறுவனமானது, ஒரு வார காலத்தில் x-பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்வதற்கு ஆகும் மொத்தச் செலவு C=$\frac{1}{25}x^2+3x+100$ ஆகும். இதற்கேற்ற அங்காடித் தேவை $x=75-3p$ என்ற சார்பின்படி அமைகிறது. p என்பது சராசரி விலையினைக் குறிக்கும். இம் முற்றுரிமையில் அமையும் மொத்த உற்பத்தி x, அதற்கேற்ற விலை p, இவற்றினை மதிப்பிடுக. நிகர இலாபத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

இம்முற்றுரிமை நிறுவனம் உற்பத்தியினைக் கட்டுப்படுத்துவதாகக் கொள்க.

தேவைச் சார்பு $x=75-3p$

அல்லது $p=\frac{75-x}{3}$.

$\therefore$ மொத்த வருவாய் $R=\frac{75x-x^2}{3}$

எனவே, இறுதிநிலை வருவாய் $\frac{dR}{dx}=\frac{75-2x}{3}$.

மொத்தச் செலவு $C=\frac{1}{25}x^2+3x+100$.

$\therefore$ இறுதிநிலைச் செலவு $\frac{dC}{dx}=\frac{2}{25}x+3$.

நிகர இலாப அளவு : $\pi=R-C$

முக்கிய நிபந்தனை : $\frac{dR}{dx}=\frac{dC}{dx}$

$$\frac{75-2x}{3}=\frac{2}{25}x+3.$$

அல்லது $1875 - 50x = 6x + 225.$

$\therefore \quad 56x = 1650$

$\therefore \quad x = 29.5 \cong 30.$

போதிய நிபந்தனை : $\dfrac{d^2R}{dx^2} < \dfrac{d^2C}{dx^2}$

அதாவது $-\dfrac{2}{3} < \dfrac{2}{25}.$

எனவே, 30 பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்கையில், நிறுவனத்தின் நிகர இலாபமானது உச்ச நிலை அடையும்.

$x = 30$ எனப் பிரதியிட,

$$p = \frac{75-30}{3} = \frac{45}{3} = 15$$ ஆகிறது.

$\therefore$ முற்றுரிமை விலையானது Rs. 15 ஆகிறது. இந்நிலையில், உச்ச அளவு நிகர இலாபமானது,

$$\pi = R - C$$

$$= \left(\frac{75x - x^2}{3}\right) - \left(\frac{1}{25}x^2 + 3x + 100\right)$$

$$= \frac{1}{75}(1875x - 25x^2 - 3x^2 - 225x - 7500)$$

$$= \frac{1}{75}(1650x - 28x^2 - 7500)$$

இதில் $x = 30$ எனப்பிரதியிட, π இ-ன் மீப்பெரு (இலாப) அளவு:

$$= \frac{1}{75}(1650 \times 30 - 28 \times 30^2 - 7500)$$

$$= \frac{1}{75}(16800) = 224$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\pi = -Q^3 - 24Q^2 + 2880Q - 750$ என்பது இலாபச் சார்பைக் குறிக்கும் சமன்பாடாகும். இதில் Q – இன் எம்மதிப்பிற்கு π - ஆனது மீப்பெருமம் அடையும்?

தீர்வு :

இலாபச் சார்பு: $\pi = -Q^3 - 24Q^2 + 2880Q - 750$

π -இன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண முக்கிய நிபந்தனை: $\frac{d\pi}{dx} = 0$

π -இன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண போதிய நிபந்தனை: $\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$

முக்கிய நிபந்தனை : $\frac{d\pi}{dx} \rightarrow \pi' = 0$

போதிய நிபந்தனை : $\frac{d^2\pi}{dx^2} \rightarrow \pi'' < 0$

$$\pi = -Q^3 - 24Q^2 + 2880Q - 750$$

$$\pi' = -3Q^2 - 48Q + 2880$$

$$\pi'' = -6Q - 48$$

$$3Q^2 + 48Q - 2880 = 0$$

$$Q = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4(3)(-2880)}}{2(3)}$$

$$Q = 24 \quad \text{or} \quad Q = -40$$

Q குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது. எனவே Q=24.

$$\pi'' = -6Q - 48$$

$$= -6(24) - 48$$

$$= -144 - 48$$

$$= -192 < 0$$

Q-,ல் அளவு உற்பத்தி செய்வதால், இலாபத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு,

$$\pi = -(24)^3 - 24(24)^2 + 2880(24) - 750$$

$$= -(24)^3 - 24(24)^2 + 2880(24) - 750$$

$$= 40722$$

மீப்பெரு இலாப அளவு ரூ. 40722 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு நிறுவனம் X எனும் பொருளை உற்பத்தி செய்கிறது. அதன் தேவைச் சமன்பாடு $x = 100 - p$; மொத்தச் செலவு சமன்பாடு $C = x^3 - 26x^2 + 223x + 100$. அதன் மொத்த இலாபச் சமன்பாட்டைக் காண். இலாபம் மிக அதிகமாகக் கிடைக்க வேண்டுமாயின் அது எவ்வளவு உற்பத்தி செய்ய வேண்டும்? இலாபத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு காண்.

தீர்வு :

மொத்த வரவு $R = px = x(100 - x) = 100x - x^2$

மொத்த இலாபம் $\pi =$ (மொத்த வரவு) - (மொத்த செலவு)

$= 100x - x^2 - x^3 = 26x^2 - 223x - 100$

$= -x^3 + 25x^2 - 123x - 100$

$$\frac{d\pi}{dx} = -3x^2 + 50x - 123$$

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -9x + 50$$

π -இன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண முக்கிய நிபந்தனை: $\frac{d\pi}{dx} = 0$

π -இன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண போதிய நிபந்தனை: $\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$

முக்கிய நிபந்தனை: $\frac{d\pi}{dx} = 0$

$$3x^2 - 50x + 123 = 0$$

$$(3x - 41)(x - 3) = 0$$

$\therefore x = \frac{41}{3}$ அல்லது $13\frac{2}{3}$

போதிய நிபந்தனை: $\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$

அதாவது $x = \frac{41}{3}$ எனில், $\frac{d^2\pi}{dx^2} = -9\left(\frac{41}{3}\right) + 50 < 0.$

X -இல் $13\frac{2}{3}$ அளவு உற்பத்தி செய்வதால், இலாபத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு,

$$= -\frac{68921}{27} + \frac{25 \times 1681}{9} - \frac{123 \times 41}{3} - 100$$

$$= 335\frac{22}{27}$$

எனவே, இலாபத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு ரூ. $335\frac{22}{27}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த உற்பத்திச் செலவு மற்றும் வருவாய் ஆகியன $C = x^3 - 12x^2 + 48x + 11$ மற்றும் $R = 83x - 4x^2 - 21$ என உள்ளன. (i) வருவாய் மீப்பெரும மதிப்பை அடையும்பொழுது (ii) இலாபம் மீப்பெரும மதிப்பை பெறும்பொழுதும் அதன் உற்பத்தி என்ன?

தீர்வு :

(i) வருவாய் $R = 83x - 4x^2 - 21$

x-ஐப் பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dR}{dx} = 83 - 8x$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -8$$

வருவாய் பெரும மதிப்பை அடையும்பொழுது $\frac{dR}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$

$$\frac{dR}{dx} = 0 \rightarrow 83 - 8x = 0 \quad \therefore x = \frac{83}{8}$$

மேலும் $\frac{d^2R}{dx^2} = -8 < 0$ வருவாய் பெரும மதிப்பை அடைகிறது.

$\therefore x = \frac{83}{8}$ எனில், வருவாய் பெரும மதிப்பை அடைகிறது.

(ii) இலாபம் $\pi = R - C$

$$= (83x - 4x^2 - 21) - (x^3 - 12x^2 + 48x + 11)$$

$$= -x^3 + 8x^2 + 35x - 32$$

x-ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d\pi}{dx} = -3x^2 + 16x + 35$$

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -6x + 16$$

இலாபம் பெரும மதிப்பைப் பெறும்பொழுது $\frac{d\pi}{dx} = 0$ மற்றும்

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$$

$$\therefore \frac{d\pi}{dx} = 0 \rightarrow 3x^2 + 16x + 35 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16x - 35 = 0$$

$$\rightarrow (3x+5)(x-7) = 0 \rightarrow x = \frac{-5}{3} \text{ or } x = 7$$

$x = \frac{-5}{3}$ எனில், $\frac{d^2\pi}{dx^2} = -6(\frac{-5}{3}) + 16 = 26 > 0$

$\therefore x = \frac{-5}{3}$ -இல் π மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

x- குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது. எனவே x=7.

$\therefore x = 7$ எனில், $\frac{d^2\pi}{dx^2} = -6(7) + 16 = -26 > 0$

$\therefore x = 7$ எனில், π மீப்பெரும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$\therefore x = 7$ அலகுகள் எனில், இலாபம் மீப்பெரும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

<+>

8

பகுதி வகைக்கெழு காணல்

(Partial Differentiation)

நாம் இதுவரை வகைக்கெழு காணும்பொழுது $y = f(x)$ என்ற வடிவில் ஒரு மாறிச் சார்பை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டோம். ஆனால் சார்புகள் பல மாறிகளை அடங்கியுள்ளவையாகவும் இருக்கலாம். உதாரணமாக வட்டத்தின் பரப்பு அதன் ஆரத்தைப் பொறுத்தது. ஆரம் ஒன்றேதான் மாறியாக அமைகிறது. ஆனால் நீண்ட சதுரத்தின் பரப்பு, நீளம், அகலம் இவைகளைப் பொறுத்தது. இங்கு இரண்டு மாறிகள் உள்ளன. இம்மாதிரியான சார்புகளை $u = f(x, y)$ எனக் கொள்வோம். x, y தனித்தனியாகவோ, ஒரே சமயத்துச் சேர்ந்தோ மாறலாம். x, y-இன் மதிப்புகள் முறையே $x + \Delta x, y$ ஆக மாறும்பொழுது u-இன் மதிப்பு $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ஆகிறது.

u-இன் மதிப்பு மாற்றம் $= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

x-இன் மதிப்பு $x + \Delta x$ ஆக மாறி, y மாறாமல் இருந்தால், u மதிப்பு மாற்றம.

$$= f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

y-இன் மதிப்பு $(y + \Delta y)$ ஆக மாறி, y மாறாமல் இருந்தால், u மதிப்பு மாற்றம்

$$= f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

பகுதி வகைக்கெழு காணல் (Partial Differentiation)

முதலில் x, y என்ற இரண்டு சார்பிலா மாறிகளைச் சார்ந்த ஒரு சார்புடை மாறியை எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த மாறியை u என்று குறிப்பிடுவோமானால், u என்ற மாறி x, y எனும் இரண்டு சார்பிலா மாறிகளால் அமையும் சார்பு என்பதைக் குறிப்பிட, $u = f(x, y)$ என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம். எனவே, x, y என்ற மாறிகள் ஒவ்வொன்றிலும் ஏற்படும் எந்த ஒரு சிறிய மாற்றமும்,

u எனும் சார்புடை மாறியிலும் ஏதேனும் மாற்றத்தை உண்டாக்கும். இத்தகைய மாற்றங்களின் (அதாவது கூடுந்தொகைகளின்) பண்புகளைப் பற்றி இங்கு பார்ப்போம்.

$u = f(x, y)$ ஆகவிருந்து, x ஆனது $(x + \Delta x)$ ஆக மாறி, y நிலையாகவிருந்தால் u-இல் மாற்றம்

$$= \Delta u = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

ஆகவே $$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ ஐத் தான், x ஐச் சார்ந்த பகுதி வகைக்கெழு எனச் சொல்வோம்.

அதேமாதிரி $$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

இப்பகுதி வகைக் கெழுக்களைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

இந்த எல்லை இருந்தால் (இங்கு y என்பது மாறாதது, Δx என்பது x — இல் ஏற்படும் சிறு மாற்றமாகும்)

இதேபோல் $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$ இந்த எல்லை இருந்தால் (இங்கு x என்பது மாறாதது, Δy என்பது y – இல் ஏற்படும் சிறு மாற்றமாகும்).

$u = f(x, y)$ என்பது x, y எனும் இரண்டு சார்பிலா மாறிகளைக் கொண்ட சார்பு எனில் y – ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு, x ஐச் சார்ந்த (பொறுத்து) $u = f(x, y)$-ஐ வகையீடு செய்து கிடைப்பது x ஐச் சார்ந்த(பொறுத்து) u – இன் பகுதி வகைக்கெழு ஆகும். இதை $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x} f_x, u_x$ எனும் குறியீட்டில் குறிப்பது வழக்கம். இதேபோல் x – ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு, y ஐச் சார்ந்த $u = f(x, y)$-ஐ வகையீடு செய்து கிடைப்பது y ஐச் சார்ந்த u – இன் பகுதி வகைக்கெழு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $u(x, y) = 1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y$, எனில் கீழ்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ (ii) $\dfrac{\partial u}{\partial y}$

தீர்வு:

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y)$

$= 0 - 3x^2 - 0 + 4(3x^2)y^6 + 0)$

$= -3x^2 + 12x^2y^6$

இதே போன்று,

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y)$

$$= 0 - 0 - 2y + 4x^3(6y^5) + 8$$

எடுத்துக்காட்டு :

$U = \dfrac{xy}{x+y}$ எனும் இருமாறிச் சார்பின், $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

(i) $u = \dfrac{xy}{x+y}$

எனவே, x-ஐச் சார்ந்த பகுதி வகைக்கெழு காண,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x+y)y.1 - xy(1+0)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

இதே போன்று,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(x+y)x.1 - xy(1+0)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

தொடர் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் (Successive Partial Deivatives):

$u = f(x, y)$ என்றால், x-ஐச் சார்ந்த u-இன் பகுப்பு வகைக்கெழு $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ என்றும், y ஐச் சார்ந்த u-இன் பகுப்பு வகைக்கெழு $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ என்றும் கண்டோம். இவ்விரண்டிற்கும் x ஐப்

பொறுத்து பகுப்பு வகைக்கெழு கண்டால் $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]$ என்றும், $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ என்றும் ஆகும். அதாவது $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ என்றும், $\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y}$ ஆகும். இதேமாதிரி அவ்விரண்டிற்கும் y ஐச் சார்ந்த பகுப்பு வகைக்கெழு கண்டால் அவை முறையே $\frac{\partial^2 u}{\partial y.\partial x}$ என்றும், $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ஆகும் என்றும் காணலாம்.

கவனிக்க: x-ஐக் குறித்து u-ஐப் பகுதிவகையிடக் கிடைப்பதை u_x என்று கூறுகிறோம். y-ஐக் குறித்து u_x-ஐப் பகுதி வகையிடக் கிடைப்பதை, இதே குறியீட்டு முறைப்படி, u_{xy} என்று கூறுகிறோம். எனவே. $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u_{xy}$ இந்தப் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் $f(x, y)$-இன் இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுக்கள் ஆகும். இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுக்களை

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u_{yx}$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

குறிப்பு :

(i) u-என்பது x, y, z என்ற மூன்று மாறிகளைச் சார்ந்த ஒரு சார்பாக இருக்குமானால், பின், u-இன் பகுதி வகைக்கெழுக்கள், u_x, u_y, u_z முதலியவற்றை இதே போன்று வரையறுக்க முடியும். இவ்வாறு,

$$u_x - \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta y \xrightarrow{\lim} 0\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \Delta y \xrightarrow{\lim} 0\left[\frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}\right]$$

என்றும்,

$$u_y = \Delta y \xrightarrow{\lim} 0\left[\frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}\right]$$

என்றும்,

$$u_z = \Delta z \xrightarrow{\lim} 0\left[\frac{f(x, y, z+\Delta x) - f(x, y, z)}{\Delta z}\right]$$

என்றும் கண்டுகொள்ளலாம்.

(ii) $u = f(x, y)$ எனில், பொதுவாக, u-இன் பகுதி வகைக்கெழுக்களாகிய u_x, u_y என்பனவும் x, y ஆகிய இருமாறிகளின் சார்பாக இருக்கக்கூடும். எனவே, u_x, u_y இவை ஒவ்வொன்றையும் x-ஐப் பொறுத்தோ, அல்லது y-ஐப் பொறுத்தோ வகையிட முடியும் என்று அறிகிறோம். இந்த வகைக்கெழுக்களை உயர்படி பகுதி வகைக்கெழுக்கள் என்று கூறுகிறோம். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெறும் x-ஐச் சார்ந்த u_x-இன் பகுதி வகைக்கெழுவை $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ அல்லது u_{xx} என்றும்; y-ஐச் சார்ந்த u_x-இன் பகுதி வகைக்கெழுவை $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ அல்லது u_{xy} என்றும் ; x-ஐச் சார்ந்த

u_y-இன் பகுதி வகைக்கெழு, y-ஐச் சார்ந்த u_y-இன் பகுதி வகைக்கெழு ஆகியவற்றை முறையே $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ அல்லது u_{yx} என்றும், $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ - அல்லது u_{yy} என்றும் குறிப்பிடுதல் வழக்கமாகும். இதே போன்று இன்னபிற உயர்படி பகுதி வகைக்கெழுக்களையும் வரையறுக்க முடியும்.

(iii) u, u_x, u_y என்பன தொடர்ச்சியாக இருந்தால்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y};$$

$$u_{xy} = u_{yx} \text{ ஆகும்.}$$

மேலும், பொதுவாக $u = f(x, y)$ என்ற ஒரு இருமாறிச் சார்பு கொடுக்கப்படின், எப்பொழுதுமே $u_{xy} = u_{yx}$ என்றிருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. ஆனால் ஒரு சில நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு இவ்விரு பகுதி வகைக்கெழுக்களும் சமமாக இருக்கும் என்று கண்டுள்ளனர்.

இவற்றில் u-வுக்குப் பதில் f-ஐயும் பயன்படுத்தலாம் (f_{xy}, f_{yx}).

எடுத்துக்காட்டு:

$u(x, y) = 100 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y$, எனில்

கீழ்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\frac{\partial u}{\partial x}$ (ii) $\frac{\partial u}{\partial y}$ (iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (iv) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (v) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ (vi) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

தீர்வு :

$u(x, y) = 1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y$ எனில்,

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y)$

$= 0 - 3x^2 - 0 + 4(3x^2)y^6 + 0)$

$= -3x^2 + 12x^2y^6$

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y)$

$= 0 - 0 - 2y + 4x^3(6y^5) + 8$

$= -2y + 24x^3y^5 + 8$

(iii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$

$= \dfrac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 12x^2y^6)$

$= -6x + 12(2x)y^6$

$= -6x + 24xy^6$

(iv) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

$= \dfrac{\partial}{\partial y}(-2y + 24x^3y^5 + 8)$

$= -2 + 24x^3(5y^4) + 0$

$= -2 + 120x^3y^4$

(v) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

$= \dfrac{\partial}{\partial x}(-2y + 24x^3y^5 + 8)$

$$= 0 + 24(3x^2)y^5 + 0$$

$$= 72x^2y^5$$

(vi) $$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(-3x^2 + 12x^2y^6)$$

$$= 0 + 12x^2(6y^5) = 72x^2y^5$$

எடுத்துக்காட்டு:

$f(x,y) = 3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5$ எனில்(i) $f_x(1,-1)$ (ii) $f_{yy}(1,1)$ (iii) $f_{xy}(2,1)$ இவைகளைக் காண்க.

தீர்வு:

(i) $f(x,y) = 3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5$ எனில்,

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5)$$

$$= 6x + 0 + 6(1)y - (2x)y^3 + 0$$

$$= 6x + 6y - 2xy^3$$

$$f_x(1,-1) = 6(1) + 6(-1) - 2(1)(-1)^3 = 2$$

(ii) $$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(f) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5)$$

$$= 12y^2 + 6x - 3x^2y^2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(12y^2 + 6x - 3x^2y^2)$$

$$= 24y - 6x^2y$$

$$\therefore f_{yy}(1,1) = 18$$

(iii) $$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(12y^2 + 6x - 3x^2y^2)$$

$$= 6 - 6xy^2$$

$$\therefore f_{xy}(2,1) = -6$$

சார்பின் சார்பு விதி (Function of a Function Rule)

u என்பது v-இன் தொடர் சார்பாகவும், v என்பது x, y ஆகியவற்றின் தொடர் சார்பாகவும் இருக்கட்டும். $\Delta x, \Delta y$ என்பவை முறையே x, y ல் சிறிய கூடுதல்கள் எனில், அவற்றிற்கேற்ப v, u இல் $\Delta v, \Delta u$ கூடுதலாகக் கொள்வோம். அப்பொழுது,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$ என்ற எல்லையில்

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

இதேபோல்,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

கவனிக்க: u என்பது y என்ற ஒரே மாறியின் சார்பு ஆதலின், y ஐக் குறித்த u வின் வகைக்கெழு ஒரு பகுதி வகைக்கெழு அன்று, சாதாரண வகைக்கெழு. எனவே, அதை $\frac{du}{dv}$ எனக் குறிக்கிறோம்.

முழு வகையீடு (Total Differential)

$u=f(x,y)$ என்பது x,y என்ற மாறிகளின் ஒரு தொடர் சார்பாக இருக்கட்டும் $\Delta x,\Delta y$ என்பவை x,y-இல் எவையோ இரு மிகச்சிறிய கூடுதல்களாகவும், அவற்றின் காரணமாக u-வில் நேர்ந்த கூடுதல் Δu ஆகவும் இருக்கட்டும். அப்பொழுது u-வில் சேர்ந்த முழுக்கூடுதல்

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

இது, $\Delta x,\Delta y$ இரண்டினாலும் நேர்ந்தது. $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ என்ற எல்லையில் Δu அடையும் மதிப்பை u-வின் முழு வகையீடு (Total Differential of u) என்கிறோம்: அதை du என்று குறிக்கிறோம்.

இனி, Δu ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{aligned}\Delta u&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\\&\quad+f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}.\\&=\Delta x+\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\Delta y.\end{aligned}$$

இதை, $\Delta u=A\Delta x+B\Delta y$ எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$A=\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}.$$

$\Delta x\to 0$ எனில், $A\to\dfrac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}$; உடன் $\Delta y\to 0$ எனில், $A\to\frac{\partial f}{\partial x}$. இதேபோல், $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ எனில் $B\to\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\therefore\quad du=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

x, y ஆகியவற்றின் நுண்மதிப்பை $dx = \Delta x,\ \ dy = \Delta$, என வரையறுக்க,

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

எடுத்துக்காட்டு:

$u(x, y) = 1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y$, எனில் முழுவகைக் கெழு காண்க.

தீர்வு :

முழு வகையீடு: $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y)$$

$$= 0 - 3x^2 - 0 + 4(3x^2)y^6 + 0)$$

$$= -3x^2 + 12x^2y^6$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y)$$

$$= 0 - 0 - 2y + 4x^3(6y^5) + 8$$

$$= -2y + 24x^3y^5 + 8$$

முழு வகையீடு:

$$du = (3x^2 + 12x^2y^6)dx + (-2y + 24x^3y^5 + 8)dy.$$

எடுத்துக்காட்டு:

$Q = 5x^3 - 2x^2y + 3y^3$ என்ற சார்பின் முழுவகைக் கெழு காண்க.

தீர்வு :

முழு வகையீடு: $dQ=\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy.$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=15x^2-4xy$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y}=-2x^2+9y^2$$

முழு வகையீடு:

$$dQ=(15x^2-4xy)dx+(-2x^2+9y^2)dy$$

எடுத்துக்காட்டு:

$u(x,y)=x^3+y^3+x^2y$ என்ற சார்பின் முழுவகைக் கெழு காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+2xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2+x^2$$

முழு வகையீடு:

$$du=(3y^2+x^2)dx+(3x^2+2xy)dy$$

கிளைத்தேற்றங்கள்:

முழுவகைக் கெழு (Total Differential coefficient)

(i) $u=u(x,y), x=x(t), y=y(t)$ எனில் t-ஐக் குறித்த u-வின் முழுவகைக் கெழு.

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

(ii) $u = u(x,t), x = x(t)$ எனில், ($y = t$ என இட)

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

கவனிக்க : $\frac{du}{dt} \neq \frac{\partial u}{\partial t}$.

(iii) $u = u(x_1, x_2, ..., x_n), x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t) y ..., x_n = x_n(t)$

எனில், $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$.

பல சார்புகளின் சார்பின் பகுதி வகைக்கெழு (Partial Derivative of a funcion of several functions)

$u = u(x_1, x_2, ..., x_m) : x_1 = x_1(t_1, t_2, ..., t_n), x_2 = x_2(t_1, t_2, ..., t_n),$

$x_n = x_n(t_1, t_2, ..., t_n)$ எனில்,

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_2}$$

....

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_n} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_n}.$$

சமபடித்தான (அல்லது ஓரின) சார்புகள் (Homogenous Function)

இரு மாறிகளைச் சார்ந்து மாறும் தன்மையுடைய $z = f(x, y)$ என்ற சார்பினைக் கருதுக. இதில், x, y என்னும் இருமாறிகளின் மதிப்புகளையும் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவிலிருந்து, ஒரு நிலையான விகிதத்தில் அதிகரிக்கவோ அல்லது குறைக்கவோ செய்யும் நிலையில், z -இன் மதிப்பானது அதிகமான அல்லது சமமானது,

அல்லது குறைவான விகிதத்தில் மாறுவதைக் காணலாம். x, y என்ற மாறிகள் வேறுபடும் விகித அளவிலேயே, $z = f(x, y)$ சார்பின் மதிப்பும் அதிகரிக்கவோ, குறையவோ செய்யும்பொழுது, இச்சார்பானது சமபடித்தான (அல்லது ஓரின) சார்புகள் எனக்கூறப்படும். குறிப்பாக, $z = f(x, y)$ என்ற சார்பில் x, y என்ற இரு மாறிகளும் λ மடங்கு அதிகரிக்கையில், z-இன் மதிப்பு λ மடங்கு அதிகரிக்கும் (λ என்பது மாறிலி). இதுவே சமபடித்தான சார்பாகும் (Homogenous Function).

சமபடித்தான சார்புகள் (Homogenous Functions)

$f(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x_n^{-2}y^2 + ... + a_ny^n$ என்ற கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் x, y ஆகியவற்றின் படிகளின் கூடுதல் n. ஆக, x, y-இல் ஒவ்வோர் உறுப்பின் படியும் n. இதனால் $f(x, y)$ ஐ, x, y-இல் n படி சமபடித்தான சார்பு (a homogenous function of degree n in x and y) என்போம். இச் சார்பை,

$$f(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_ny^n$$
$$= x^n\left[a_0 + a_1\frac{y}{x} + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + ... + a_n\left(\frac{y}{x}\right)^n\right]$$

$= x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ என எழுதலாம்.

$f\left(\frac{y}{x}\right)$ என்பதை $\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

இவ்வாறு, $f(x, y)$ என்பது x, y-இல் n படி சமபடித்தான சார்பு எனில், அதை,

$f(x, y) = x^n\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ என எழுதலாம்.

பொதுவாக, $x_1, x_2, ..., x_m$ என்ற m மாறிகளின் ஒரு சார்பு, n படி சமபடித்தான சார்பு எனில், அதை,

$$x_i^n \phi\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \dots, \frac{x_m}{x_i}\right)$$

என எழுதலாம். இவற்றின் மறுதலையும் (Converse) சரியே.

எடுத்துக்காட்டு:

$$f(x,y) = 2x^4 + 3x^3 y + 5\frac{y^5}{x}$$ எனில்,

$$f(x,y) = x^4\left[2 + 3\frac{y}{x} + 5\left(\frac{y}{x}\right)^5\right]$$

$$= x^4 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^4 \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$ என எழுதலாம்.

எனவே f என்பது x, yல் சமபடித்தான ஒரு சார்பு. இதன் படி 4.

எடுத்துக்காட்டு:

$$f(x,y,z) = \frac{ax^5 + by^5 + cz^5}{lx^2 + my^2 + nz^2}$$ எனில், இதை

$$f(x,y,z) = \frac{x^5\left[a + b\left(\frac{y}{x}\right)^5 + c\left(\frac{z}{x}\right)^5\right]}{x^2\left[l + m\left(\frac{y}{x}\right)^2 + n\left(\frac{z}{x}\right)^2\right]}$$

$$= x^3 f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

$$= x^3 \phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

என எழுதலாம். எனவே f என்பது x, y, z-இல் சமபடித்தான சார்பு. இதன் படி 3.

பின்வரும் சார்புகளை, முதல்நிலை (First Degree) சமபடித்தான சார்புக்கு உதாரணங்களாகக் கொள்ளலாம்

(i) $z = ax + by;$

(ii) $z = a.x^{\alpha}.y^{1-\alpha}$

(iii) $z = \sqrt{ax^2 + 2hxy + by^2};$

(iv) $z = \dfrac{ax^2 + 2hxy + by^2}{cx + dy}$

$a, b, c, \alpha...$ ஆகியவை நேர்க்கணிப்பு (+) மாறிலிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$z = ax + by;$ எனில், இச்சார்பு முதல்நிலை (நேரியல்) சமபடித்தான சார்பா எனக் காண்க.

$$f(\lambda x, \lambda y) = a(\lambda x) + b(\lambda y)$$
$$= a(\lambda x) + b(\lambda y)$$
$$= \lambda(ax + by)$$

இது முதல்நிலை (நேரியல்) சமபடித்தான சார்பு.

பின்வரும் சார்புகளை, 2-ஆம் நிலை (Second Degree) சமபடித்தான சார்புக்கு உதாரணங்களாகக் கொள்ளலாம்:

i. $z = ax^2 + 2hxy + by^2$

ii. $z = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

எடுத்துக்காட்டு:

$z = x^2 + 4xy + 3y^2$ என்ற சார்பினைக் கருதுக. இச்சார்பு 2-ஆம் படி சமபடித்தான சார்பா எனக் காண்க.

x, y மாறிகளை, λ மாறிலிகளால் பெருக்குக.

அப்பொழுது,

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+4(\lambda x)(\lambda y)+3(\lambda y)^2$$
$$=\lambda^2x^2+4\lambda^2xy+3\lambda^2y^2$$
$$=\lambda^2[x^2+4xy+3y^2]$$
$$=\lambda^2.f(x,y)=\lambda^2z.$$

இது 2- ஆம் படி சமபடித்தான சார்பு.

எடுத்துக்காட்டு:

$f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ என்ற கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பில், x,y மாறிகளை λ மாறிலியால் பெருக்கும் போது,

$$(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^4x^4+\lambda^4y^4}{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}$$
$$=\frac{\lambda^4\left(x^4+y^4\right)}{\lambda^2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$=\frac{\lambda^2\left(x^4+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)}$$
$$=\lambda^2f(x,y)$$

இது இருபடி (Degree) சமபடித்தான சார்பாகும், x,y-இன் மதிப்புகள் λ மடங்கு அதிகரிக்கும் போது $f(x,y)$ ஆனது λ^2 அளவு அதிகரிக்கின்றது.

$z = a.x^{\alpha}.y^{\beta}(\alpha, \beta > 0)$ இச்சார்பு $(\alpha + \beta)$ நிலை சமபடித்தான சார்பு.

ஆயிலரின் தேற்றம்: வரையறை:

$u = f(x,y)$ என்று சார்பு n-சமபடித்தான சார்பில், [i.e., $\lambda x, \lambda y = \lambda^n u$],

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nQ$$

இதுவே ஆயிலரின் தேற்றமாகும
எடுத்துக்காட்டு:

$Q = 5x^3 - 2x^2y + 3y^3$ என்ற சார்பின் சமபடித் தன்மையினைக் காண்க.

ஆயிலர் தேற்றத்தைச் சரிபார்ப்பதற்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு சமபடித்தான சார்பாக இருக்கவேண்டும். x, y மாறிகளை λ என்ற மாறிலியால் பெருக்கும்போது,

$$= 5(x\lambda)^3 - 2(x\lambda)^2(y\lambda) + 3(y\lambda)^3$$
$$= 5x^3\lambda^3 - 2x^2\lambda^2 y\lambda + 3y^3\lambda^3$$
$$= \lambda^3\left(5x^3 - 2x^2y + 3y^3\right) = \lambda^3 Q$$

இது மூன்றாம் படி சமபடித்தான சார்பாகும். x, y மதிப்புகள் λ மடங்கு அதிகரிக்கும்போது, Q ஆனது $\left(\lambda^3\right)$ அளவு அதிகரிக்கின்றது.

ஆயிலரின் தேற்றப்படி, $x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = nQ$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 15x^2 - 4xy$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -2x^2 + 9y^2$$

$$x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}=x\left(15x^2-4xy\right)+y\left(-2x^2+9y^2\right)$$
$$=15x^3-4x^2y-2x^2y-9y^3$$
$$=15x^3-6x^2y+9y^3$$
$$=3\left(5x^3-2x^2y+3y^3\right)$$
$$=3Q$$

எனவே, ஆயிலரின தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டுவிட்டது.

எடுத்துக்காட்டு:

$u(x,y)=x^3+y^3+x^2y$ எனும் சார்புக்கு ஆயிலரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+2xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2+x^2$$

ஆயிலரின் தேற்றப்படி,

$$\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y=nu$$
$$\left(3x^2+2xy\right)x+\left(3y^2+x^2\right)y=nu$$
$$3x^3+2x^2y+3y^3+x^2y=nu$$
$$3x^3+3x^2y+3y^3=nu$$
$$3\left(x^3+y^3+x^2y\right)=3u$$

எடுத்துக்காட்டு:

$f(x,y,z) = 2x^3 + 4x^2y - 5xy^2 + z^3$ எனக் கொண்டு ஆயிலரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

$$f(x,y,z) = x^3\left[2 + 4\frac{y}{x} + 5\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^3\right]$$
$$= x^3 f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

என எழுத முடிகிறது. எனவே $f(x,y,z)$ என்பது x, y, z -இல் ஒரு சமபடிக் கோவை: படி 3. ஆயிலரின் தேற்றப்படி,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 3f$$

எனக் கிடைக்கவேண்டும். இனி,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 8xy - 5y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^2 - 10xy$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = x\left(6x^2 + 8xy - 5y^2\right) + y\left(4x^2 - 10xy\right) + z\left(3z^2\right)$$
$$= 3\left(2x^3 + 4^2y - 5xy^2 + z^3\right)$$
$$= 3f.$$

எனவே, ஆய்லரின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டுவிட்டது.

எடுத்துக்காட்டு:

$u(x,y)=x^3+y^3+x^2y$ எனும் சார்புக்கு ஆயிலரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு:

$$u(x,y)=x^3+y^3+x^2y \;....(1)$$

$$u(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3x^3+\lambda^3y^3+\lambda^2x^2(\lambda y)$$

$$=\lambda^3(x^3+y^3+x^2y)=\lambda^3u(x,y)$$

u என்பது x,y-ல் 3 படி உள்ள சமபடித்தான சார்பு

$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=3u$ என சரிபார்க்க வேண்டும்.

(1)ஐ x-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிட:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^3+2xy$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=3x^3+2x^2y$$

(1)- y-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிட:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2+x^2$$

$$y\frac{\partial u}{\partial y}=3y^3+x^2y$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3x^3+2x^2y+3y^3+x^2y$$

$$=3(x^3+x^2y+y^3)=3u$$

எனவே ஆயிலரின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு:

ஆயிலரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $u = \log \dfrac{x^4 + y^4}{x - y}$ எனில் $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$u = \log \frac{x^4 + y^4}{x - y} \text{ எனில், } \quad e^u = \frac{x^4 + y^4}{x - y}$$

இதில் x, y-இல் உள்ள 3-ஆம் படி சார்பாகும். ஆயிலரின் தேற்றத்தின்படி,

$$x\frac{\partial}{\partial x}(e^u) + y\frac{\partial}{\partial y}(e^u) = 3e^u$$

$$xe^u\frac{\partial u}{\partial x} + ye^u\frac{\partial u}{\partial y} = 3e^u$$

e^u ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3$

பொருளியல் முக்கியத்துவம்

உள்ளீடுகளின் தனித்தனி இறுதி நிலை உற்பத்தித்திறனை அந்தந்த உள்ளீடுகளின் கணியத்தால் (Quantity) பெருக்கினால் ஒவ்வொரு உள்ளீடுகளினால் ஏற்படும் உற்பத்தி கிடைக்கும். இவைகளின் தொகுப்பே மொத்த உற்பத்தி. ஆகவே நேரியல் சமபடித்தன்மையுடையதாயின் (Linear Homogenous Fucntion) இறுதிநிலை உற்பத்திக்கேற்ப மொத்த உற்பத்தியைப் பகிர்ந்தால் மீதியிருக்காது. இதுவே ஆயிலர் தேற்றம் (Euler's Theorem) என்பது. ஆனால்,

$$\lambda Q = X.MP_x + YMP_y$$

இத்தேற்றத்தை எண்மான எடுத்துக்காட்டால் விளக்கலாம். உற்பத்திச்சார்பு $Q = \sqrt{xy}$ என்று வைத்துக்கொள்வோம். மாறாப்பரும

விளைவில் $x=y=\ 100=\sqrt{100\times100}=100\ \ x,y$ இரட்டிப்பாகும் போது $x=y=200=\sqrt{200\times200}=200$ உள்ளீடு இரட்டிப்பு உற்பத்தியை இரட்டிக்கிறது. இனி ஆயிலரின் தேற்றத்தைப் பார்ப்போம்.

$x=100,\ y=100$ எனும்போது $Q\sqrt{100\times100}=100$

a) முதலில் x-ஐ மட்டும் சிறிது அதிகரிப்போம். அதாவது x ஐ மட்டும் 100-இலிருந்து 101-ஆக அதிகரிக்கும் பொழுது மொத்த உற்பத்தியானது,

$$Q=\sqrt{101\times100}=100.49876$$

எனவே x-இன் இறுதி நிலை உற்பத்தி

$$=100.49876-100=0.49876$$

b) இனி y ஐ மட்டும் சிறிது அதிகரிப்போம். அதாவது y-ஐ மட்டும் 100-இலிருந்து 101-ஆக அதிகரிக்கும் பொழுது மொத்த உற்பத்தியானது,

$$Q=\sqrt{100\times101}=100.49876$$

எனவே y-இன் இறுதிநிலை உற்பத்தி $=100.49876-100=0.49876$

ஆயிலரின் தேற்றப்படி

$$MP_x.X+MP_y.Y=\text{மொத்த உற்பத்தி}$$

$$(0.49876\times100)+(0.49876\times100)=99.752=100$$

எடுத்துக்காட்டு:

$Q=1.01\ \ L^{0.75}\ \ K^{0.25}$ என்ற உற்பத்திச் சார்பில் ஆயிலரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு:

L-இன் இறுதிநிலை உற்பத்தி $=\dfrac{\partial u}{\partial L}=(0.75)1.04L^{0.75-1}K^{0.25}$

$$=0.75\frac{Q}{L}$$

K-இன் இறுதி நிலை உற்பத்தி

$$= \frac{\partial Q}{\partial K} = (0.25)1.01L^{0.75}K^{0.25-1}$$

$$= 0.25\frac{Q}{K}$$

இச்சார்பு நேரியல் சமபடித்தான சார்பாகும். நேரியல் சமபடித்தான சார்பு ஆயிலரின் தேற்றத்திற்குப் பொருந்தும். ஆயிலரின் தேற்றப்படி

$$\frac{\partial Q}{\partial L}L + \frac{\partial Q}{\partial K}K = Q$$

$$(0.75)\frac{Q}{L}L + 0.25\frac{Q}{K}K = Q$$

$$(0.75 + 0.25)Q = Q$$

ஆயிலரின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு:

கொடுக்கப்பட்ட உற்பத்திச் சார்பு $Q = Ax^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ எனில், இச்சார்பு நேரியல் சமபடித்தானதா எனக் காண்க. ஆயிலரின் விதியைப் பயன்படுத்தி நேரியல் சமபடித்தன்மையினைச் சரிபார்க்கவும். உழைப்பின் அளவும், மூலதனத்தின் அளவும் ஒரு மடங்கு $(\lambda = 1)$ அதிகரிக்கையில் உற்பத்தியில் ஏற்படும் விளைவினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

உற்பத்திச்சார்பு $Q = Ax^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ எனில் x, yம λ மடங்கு அதிகரிக்கையில் உற்பத்தி அதிகரிப்பானது,

$$= A(x\lambda)^{\frac{1}{2}}(y\lambda)^{\frac{1}{2}}$$

$$= Ax^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lambda Ax^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lambda Q$$

எனவே இது நேரியல் சமபடித்தன்மையுடைய சார்பாகும். $\lambda = 1$ எனில் உற்பத்தி ஒரு மடங்காக அதிகரிக்கும் என்று ஆயிலரின் தேற்றப் படி

$$x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = nQ$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2}Ax^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{2}Ax^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$$

$$x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = nQ$$

$$xA\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + yA\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} = nQ$$

$$\frac{1}{2}Ax^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}Ax^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]Q$$

$$= Q$$

உற்பத்திச்சார்பு $Q = Ax^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ எனில் x, y-உம் λ மடங்கு அதிகரிக்கையில் உற்பத்தியும் ஒரு மடங்காக அதிகரிக்கும் என்று ஆயிலரின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

இருமாறிச் சார்புகள் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் (Function of Two Variables - Maxima and Minima)

x, y என்ற இரண்டு சாராமாறிகளின் ஒரு சார்பை $u = f(x, y)$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு, x, y-இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு ஏற்ப கிடைக்கப்பெறும் u-இன் மதிப்புகளுக்கு ஒப்பான பல்வேறு புள்ளிகளையும் வரைபடத்தில் குறிப்பிடுவோமானால், அப்புள்ளிகள் அனைத்தும் ஒரு குறிப்பிட்ட வளைபரப்பின் மீது அமைந்திருக்கும் என்று தெரியும். அதாவது, $u = f(x, y)$ என்பது

இந்த வளைபரப்பினைக் குறிக்கும் சமன்பாடு என்றறிகிறோம். இத்தகைய u எனும் சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளை ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் வரையறுக்கும் முறைகளை இனி பார்ப்போம்.

$u = f(x,y)$ எனும் சமன்பாடு ஒரு தொடர் வளைபரப்பைச் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்வோம். இந்த வளைபரப்பின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியை (a,b) என்று குறிப்பிடுவோம். மேலும் $\in,\delta$ என்பன ஏதேனும் இரண்டு மிகச் சிறிய மிகை மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும். இப்பொழுது,

$f(a-\in,b-\delta) < f(a,b) > f(a+\in,b+\delta)$ எனும் சமனின் மைகளை நிறைவு செய்யுமாறு a,b என்ற எண்கள் அமையுமாயின், பின் $f(a,b)$ என்பது (a,b) என்ற புள்ளியில் $f(x,y)$ என்ற சார்பின் மீப்பெரும் மதிப்பு (அல்லது பெருமம்) என்று வரையறுக்கப்படும்.

இதேபோன்று, a,b எனும் எண்கள்

$f(a-\in,b-\delta) > f(a,b) < f(a+\in,b+\delta)$ என்ற நிபந்தனைக் குட்பட்டு அமையுமானால், பின், $f(a,b)$ என்பது $f(x,y)$-இன் மீச்சிறு மதிப்பு (அல்லது சிறுமம்) எனப்படும்.

அதாவது, a,b என்ற புள்ளிக்கு மிக அருகில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் பெறப்படும் $f(x,y)$ – இன் மதிப்பு $f(a,b)$-ஐ விட சிறியதாக (அல்லது பெரியதாக) இருக்குமானால், பின் $f(a,b)$ என்பது, $f(x,y)$ என்ற சார்பின் மீப்பெருமம் (அல்லது மீச்சிறுமம்) என்று கூறப்படும்.

அடுத்து, ஒரு சார்பு மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளை அடைவதற்கான நிபந்தனைகளைப் பார்ப்போம். இத்தகைய நிபந்தனைகளை இரண்டு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். அவை (i) தேவையான நிபந்தனைகள், (ii) தேவையான, மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகள் எனப்படும். இவற்றைப் பெறும் முறையைத் தவிர்த்து, நிபந்தனைகளை மட்டும் எடுத்துக் கூறுவோம்.

(i) தேவையான நிபந்தனைகள் (Necessary Conditions)

$u = f(x,y)$ என்ற சார்பு (a,b) என்ற புள்ளியில் மீப்பெரு (அல்லது மீச்சிறு) மதிப்பை அடைவதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகளாவன,

(a,b) எனும் புள்ளியில் $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, மற்றும் $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

என்பனவாகும்.

அதாவது, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{(a,b)} = 0; \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{(a,b)} = 0$

(ii) தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகள் (Necessary and Sufficient Conditions)

$u = f(x,y)$ என்ற சார்பு, புள்ளி $(a,b)-$இல் பெருமத்தை அடைவதற்கான நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு:

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{(a,b)} = 0; \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{(a,b)} = 0$

(2) $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(a,b) < 0; \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{(a,b)} < 0$

(3) $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(a,b)} \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{(a,b)} > \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2_{(a,b)}$

இதேபோன்று $(a,b)-$இல் u சிறுமத்தை அடைவதற்கான நிபந்தனைகளாவன:

(1) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(a,b)}=0;\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(a,b)}=0$

(2) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(a,b)}>0;\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{(a,b)}>0$

(3) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(a,b)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{(a,b)}>\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_{(a,b)}$

குறிப்பு: மேலே கண்ட தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகளுள் நிபந்தனை (3)-க்குப் பதிலாக.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)<\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)$$ என்றோ,

அல்லது,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)$$

என்றோ இருக்குமானால், பின் (a,b) எனும் புள்ளியில் $f(x,y)$ பெருமத்தையோ அல்லது சிறுமத்தையோ அடைய முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு:

$x^3+3x^2-y^2+4$ என்ற சார்பினை மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளுக்குப் பரிசோதிக்கவும்.

தீர்வு:

$u=x^3+3x^2-y^2+4$ என்க.

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6x;$ மற்றும் $\frac{\partial^2 u}{\partial y}=6x+6$

இதேபோன்று, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y;$ மற்றும் $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$

மேலும், $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(-2y)$$

$$= 0$$

இப்பொழுது $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0$

i.e., $x = 0, -2$

இதேபோன்று $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = 0$

எனவே, தேவையான புள்ளிகள் $P(0,0),\ Q(-2,0)$ என்பனவாகும்.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P = 6 > 0; \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P + -2 < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P = 6(-2) = -12 < 0$$

ஆனால், $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_P = 0$

இவ்வாறு, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) < \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$ என்று தெரிகிறது.

எனவே, P எனும் புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்ட சார்பு பெருமத்தையோ, அல்லது சிறுமத்தையோ அடைய முடியாது என அறியலாம்

<+>

பகுதி வகையீட்டின் பயன்பாடுகள்

இதற்கு முந்தைய பகுதியில் மொத்த செலவுச் சார்பு மொத்த வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டு இருப்பின் அதற்கான இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு, இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு, தேவை நெகிழ்ச்சி காணும் முறைகளைக் கண்டோம். பகுதி வகையிடல் என்ற கருத்துரு எவ்வாறு பொருளியலில் பயன்படுகிறது என்பதைப் பற்றி இந்த பகுதியில் நாம் காணலாம். பொருளியலில் உற்பத்தி சார்பைத் தொழிலாளர் செலவு, மூலதனம் வாயிலாகவும், விலைச் சார்பை அளிப்பு, தேவை வாயிலாகவும் வெளிப்படுத்தலாம். பொதுவாக செலவு, இலாபச்சார்புகள் பல சார்பிலா மாறிகளைப் பொறுத்தே மதிப்புகளைப் பெறுகின்றன. உதாரணமாக கச்சாப் பொருள்களின் விலை, தொழிலாளர்களின் ஊதியம், சந்தையின் நிலவரம் என்பது போல பல சார்பிலா மாறிகளைப் பெற்று அமைகிறது. எனவே y என்ற சார்ந்த மாறியானது $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ என்ற சார்பிலா மாறிகளைப் பொறுத்தே மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும். இதனை $y = f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$ எனக் குறிப்போம். இருந்த போதிலும் சார்பிலா மாறிகளை இரண்டு அல்லது மூன்றாகக் குறைத்து அமைந்த சார்புகளை மட்டும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

பகுதி தேவை நெகிழ்ச்சிகள் (Partial elasticity of demand)

A, B ஆகிய பொருள்களின் விலைகள் முறையே p_1 மற்றும் p_2, p_1, p_2 ஆகியனவற்றைப் பொறுத்து A என்ற பொருளின் தேவை $q_1 = f(p_1, p_2)$.

p_1-ஐ பொறுத்து, q_1 இன் பகுதி தேவை நெகிழ்ச்சி

$$-\frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{Eq_1}{Ep_1}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இதே போல், p_2 -ஐ பொறுத்து, q_2 இன் பகுதி தேவை நெகிழ்ச்சி

$$-\frac{p_2}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_2}=\frac{Eq_1}{Ep_2}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு:

A என்ற பொருளின் தேவை $q_1 = 240 - p_1^2 + 6p_2 - p_1p_2$ எனில் $\frac{Eq_1}{Ep_1}$ மற்றும் $\frac{Eq_1}{Ep_2}$ என்ற பகுதி நெகிழ்ச்சிகளை $p_1 = 5, p_2 = 4$ எனும்பொழுது காண்க.

தீர்வு :

$$q_1 = 240 - p_1^2 + 6p_2 - p_1p_2$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -2p_1 - p_2$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 6 - p_1$$

$$\text{(i)} \quad \frac{Eq_1}{Ep_1} = -\frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$$

$$= \frac{-p_1(-2p_1 - p_2)}{240 - p_1^2 + 6p_2 - p_1p_2}$$

$p_1 = 5, p_2 = 4$ எனில்

$$\left(\frac{Eq_1}{Ep_1}\right) = \frac{-(5)(-10-4)}{240-25+24-20} = \frac{70}{219}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{Eq_1}{Ep_2} = -\frac{p_2}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_2}$$

$$= \frac{-p_2(6-p_1)}{240 - p_1^2 + 6p_2 - p_1p_2}.$$

$p_1 = 5, p_2 = 4$ எனில்

$$\left(\frac{Eq_1}{Ep_2}\right)=\frac{-4(6-5)}{240-25+24-20}=\frac{-4}{219}$$

உற்பத்திச் சார்பு

உற்பத்திச் சார்பு என்பது ஒரு நிறுவனத்தின் உள்ளீடுகளின் அளவிற்கும் வெளியீடுகளின் அளவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பினைக் குறிக்கிறது. உள்ளீடு என்பது நிலம், உழைப்பு, மூலதனம், அமைப்பு ஆகியவற்றைக் குறிக்கிறது உற்பத்தியின் அளவு (Level of Output) அல்லது வெளியீடு என்பது பல்வேறு உள்ளீடுகளை வைத்து உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருள்களின் அளவைக் குறிக்கிறது. சுருங்கச் சொன்னால், உற்பத்திச் சார்பு என்பது வெளிப்பாட்டு வாய்ப்புகளின் பட்டியலைக் குறிப்பதே ஆகும்.

உற்பத்திச் சார்பு என்பதனை ஒரு கணிதச் சமன்பாடு மூலம் குறிப்பிடலாம். இதில் வெளியீடு (Output) என்பது சார்பு மாறி (dependent variable). உழைப்பு முதல் , நிர்வாகம் என்பது சார்பிலா மாறிகள் (Independent variables). இவற்றிடையே உள்ள தொடர்பு கீழ்வருமாறு அமையும்.

$$Q=f(L,K,M)$$

இதில்	$Q=$	வெளிப்பாடு
	$L=$	உழைப்பு
	$K=$	முதல்
	M	நிர்வாகம்
	$F=$	காரணிகளிடையே உள்ள தொடர்பு

எடுத்துக்காட்டு:

$Q=10K-K^2+KL$ என்பது உற்பத்திச் சார்பு, இதில் L என்பது தொழிலாளர் சம்பளம் மற்றும் K என்பது மூலதனம் எனில், $K=2, L=6$ களில் மூலதனம் மற்றும் தொழிலாளர் சம்பளம் ஆகியனவற்றினை பொறுத்து இறுதிநிலை உற்பத்திகளைக் காண்க.

தீர்வு :

உற்பத்திச் சார்பு, $Q=10K-K^2+KL$ (1)

மூலதனம் பொறுத்த இறுதிநிலை உற்பத்தியானது $\frac{\partial Q}{\partial K}$

$\therefore (1)$-ஐ, K-யைப் பொறுத்து பகுதி வகைப்படுத்த

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 10 - 2K + (1)L$$
$$= 10 - 2K + L$$

எனில் $K = 2, L = 6, \frac{\partial Q}{\partial K} = 10 - 2(2) + 6 = 12$

தொழிலாளர் சம்பளம் பொறுத்த இறுதிநிலை உற்பத்தியானது $\frac{\partial Q}{\partial L}$

$\therefore (1)$-ஐ L-ஐ பொறுத்து பகுதி வகைப்படுத்த

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = K$$

$K = 2, L = 6,$ எனில் $\frac{\partial Q}{\partial L} = 2.$

$\therefore$ மூலதனத்தைப் பொறுத்து இறுதிநிலை உற்பத்தி $= 12$ அலகுகள்
தொழிலாளரைப் பொறுத்து இறுதிநிலை உற்பத்தி $= 2$ அலகுகள

காப்-டக்ளசின் உற்பத்திச் சார்பு (Cobb-Douglas Production function)

பொருளியல் அறிஞர்கள் பலர் நடைமுறையில் காணும் உற்பத்திச் சார்புகள் பலவற்றை ஆராய்ந்துள்ளனர். உள்ளீடுகளின் அளவுகளில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளையும் அவற்றால் வெளியீடுகளின் அளவுகளில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளையும் புள்ளியல் முறைகளைக் கொண்டு ஆராய்ந்திருக்கின்றனர். உற்பத்திச் சார்புகளில் புகழ் பெற்ற தொன்று காப்-டக்ளசு உற்பத்திச் சார்பு என்பதாகும். காப்-டக்ளஸ் உற்பத்திச் சார்பில் வெளியீடு என்பது உற்பத்தி பொருட்கள் முழுவதையும் குறிக்கிறது. உள்ளீடுகள் உழைப்பும் முதலுமாகும்.

காப்-டக்ளசின் உற்பத்திச் சார்பின் சூத்திரம்.

$$Q = AL^{a} K^{(1-a)}$$

இதில் Q வெளியீடு L – உழைப்பாளர்களின் எண்ணிக்கை K-மூலதனம் A-யும் a யும் நேர்கணியமான மாறிலிகள் (Positive

Constants) a — யின் மதிப்பு ஒன்றுக்கு குறைவு $(a<1)$ காப் டக்ளலின் உற்பத்திச் சார்பு நேர்கோட்டுச் சமப்படித்தானது (Linear and Homogeneous) உதாரணமாகஉழைப்பும் முதலும் ஒரே விகிதாச்சாரத்தில் அதிகரிப்பதாகக் கொள்வோம். இதனால் $L, \lambda L$ ஆகவும் $K, \lambda K$ ஆகவும் மாறும். (ஒவ்வொரு காரணியும் 10% அதிகரித்தால் λ யின் மதிப்பு 1.10 ஆக இருக்கும்.)

உழைப்பும் முதலும் அதிகரித்த பின் சமன்பாடான்து

$$
\begin{aligned}
& A(\lambda L)^{a}(\lambda K)^{(1-a)} \\
& = A.\lambda^{a}.L^{a}\lambda^{(1-a)}K^{(1-a)} \\
& = A.\lambda^{(a+1-a)}.L^{a}.K^{(1-a)} \\
& = A.\lambda L^{a}K^{(1-a)} \\
& = \lambda Q
\end{aligned}
$$

உழைப்பும் முதலும் அதிகரித்த பின் வெளியீடு அதே வீதத்தில் அதிகரிப்பதனால் மாறாப் பரும விளைவு செயல்படுவது தெளிவாகின்றது.

காப்-டக்ளசின் உற்பத்திச் சார்பில் உழைப்பு நான்கில் ஒரு பங்காகவும் அமையும். இது மாறா பரும விளைவினை (constant returns to scale) குறிப்பிடுகிறது. காப்-டக்ளசின் உற்பத்திச் சார்பு சூத்திரத்தின் தோராயமான கண்டுபிடிப்பு என்னவெனில் பொருள் செய் ஆக்கத்தில் உழைப்பு முக்கால்வாசிக் கூடுதலையும் மூலதனம் கால்வாசிக் கூடுதலையும் உண்டாக்குகின்றன என்பதாகும்.

காப் - டக்ளஸ் உற்பத்திச் சார்பு

$$Q = AL^{a}K^{1-a}$$

$Q =$ மொத்த உற்பத்தி

$L =$ உழைப்பின் அலகுகள்

$K =$ மூலதனத்தின் அலகுகள்

$A =$ மாறிலி

$a =$ பண்பளவை

காப் - டக்ளசின் உற்பத்திச் சார்பின் தன்மைகள்

1. கொடுக்கப்பட்ட சார்பானது நேரியல் சமபடித்தன்மையான சார்பாகும் $\left[b+(1-b)=1\right]$

2. $b, 1-b$ என்பவை முறையே உற்பத்தியின் உழைப்பின் நெகிழ்ச்சி மூலதன நெகிழ்ச்சி ஆகியவற்றைக் குறிப்பிடுகிறது.

3. $b-$ என்பதும், மொத்த உற்பத்தியில் மூலதனத்தின் பங்கையும் $(b-1)$ என்பது உழைப்பின் பங்கையும் குறிப்பிடுகின்றது.

காப் - டக்ளசின் மற்றொரு வடிவமான $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$ என்பது பின்னர் மாற்றி வடிவமைக்கப்பட்ட சார்பாகும். இச்சார்பில்:

$\alpha+\beta=1$ எனில் மாறாப் பரும விளைவாகும் (Constant Returns to Scale) .

$\alpha+\beta\geq 1$ எனில் வளர் செல் பரும விளைவாகும் (Increasing Returns to Scale).

$\alpha+\beta\leq 1$ எனில் குறைந்து செல் பரும விளைவாகும் (Decreasing Returns to Scale).

$$\alpha = \frac{\text{உழைப்பின் பங்கு}}{\text{மொத்த உற்பத்தி}} = \text{உற்பத்தியின் உழைப்பு நெகிழ்ச்சி}$$

$$\beta = \frac{\text{மூலதனத்தின் பங்கு}}{\text{மொத்த உற்பத்தி}} = \text{உற்பத்தின் மூலதன நெகிழ்ச்சி}$$

இதன் விளக்கத்தைக் காணலாம்.

இச்சார்பிலிருந்து உழைப்பு, மூலதனத்தின் இறுதி நிலை உற்பத்திகளை கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

உழைப்பின் இறுதி நிலை உற்பத்தி $\left(MP_L\right)=\alpha\left(Q/L\right)$;

மூலதனத்தின் இறுதி நிலை உற்பத்தி $\left(MP_K\right)=\beta\left(Q/K\right)$

காப் டக்ளஸ் உற்பத்திச் சார்பில், காரணியின் அடுக்கானது இறுதி நிலை உற்பத்திக்கும் சராசரி உற்பத்திக்கும் இடையே உள்ள விகிதமாகும்.

$$Q = AL^{\alpha} K^{\beta}$$

$$MP_L = \partial Q / \partial L$$

$$= \alpha A L^{\alpha - 1} K^{\beta}$$

$$= \alpha \left(A L^{\alpha} K^{\beta} \right) L^{-1}$$

$$= \alpha . Q / L$$

$$= \alpha \left(AP_1 \right)$$

$$\alpha = \frac{MP_L}{AP_L}$$

AP_L, MP_L முறையே உழைப்பின் சராசரி மற்றும் இறுதி நிலை உற்பத்தி ஆகும். அதே போன்று

$$MP_K = \beta . \frac{Q}{K}$$

$$\beta = \frac{MP_K}{AP_K}$$

இச்சார்பில் உற்பத்தி நெகிழ்ச்சியானது (Elasticity of Production)

$$EQ = \frac{\text{உற்பத்தியில் சதவீத மாற்றம்}}{\text{உள்ளீட்டின் சதவீத மாற்றம்}}$$

உழைப்பு, உள்ளீடாக இருக்கும்போது

$$EQ = \frac{\Delta Q}{Q} \div \frac{\Delta L}{L}$$

$$= \frac{\Delta Q}{\Delta L} . \frac{L}{Q}$$

$$= \left(MP_L \right) \left(\frac{1}{AP_L} \right)$$

இதே போல் மூலதனம் உள்ளீடாக இருக்கும்போது

$$EQ = \frac{\Delta Q}{Q} \div \frac{\Delta K}{K}$$

$$= \frac{\Delta Q}{\Delta K} . \frac{K}{Q}$$

$$= (MP_L)\left(\frac{1}{AP_Q}\right)$$

காப் - டக்ளஸ் சார்பில $(\alpha + \beta = 1)$ என இருக்கும்போது பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சியும் ஒன்று என்ற மதிப்பில் இருப்பது இச்சார்பில் மட்டுமேயாகும்.

இரு காரணிகளுக்கிடையேயுள்ள பதீலிட்டு நெகிழ்ச்சியைக் (Elasticity of Substitution) கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

$$\sigma = \frac{\text{காரணி-கணியம் வீதத்தில் சதவீத மாற்றம்}}{\text{காரணி-விலை வீதத்தில் சதவீத மாற்றம்}}$$

இறுதிநிலைப் பதிலீட்டு வீதம் என்பது $\mathrm{MRS}_{K.L} = \frac{\mathrm{MPK}}{\mathrm{MP_L}} = \frac{\mathrm{PK}}{\mathrm{P_L}}$

எனவே MRS-ஐ பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சி சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டால்

$$\sigma = \frac{d(K/L) \div (K/L)}{d(MRS) \div (MRS)}$$

$$\sigma = \frac{d(K/L) \div (K/L)}{d(\alpha/\beta)(K/L) \div (\alpha/\beta)(K/L)}$$

$$= \frac{(\alpha/\beta).d(K/L)}{(\alpha/\beta)d(K/L)} = 1$$

இங்கு அனைத்து புள்ளிகளுக்கும் பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சிக் கெழுவானது 1 என அமையும். அதாவது, காரணிகள் எந்த அளவில் கலந்து பயன்படினும் $Q = AK^{\alpha} L^{\beta}$ என்ற உற்பத்திச் சார்பில் $\sigma = 1$ என்றே அமைந்திருக்கும். α, β என்பது முறையே உற்பத்தியில் உழைப்பின் பங்கையும் மூலதனத்தின் பங்கையும் குறிக்கின்றன. அதாவது

$$Q = AL^{\alpha} K^{\beta} U$$

$$LogQ = \log A + \alpha \log L + \beta \log K + \log U$$

இம்மடக்கைச் சார்பினை $\log L$ குறித்து வகையிட

$$\frac{\partial(\log Q)}{\partial(\log L)} = \alpha$$

$$\alpha = \frac{\partial Q}{\partial L} . \frac{L}{Q} = MP_L . \frac{L}{Q}$$

நிறைவுப் போட்டியில் ஒவ்வொரு உற்பத்தி காரணிக்கும் அதனதன் இறுதி நிலை உற்பத்திகேற்ப ஊதியம் கொடுக்கபடுகின்றதெனில் OC வானது மொத்த உற்பத்தியில் ஊதியத்தின் பங்கைக் குறிக்கும்.

$$\alpha = MP_L \frac{L}{Q} = \frac{P_L . L}{P_Q . Q} = \frac{\text{ஊதியத்தின் பங்கு}}{\text{மொத்த வருமானம்}}$$

β – வானது மொத்த உற்பத்தியில் மூலதனத்தின் பங்கைக் குறிக்கும்.

$$\beta = MP_K \frac{K}{Q} = \frac{P_K . K}{P_Q . Q} = \frac{\text{மூலதனத்தின் பங்கு}}{\text{மொத்த வருமானம்}}$$

அதாவது α, β என்பவை மொத்த வருமானத்தில் காரணிகளுடைய அதனதனுடைய பங்குகள் ஆகும்.

குறைகள்

1) மாறா பரும விளைவுகளை இது குறிப்பிடுவதாக குறை கூறப்படுகிறது. உண்மையில் மாறா பரும விளைவுகள் செயல்படுவதில்லை. தொழில்கள் வளர்ந்து செல் விளைவு அல்லது குறைத்து செல் விளைவு இவற்றின் அடிப்படையிலேயே செயல்படுகின்றன. சில உற்பத்திக் காரணிகளின் பற்றாக்குறையில் காரணத்தினாலோ அவற்றைப் பகுக்க முடியாமல் இருப்பதாலோ எல்லா உற்பத்திக் காரணிகளிலும் சமமான மாற்றம் செய்ய இயலவில்லை.

2) எந்தவொரு தொழில் முனைவோரது குறிக்கோளும் வளர்ந்து செல் விளைவினைப் பெற வேண்டும் என்பதே அல்லாமல் மாறா விளைவல்ல.

3) ஒரு இடுமானத்திற்குப் பதிலாக மற்றொரு இடுமானத்தை எப்பொழுதும் பதிலீடு செய்ய முடியாது.

இரண்டு மாறிகளுடைய சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் காணல் (Maxima and Minima of a Function of Two Variables).

நிபந்தனைக்கு உட்படாத உத்தம மதிப்பு காணுதல் (Unconstrained Optimisation)

கொடுக்கப்பட்ட சார்பில் இரண்டு சார்பிலா மாறிகள் இருந்தால் சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு அமையும்.

$z = f(x, y)$ என்ற சார்பில் மீப்பெரு மதிப்புக்கு முதல்வரிசை நிபந்தனையாக.

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$ என்றும்.

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனையாக,

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0 \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0 \quad f_{xx} f_{yy} > \left(f_{xy}\right)^2.$$

f_{xy} என் பது $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$z = f(x, y)$ என்ற சார்பில் மீச்சிறு மதிப்புக்கு முதல்வரிசை நிபந்தனையாக,

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$ என்றும்.

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனையாக,

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0 \quad f_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}>0 \quad f_{xx}f_{yy}>\left(f_{xy}\right)^2$$

என்று அமையும்.

$f_x=f_y=0, f_{xx}f_{yy}=\left(f_{xy}\right)^2$ என் இருந்தால், கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் தன்மையைப்பற்றி ஏதும் கூற இயலாது.

$z=f\left(x,y\right)$ என்ற சார்புக்கு மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்பு காணுவதற்கான நிபந்தனைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியிடலாம்.

நிபந்தனை Condition	மீப்பெருமம் Maximum	மீச்சிறுமம் Minimum
முதல் வரிசை	$f_x=f_y=0$	$f_x=f_y=0$
இரண்டாம் வரிசை	$f_{xx}<0, f_{yy}<0,$ $f_{xx}f_{yy}>(fxy)^2$	$f_{xx}>0, f_{yy}>0$ $f_{xx}f_{yy}>(fxy)^2$

எடுத்துக்காட்டு:

உத்தமாக்கு : $z=4x^2-7x-2xy-5y+4y^2$

மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்கு $f_x=f_y=0$ என அமையும். எனவே

$$f_x=8x-7-2y=0$$
$$f_y=-2x-5+8y=0$$

இச் சமன்பாடுகளைக் கீழ்க்ண்டவாறு மாற்றி எழுதி, கிராமரின் விதிப்படி x, y ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

$$8x-2y=7$$
$$-2x+8y=5$$

எனவே $x=\frac{64}{60}$, $y=\frac{54}{60}$ என்ற புள்ளிகளில் மீப்பெருமம் அல்லது மீச்சிறுமம் அடையும்.

$fxx = 8 \quad fxy = -2 \quad fyx = -2 \quad fyy = 8$

$f_{xx} f_{yy} = 8 \times 8 = 64$

$(fxy)^2 = (-2)^2 = 4$

$f_{xx} > 0, f_{yy} > 0, \quad f_{xx} f_{yy} > (fxy)^2$

எனவே இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனைப்படி

$f_{xx} > 0, f_{yy} > 0, f_{xx} f_{yy} > (fxy)^2$ என்று இருப்பதால்

$x = \dfrac{64}{60},\ y = \dfrac{54}{60}$ என்ற புள்ளிகளில் $z-$ஆனது மீச்சிறுமம் அடையும்.

எடுத்துக்காட்டு:

u$=x^3 + 3x^2 - y^2 + 4$ என்ற உற்பத்திச் சார்பினை மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளுக்குப் பரிசோதிக்கவும்.

தீர்வு

$u = x^3 + 3x^2 - y^2 + 4$ என்க.

$\therefore \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6x;$ மற்றும் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y} = 6x + 6$

இதேப்போல, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y;$ மற்றும் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$

மேலும், $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(-2y)$$

$$= 0$$

இப்பொழுது $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0$

$i.e.,\ x = 0, -2$

இதேபோன்று $\frac{\partial u}{\partial y}=0 \to y=0$

எனவே, தேவையான புள்ளிகள் $P(0,0)$, $Q(-2,0)$ என்பனவாகும்.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P = 6>0; \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P -2<0$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P = 6(-2) = -12<0$$

ஆனால், $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_P = 0$

இவ்வாறு, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) < \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$ என்று தெரிகிறது.

எனவே, P எனும் புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்ட சார்பு பெருமத்தையோ, அல்லது சிறுமத்தையோ அடைய முடியாது.

கெசியின் அணிக்கோவை (Hessian Deteminant)

கெசியின் அணிக்கோவையானது: $|H_1| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

இவ்வணிக்கோவையில் $f_{xx}<0$ என்றும் $|H_1| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$ என்றும் இருந்தால் z — ஆனது மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறும், மாறாக

இவ்வணிக்கோவையில் $f_{xx}>0$ என்றும் $|H_1| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$ என்றும் இருந்தால் z — ஆனது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறும்.

$f_{xx} = 8$ மிகை எண்ணாகவும்(Positive); $|H_1| = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 4 = 60$ மிகை எண்ணாகவும் இருப்பதால் இச்சார்பானது மீச்சிறு மதிப்பை $\left(x = \frac{64}{60}, y = \frac{54}{60}\right)$ என்ற புள்ளியில் ஏற்கின்றது.

இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட சார்பிலா மாறிகளின் மதிப்பு காணல்

இரண்டுக்கு மேற்பட்ட சார்பிலா மாறிகள் இருந்தால், மேற் கூறிய முறைப்படி மீட்பெருமம் மற்றும் மீச்சிறுமம் காண்பது சிக்கலானதாகும். எனவே. $z = f(x, y, w)$ என்ற சார்பிற்கு இயற்கணித அணி (Matrix Algebra) முறைப்படி மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காணும் நிபந்தனைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு கூறலாம்.

மீப்பெருமம் பெற முதல் வரிசை நிபந்தனையாக,

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_w = 0$$

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனையாக

$$|f_{xx}| < 0,$$

$$|H_1| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xw} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yw} \\ f_{wx} & f_{wy} & f_{ww} \end{vmatrix} < 0$$ என அமையும்.

இவ்வணிக் கோவையில் $f_{xx} < 0$ என்றும் $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$ என்னும் $|H_2| < 0$ என்றும் இருந்தால் $z-$ஆனது (x, y, w)-ல் மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறும் மேலும் இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனையில் உப

அணிக் கோவைகள் யாவும் எதிர் மறை, நேர் மறை குறி என மாறி மாறி இருந்தால், கொடுக்கப்பட்ட சார்பு மீப்பெறு மதிப்பை ஏற்கும்.

மீச்சிறுமம் பெற முதல் வரிசை நிபந்தனையாக,

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_w = 0$$

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனையாக

$$|f_{xx}| > 0,$$

$$|H_1| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xw} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yw} \\ f_{wx} & f_{wy} & f_{ww} \end{vmatrix} > 0$$ என அமையும்.

இவ்வணிக் கோவையில், $|f_{xx}| > 0$ என்றும் $|H_1| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$ என்றும் $|H_2| > 0$ என்றும் இருந்தால் z — ஆனது (x, y, w)-ல் மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறும். மேலும் இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனையால் உப அணிக் கோவைகள் யாவும் நேர் மறைக்குறியில் இருப்பதால் கொடுக்கப்பட்ட சார்பு மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்கும்.

எடுத்துக்காட்டு:

கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பு காண்க.

சார்பினை உத்தமமாக்கு

$$z = f(x, y, w) = -4x^2 + 8x + 2xw - 3y^2 + 5y + yw - 5w^2 + 64$$

முதல்வரிசை நிபந்தனையின் படி

$$f_x = -8x + 8 + 2w = 0$$
$$f_y = -6y + 5 + w = 0$$
$$f_w = 2x + y - 10w = 0$$

இச்சமன்பாடுகளை கிராமர் விதிப்படி தீர்வு செய்தால்.

$$x = 1.08, \ y = 0.88, \ w = 0.30$$

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனைப்படி

$$f_{xx} = -8 \quad f_{xy} = 0 \quad f_{xw} = 2$$
$$f_{yx} = 0 \quad f_{yy} = -6 \quad f_{yw} = 1$$
$$f_{wx} = 2 \quad f_{wy} = 1 \quad f_{ww} = 10$$

கெசியின் அணிக்கோவையானது

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -448$$

f_{xx} ஆனது குறைஎண்ணாகவும் (Negative Value)

$$|H_1| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

மிகைஎண்ணாகவும் $|H_2|$ குறைஎண்ணாகவும் இருப்பதால் இச்சார்பு $(x = 1.08, \ y = 0.88, \ w = 0.30)$ ல் மீப்பெரு மதிப்பை ஏற்கும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளுடன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் காணல் (Maxima and Minima Under Given Constraints)

பிரதியிடும் முறை (Substitution Method)

நுகர்வோர் சமநிலை (Consumers Equilibrium)

நுகர்வோர் பயன்பாடு மீப்பெரு நிலையை அடைதல் (Maximization of Utility)

நுகர்வோர் இரு பொருள்களை வாங்குவதாக் கொள்வோம். அவருடைய பயன்பாட்டுச் சார்பலன், $U = f(q_1, q_2)$ என

வரையறுப்போம். இங்கு q_1, q_2 என்பன முறையே நுகரும் அளவுகளாகும்.

ஒரு நுகர்வோர் அதிக அளவு நிறைவைத் தரும் Q_1, Q_2 பண்டங்களின் சேர்மானத்தை வாங்க விரும்புகிறார். தான் ஒரு மீப்பெரு நிலையை (உச்சப்பாடு) அடைய வேண்டுமென்பதே அவரின் குறிக்கோள். தன் வருமானம் வரம்புக்குட்பட்டது, ஆகவே விரும்பும் பொருட்களை எல்லையற்ற அளவுகளில் அவரால் வாங்க இயலாது. நுகர்வோரது வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடுகளை (budget constraints) கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

$$M = p_1q_1 + p_2q_2$$

இங்கு $M =$ நுகர்வோரின் (நிலையான, மாறாத) வருமானம்

$p_1, p_2 = Q_1, Q_2$ பொருட்களின் விலைகள் (முறையே)

$q_1, q_2 = Q_1, Q_2$ பொருட்களின் அளவுகள்.

தன் வருமானத்தை இந்த இரு பொருட்களுக்காக மட்டுமே செலவிடுகிறார் என்ற அனுமானத்தில், $M = p_1q_1 + p_2q_2$ ஆகிறது.

இங்கு $U = f(q_1, q_2)$ என்பது பயன்பாட்டுச் சார்பலன் இப்போது நுகர்வோர் வரவு செலவுத்திட்டக் கட்டுப்பாடுகளுக்கேற்ப [(5)-க்கு ஏற்றவாறு]. பயன்பாட்டுச் சார்பலனை [$U = f(q_1, q_2)$-சார்பலனை)]. மீப்பெரு நிலையை அடைவதற்காக $M = p_1q_1 + p_2q_2$-க்குப் பொருந்தும் பண்டங்களின் சேர்மானத்தை கண்டுபிடிக்க வேண்டும். அச்சேர்மானம் $U = f(q_1, q_2)$ ஐயும் உச்சப்படுத்துவதாக இருத்தல் வேண்டும்.

இப்போது வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாட்டை எடுத்துக் கொண்டால், $M = p_1q_1 + p_2q_2$

$$\therefore \quad p_2q_2 = M - p_1q_1$$

$$q_2 = \frac{M - p_1q_1}{p_2} \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே $U = f(q_1, q_2)$

$$= f\left(q_1, \frac{M - p_1q_1}{p_2}\right)$$

ஆகவே, q_1-ஐப் பொறுத்து மட்டும் (6)-ஐ உச்சநிலைப் படுத்துவோம். இதற்கான நிபந்தனைகள்,

(i) $\dfrac{dU}{dq_1} = 0$

(ii) $\dfrac{d_2U}{dq_1^{\ 2}} < 0$ என்பதாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

$U = q_1q_2$ என்பது ஒரு பயன்பாட்டுச் சார்பலன் எனவும் $p_1 = 2$ ரூபாய்கள், $p_2 = 5$ ரூபாய்கள், நுகர்வோர் வருமானம் $(M) = 100$ ரூபாய்கள், வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடு : $100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$ என்பதாகும்.

$$5q_2 = 100 - 2q_1$$

$$q_2 = 20 - \frac{2q_1}{5}$$

$$U = q_1q_2 = q_1\left(20 - \frac{2q_1}{5}\right)$$

$$= 20q1 - \frac{2q_1^{\ 2}}{5}$$

$$\frac{dU}{dq_1} = 20 - \frac{4q_1}{5}$$

இப்போது $\dfrac{dU}{dq_1} = 0$ என்றால் $20 - \dfrac{4q_1}{5} = 0$

$$\frac{4q_1}{5} = 20. \quad 4q_1 = 100. \quad q_1 = 25.$$

எனவே வரவு செலவுக் கட்டுப்பாட்டில் $q_1 = 25$

எனச் சமனிட்டால் $q_2 = 20 - \frac{2q_1}{5}$

$$= 20 - \frac{50}{5} = 10.$$

மேலும் $\frac{d^2U}{dq_1^{\,2}} = -\frac{4}{5} < 0$

எனவே பயன்பாடு ஒரு உச்ச மதிப்பை $q_1 = 25$ எனும் போது பெறுகிறது.

$$U = q_1 q_2 = \left[20q_1 - \frac{2q_1^{\,2}}{5} \right]_{q_1 = 25}$$

$$= 20 \times 25 - \frac{2 \times 625}{5}$$

$$= 500 - 250$$
$$= 250$$

எனவே Q_1 பொருளின் அளவு $q_1 = 25$, Q_2 பொருளின் அளவு $q_2 = 10$ என்று வாங்கும்போது மிக அதிகமான பயன்பாட்டை (நிறைவை)ப் பெறுகின்றான்.

அந்த உச்ச அளவு (நிறைவு) பயன்பாடு $= 25 \times 10 = 250$ ஆகிறது.

(ii) $U = q_1 q_2$

$$100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$$

$$\therefore\ 2q_1 = 100 - 5q_2$$

$$q_1 = 50 - \frac{5q_2}{2}$$

எனவே $U = 50q_2 - \frac{5q_2^{\ 2}}{2}$

ஆகவே $\frac{dU}{dq_2} = 50 - \frac{10q_2}{2}$

$= 50 \quad 5q_2$

இப்போது $\frac{dU}{dq_2} = 0$ என்றால் $5q_2 = 50; q_2 = 10$

ஆகவே $q_1 - 50 - \frac{5q_2}{2} = 50 - \frac{50}{2} = 25$

இங்கும் அதே மதிப்புகள் தான் கிடைக்கின்றன.

நுகர்வோர் சமநிலைக் கோட்பாடு

(iii) மேலும் $f_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}(q_1 q_2) = q_2 = 10.$

$$f_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2}(q_1 q_2) = q_1 = 25.$$

ஆதலால் $\frac{f_1}{f_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

இங்கு $\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{5}$ ஆகிறது.

எனவே $\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$ என்று புலனாகிறது.

(iv) $q_2 = 20 - \frac{2q_1}{5}$

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{2}{5} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{q_1}{q_2}$$

$$\therefore -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{2}{5} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$$ என்றும் அறிகிறோம்.

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^{\ 2}} = \frac{d}{dq_1}\left[-\frac{2}{5}\right] = \frac{d}{dq_1}\left[-\frac{q_1}{b_1}\right]$$

$$= \frac{q_2}{q_1^{\ 2}} > 0.$$ (ஏனெனில் q_1, q_2 நேர்மதிப்புடையவை)

எனவே, சமநோக்கு வளைகோடுகள் கீழிருந்து (அடியிருந்து) குவிந்த வளைகோடுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$u = 10q_1q_2$ என்ற பயன்பாட்டுச் சார்புக்கு வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடு $100 = 50q_1 10q_2$ என்றால் பயன்பாட்டை உச்சமாக்கும் q_1, q_2- க்களின் மதிப்பை நிர்ணயிக்கவும்.

$$u = 10q_1q_2 \qquad \rightarrow (1)$$
$$100 = 50q_1 10q_2 \qquad \rightarrow (2)$$

சமன்பாடு 2 ஐ மாற்றியமைத்தால்

$$-10q_2 = -100 + 50q_1$$
$$10q_2 = 100 - 50q_1$$
$$q_2 = 10 - 5q_1 \qquad \rightarrow (3)$$

$$u = q_1(10 - 5q_1), u = 10q_1 - 5q_1^{\ 2}$$

1. $\frac{du}{dq_1} = 0$ 2. $\frac{d^2u}{dq_i^2} < 0$

$$\frac{du}{dq} = 10 - 10q_1 = 0$$

$$-10q_1 = -10$$

$$q_1 = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{d^2u}{dq_1^2} = -10 \quad (< 0)$$

$q_1 = 1$ சமநிலைக் கணியம் எனில் இப்பொழுது விற்கு சமநிலைக் கணியத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு கண்டுபிடிக்க வேண்டும். சமன்பாடு 3 ஐ எடுத்துக்கொண்டு அதில் $q_1 = 1$ எனப்பிரதியிட்டால்

$$q_2 = 10 - 5q_1, \ q_2 = 10 - 5(1) = q_2 = 5$$

ஒரு நுகர்வோனால் கொடுக்கப்பட்ட வரவு-செலவு திட்டத்தில் நுகர்வின் அளவானது $q_1 = 1$, $q_2 = 5$ ஆக இருக்கும்போது அந்த நுகர்வோன் மீப்பெரு நிலையை அடைகிறான் என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$U = -2x^2 + 5xy - y^2$ என்ற பயன்பாட்டுச் சார்பலன் என்றும், $x + 3y = 8$ என்ற வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடு என்றும் கொண்டால்,பயன்பாடு உச்சநிலை ஆவதற்கான x, y மதிப்புகளை நிர்ணயிக்கவும்.

$$U = -2x^2 + 5xy - y^2$$

$x + 3y = 8$ என்றால், $x = 8 - 3y$.

$$U = -2(8 - 3y)^2 + 5(8 - 3)y - y^2$$

$$= -2[64 + 9y^2 - 48y] + 5(8y - 3y^2) - y^2$$

$$= -128 - 18y^2 + 96y + 40y - 15y^2 - y^2$$

$$\frac{dU}{dy} = 136 - 68y$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = 68 < 0$$

$\frac{dU}{dy} = 0$ என்றால் $68y = 136$

$y = 2.$

எனவே, $x = 8 - 3y = 8 - 6 = 2.$

$x = 2, y = 2$ என்ற மதிப்பில் பயன்பாட்டுச் சார்பலன் ஓர் உச்ச மதிப்பை அடைகிறது. அந்த உச்ச அளவு

$$= [-2x^2 + 5xy - y^2]x = 2, y = 2$$

$$= [-2(4) + 5(2)(2) - (4)]$$

$$= -8 + 20 - 4 = 8.$$

பயன்பாட்டுச் சார்பலன் $U = 108 - [(x-6)^2 + 2(y-6)^2]$ வரவு செலவுத் திட்டக்கட்டுப்பாடு $3x + 4y = 25$ என்றால், பயன்பாட்டை உச்ச அளவாக்கும் x, y களின் மதிப்பை நிர்ணயிக்கவும்.

$$U = 108 - [(x-6)^2 + 2(y-6)^2]$$

$$3x + 4y = 25$$

$$3 + 4\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

நுகர்வோர் சம நிலைக் கோட்பாடு

$$\frac{dU}{dx} = -2(x-6) - 2(2)(y-6).\frac{dy}{dx}$$

$$= -2(x-6) - 2(2)(y-6).$$

$$= -2x + 12 + 3y - 18$$

$$= -2x + 3y - 6.$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -2 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$= -2 + 3\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= -2 - \frac{9}{4} = -\frac{17}{4} < 0$$

x, y -களின் மதிப்பைக் கணிக்க

$-2x + 36 - 6 = 0$

$3x + 4y = 25$ என்ற இரு சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$-2x + 3y = 6$ (1)

$3x + 4y = 25$ (2)

(1) $\times$ 3 $-6x + 9y = 18$ (3)

(2) x 2; $6x + 8y = 50$ (4)

(3) + (4) $17y = 68$

$y = 4$

$3x = 25 - 45 = 25 - 16 = 9\left[-\frac{3}{4}\right]$

$x = 9$

எனவே உச்சகட்ட பயன்பாட்டிற்கான $x = 3, y = 4$ ஆகும்.

பயன்பாட்டின் உச்ச அளவு $= 108 - [(x-6)^2 + 2(y-6)]^2$

$$= 108 - [9 + 2(4)]$$

$$= 108 - 17 = 91$$

உற்பத்தியாளர் சமநிலை (Producers Equilibrium)

செலவுகட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்ட மீப்பெரு உற்பத்தி (பிரதியிடும் முறை)

எடுத்துக்காட்டு:

உற்பத்தி சார்பு $Q=2.5L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$ என்றும் L, K இன் அலகுகள் முறையே $Rs.10$, $Rs.5$ என்றும், மொத்தச் செலவு $Rs.60000$ எனில், செலவு நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு மீப்பெரு உற்பத்தியின் அளவைக் கணக்கிடுக.

உற்பத்திச்சார்பு $Q=f(L.K)=2.5L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$

செலவுக் கட்டுப்பாடு $C=10L+5K\le 60000$

தீர்வு:

$$C=10L+5K=60000$$
$$5K=C-10L$$
$$K=\frac{C-10L}{K}=\frac{6000}{5}-\frac{10L}{5}$$
$$K=12000-2L$$

K ஐ L குறித்து வகையிட

$$\frac{dK}{dL}=-2$$
$$\frac{dQ}{dL}=\frac{\partial Q}{\partial L}+\frac{\partial Q}{\partial K}.\frac{\partial K}{\partial L}$$
$$=\frac{5}{3}L^{\frac{-1}{3}}K^{\frac{1}{3}}+\frac{5}{6}L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}.(-2)$$

$\frac{dK}{dL}=0$ எனக்கொள்க

$$\frac{dQ}{dL}=0\rightarrow\ =1.67\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}=1.67\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

இரண்டு பக்கமும் $\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{3}}$ ஆல் பெருக்க.

$$1.67\left(\frac{K}{L}\right)=1.67$$

$$C=10L+5K$$
$$=10L+5L$$
$$=60000$$
$$15L=60000$$
$$L=\frac{60000}{15}=4000$$
$$K=L=4000$$

K,L ஐ உற்பத்திச் சார்பில் பிரதியிட

$$Q=2.5L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}=2.5(4000)^{\frac{2}{3}}(4000)^{\frac{1}{3}}$$
$$=2.5(4000)^{0.67}(4000)^{0.33}$$
$$=10000$$

இதைச் சரிபார்க்க $\frac{d^2Q}{dL^2}$ ஐக் கணக்கிடுக.

$$\frac{d^2Q}{dL}=\frac{d}{dL}\left(\frac{dQ}{dL}\right)=\frac{d\left(1.67L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}-1.67L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}\right)}{dL}$$
$$=\frac{d}{dL}\left(\frac{dQ}{dL}\right)+\frac{d}{dK}\left(\frac{dQ}{dK}\right).\frac{dK}{dL}$$
$$=-0.56L^{-\frac{4}{3}}K^{\frac{1}{3}}-1.11L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{5}{3}}-1.11L^{-\frac{1}{3}}K^{-\frac{2}{3}}-1.11L^{-\frac{1}{3}}K^{-\frac{2}{3}}$$
$$=-0.56L^{-43}K^{\frac{1}{3}}-1.11L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{5}{3}}-2.22L^{-\frac{1}{3}}K^{-\frac{2}{3}}<0$$

எனவே, உற்பத்தியானது மீப்பெரு மதிப்பான 10000 அலகுகளை $L = 4000$, $K = 4000$ ஆக இருக்கும் போது அடையும்.

உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்ட மீச்சிறு செலவு (Cost Minimisation with an Output Constraint)

எடுத்துக்காட்டு:

C என்பது செலவுச் சார்பு எனில், $C = 10x + 20y$; இதற்கு $(x+1)(y+2) = 200$ என்பதற்கிணங்க மீச்சிறு மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

தீர்வு:

$$C = 10x + 20y = 10x + 20\left(\frac{200}{x+1} - 2\right), y = \left(\frac{200}{x+1} - 2\right)$$

$$\therefore \frac{dC}{dx} = 10 - \frac{4000}{(x+1)^2}; \frac{d^2C}{dx^2} = \frac{8000}{(x+1)^2}$$

$\frac{dC}{dx} = 0$ எனில் $(x+1)^2 = 400 \quad \therefore x = 19.$

அப்போது $\frac{d^2C}{dx^2} = 1 > 0$ எனவே $x = 19$ எனில் C ஆனது 'ச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது; மீச்சிறு மதிப்பு

$$\begin{aligned} &= 10 \times 19 + 20\left(\frac{200}{20} - 2\right) \\ &= 190 + 20 \times 8 \\ &= 350. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு:

kPrpW nryT $C = 10L + 5K$ என்றும் L, K-இன் அலகுகள் முறையே $Rs.10$, $Rs.5$ என்றும், உற்பத்தி சார்பு நிபந்தனை $f(L,K) = 2.5L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} \geq 10000$ என்றால், மீச்சிறு செலவினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

மீச்சிறுமமாக்கு $C = 10L + 5K$

கட்டுப்பாடு $f(L,K) = 2.5L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} \geq 10000$

$$2.5L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} = 10000 \to L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} = 4000$$

$$K^{\frac{1}{3}} = \frac{4000}{\frac{2}{3}}$$

$$K = \left(\frac{4000}{L^{\frac{2}{3}}}\right)^3 = \frac{64,000,000,000}{L^2}$$

$$C = 10L + 5\left(\frac{64,000,000}{L^2}\right)$$

$$\frac{dC}{dL} = 10 - \frac{640,000,000,000}{L^3} = 0$$

$$10L^3 = 640,000,000,000$$

$$L = (64000000000)^{\frac{1}{3}} = 4000$$

$$K = \frac{64,000,000,000}{(4000)^2} = 4000$$

இறுதியில் மீச்சிறு செலவானது

$$
\begin{aligned}
C &= 10(4000)+5(4000) \\
&= 40000+20000 \\
&= 60,000
\end{aligned}
$$

இதைச் சரிபார்க்க

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2C}{dL^2} &= \frac{d}{dL}\left(\frac{10-640,000,000,000}{L^3}\right) \\
&= -3(-640,000,000,000)L^{-4} > 0
\end{aligned}
$$

லெக்ராஞ்சியின் பெருக்குமென் முறை (Lagrange Multiplier Method)

(துணை நிபந்தனைகளுடன் கூடிய சார்புகளின் பெருமம், சிறுமம் காணுதல்)

$u = f(x, y)$ என்பது ஒரு சார்பாக இருக்கட்டும். மேலும், இங்கு x, y என்பன இரண்டு சார்பிலா மாறிகளாக இராது, ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையனவாக இருக்கட்டும். அதாவது, இம்மாறிகளுக்கிடையே, $\phi(x, y) = 0$ எனும் ஒரு தொடர்பு இருப்பதாகக் கொள்வோம். இத்தொடர்பைத்தான் துணை நிபந்தனை என்கிறோம். கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $u = f(x, y)$ என்றும் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனை $P_x + P_y = M$ என்ற வரவு செலவு கட்டுப்பாட்டுடன் (Budget Constraint) இருந்தால் நுகர்வோரானவர் x, y பொருட்களை எவ்வளவு நுகர்ந்தால் அவரது பயன்பாடு மீப்பெரு மதிப்பை அடைவார் என்பதை கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டு மூலம் காணலாம்.

$f(x, y)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பாகவும்,

$\phi(x, y)$ என்பது துணை நிபந்தனையாகவும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். மேலும்.

$u = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$ என்று அமைப்போம்.

மார்சலின் நுகர்வோர் தேவைக்கோட்டின் வரையறுத்தல்.

$$u = XY$$

$$M = P_x X + P_y Y$$

லாக்ராஞ்சியின் சார்பானது

$$L = XY + \lambda\left(M - P_x X - P_y Y\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = Y - P_X \lambda = 0 \qquad ...(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = X - P_Y \lambda = 0 \qquad ...(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - P_X X - P_Y Y = 0 \qquad ...(3)$$

(1) இன்படி $Y = P_X \lambda$

(2) இன்படி $X = P_Y \lambda$

முதலிரண்டு(1) (2) பகுதிவகைக்கெழு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க

$$Y = P_X \lambda \quad (\text{or}) \quad \lambda = \frac{Y}{P_x} = \frac{MP_X}{P_x}$$

$$X = P_Y \lambda \quad (\text{or}) \quad \lambda = \frac{X}{P_Y} = \frac{MP_Y}{P_Y}$$

(அல்லது)

இரண்டும் ஓரே மதிப்பினையுடையதால் இரண்டு சமன்பாட்டுகளையும் மாற்றியமைக்கும் போது

$$\frac{(4)}{(5)} = \frac{Y}{X} = \frac{P_X \lambda}{P_Y \lambda}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

$$\frac{Y}{P_X} = \frac{X}{P_Y}$$

$$Y = \left(\frac{P_x}{P_Y}\right)X \quad \rightarrow (6)$$

(4)

இச்சார்பினை (3)ம் சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$M = P_X X + P_X X = 2P_X X \qquad (5)$$

$$X = \frac{M}{2P_X X}$$

$$M - P_X X - \left[P_Y\left[\frac{P_X}{P_Y}\right]X\right] = 0$$

$$M - P_X X - P_X X = 0$$

கொடுக்கப்பட்ட வருமானம் M எனில் தேவைக்கோடானது

$$P_X = \frac{M}{2X}$$

$$2X = \frac{M}{P_X}$$

$$X = \frac{M}{2P_X} \quad \rightarrow (7)$$

Y – இன் மதிப்புக்கிடைக்க X – இன் மதிப்பை (6) இல் பிரதியிட

$$Y = \left(\frac{P_X}{P_Y}\right)X$$

$$Y = \frac{P_X}{P_Y}\left(\frac{M}{2P_X}\right)$$

$$= \frac{M}{2P_Y} \quad \rightarrow (8)$$

இவையிரண்டுமே தேவைச் சார்புகளகும்.

$$P_X = \left(\frac{M}{2}\right)X^{-1}$$

$$P_X = \frac{M}{2}X^{-1}$$

இச்சார்பானது மேலிருந்து கீழாகச் சரிவதைக் காட்டுகின்றது.

$$(or)$$

$$P_Y = \frac{M}{2}Y^{-1}$$

செலவுகட்டுப்பாட்டுக்கு உட்பட்ட மீப்பெரு உற்பத்தி (Maximisation of Output Subject to Cost Constraint)

கொடுக்கப்பட்ட காப் - டக்ளஸ் உற்பத்திச் சார்பானது $Q = L^{0.3}K^{0.7}$ என்றும் L, K யின் விலைகள் முறையே $w = 3, r = 15$ என்றும் மொத்தச்செலவானது $Rs.150$ என்றும் இருந்தால் உற்பத்தியை மீப்பெரு மதிப்பாக்கும் L, K இன் மதிப்புகளை கணிக்கவும்.

1. செலவுக்கட்டுபாடு நிபந்தனைக்குட்பட்டு உற்பத்தியின் மீப்பெரும் அளவினைக் கணக்கிடு.
2. செலவுக்கட்டுபாடு இல்லையெனில் உற்பத்தியின் மீப்பெரும் அளவினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

முதலில் செலவுக்கட்டுப்பாட்டு சமன்பாட்டினை அமைக்கவேண்டும்

$$wL + rK = C$$

$$3L + 15K = 150$$

லாக்ராஞ்சியின் பெருக்கு எண் முறைப்படி கொடுக்கப்பட்ட சார்பானது

$$L = L^{0.3}K^{0.7} + \lambda(150 - 3L - 15K)$$

படி 1: மீப்பெரு மதிப்புக்காண முதல் வரிசை பகுதிவகைக்கெழுக்களைக் காணவும்.

$$L_L = 0.3L^{-0.7}K^{0.7} - 3\lambda$$
$$L_K = 0.7L^{0.3}K^{-0.3} - 15\lambda$$
$$L_\lambda = 150 - 3L - 15K$$

படி 2: முதல்வரிசை பகுதிக் கெழுவினை பூச்சியத்திற்;ஊ (zero) சமன் செய்து சமன்பாடுகளைத் தீர்வு செய்ய வேண்டும்.

$$(1)\quad 0 = 0.3L^{-0.7}K^{0.7} - 3\lambda$$
$$(2)\quad 0 = 0.7L^{0.3}K^{-0.3} - 15\lambda$$
$$(3)\quad 0 = 150 - 3L - 15K$$

λ வை சமன்பாடு (1), (2)-இலிருந்து பின்வருமாறு நீக்கவும்.

$$(1)\times 5 \rightarrow 0 = 1.5L^{-0.7}K^{0.7} - 15\lambda$$
$$(2)\times 1 \rightarrow 0 = 0.7L^{0.3}K^{-0.3} - 15\lambda$$
$$0 = 1.5L^{-0.7}K^{0.7} - 0.7L^{0.3}K^{-0.3} \quad \ldots(4)$$

சமன்பாடு (4)-ஐ மாற்றி அமைக்கவும்.

$$1.5L^{-0.7}K^{0.7} = 0.7L^{0.3}K^{-0.3}$$

இருபுறமும் $0.7L^{0.3}K^{-0.3}$ வால் வகுக்க

$$\frac{1.5L^{-0.7}K^{0.7}}{0.7L^{0.3}K^{-0.3}} = 1$$

$$\frac{1.5K^{0.7}K^{0.3}}{0.7L^{0.3}L^{0.7}} = 1$$

மேலுள்ளதை எளிமையாக குறிப்பிடலாம்.

$$\frac{1.5K}{0.7L} = 1$$

$1.5K = 0.7L$ 10ஆல் பெருக்கி சமன்பாட்டை எளிமையாக்கவும்.

அதாவது $15K = 7L$ இப்பொழுது L, K கிடைக்க சமன்பாட்டைத் தீர்வு செய்ய வேண்டும்.

$(6) \rightarrow (5)$ ஐ மாற்றி அமைக்க $7L - 15K = 0$

$(7) \rightarrow (4)$ ஐ மாற்றி அமைக்க $3L + 15K = 150$

(6) யும் (7) யும் கூட்டவும்.

$$10L = 150 \qquad \rightarrow L = 15$$

$L = 15$ என்று 6ல் பிரதியிட $K -$ யானது கிடைக்கும். $7(15) - 15K = 0$ அல்லது $K = 7$ எனவே $L = 15,\ K = 7$ என்பது உற்பத்தியை மீப்பெருமமாக்கும் அளவுகள்.

இதைச் செலவுக் கட்டுப்பாட்டில் பிரதியிட்டால் 150 என்ற மொத்தச் செலவுக்கு ஈடாகும்.

$$3L + 15K = 150 \rightarrow 3(15) + 15(7) = 150 \rightarrow 45 + 105 = 150$$

மீப்பெரும் உற்பத்தியானது K, L ஐ உற்பத்திச் சார்பில் பிரதியிட்டால் கிடைப்பது.

$$Q = L^{0.3}K^{0.7} = 15^{0.3}7^{0.7} = (2.2533)(3.9045) = 8.798$$

செலவுக்கட்டுபாடு இல்லையெனில் L, K வை அதிகரிக்க அதிகரிக்க உற்பத்தியும்அதிகரிக்கும் (Constant Returns to scale).

உற்பத்திக்கட்டுபாட்டுக்குட்பட்ட மீச்சிறு செலவு (Minimisation of Cost Subject to a Production Constraint)

எடுத்துக்காட்டு:

$Q = 12L^{0.5}K^{0.5}$ என்ற உற்பத்தி சார்பில் L, K யின் விலைகள் முறையே $w = 25,\ r = 50$ மொத்த உற்பத்தியின் அலகு 240ஆக இருக்கும்போது செலவை மீச்சிறுமமாக்கும் $L, K -$ யின் மதிப்புகளைக்கண்டுபிடி.

தீர்வு:

செலவுச் சார்பின் சமன்பாடானது

$$wL + rK = C$$
$$25L + 50K = C$$

உற்பத்திக் காட்டுபாட்டு நிபந்தனைக்குட்பட்டு இச்சார்புக்கு மீச்சிறு மதிப்பு காணல் வேண்டும். லாக்ராஞ்சியின் முறைப்படி

$$L = 25L + 50K + \lambda\left(240 - 12L^{0.5}K^{0.5}\right)$$

உத்தம புள்ளியை காண பின்வரும் படிகளை பின்பற்ற வேண்டும்.

படி 1: முதல் வரிசை பகுதி வகையீட்டு கெழுக்களை கண்டுபிடித்து சுழியத்திற்கு சமன் செய்ய

$$\begin{aligned} L_L &= 25 - \lambda 12\left(0.5L^{0.5-1}K^{0.5}\right) \\ &= 25 - \lambda 6L^{-0.5}K^{0.5} \\ L_K &= 50 - \lambda 12\left(0.5L^{0.5}K^{0.5-1}\right) \\ &= 50 - \lambda 6L^{0.5}K^{-0.5} \\ L_\lambda &= 240 - 12L^{0.5}K^{0.5} \end{aligned}$$

$$(1) \quad 0 = 25 - \lambda 6L^{-0.5}K^{0.5} \rightarrow 25 = \lambda 6L^{-0.5}K^{0.5}$$
$$(2) \quad 0 = 50 - \lambda 6L^{0.5}K^{-0.5} \rightarrow 50 = \lambda 6L^{0.5}K^{-0.5}$$
$$(3) \quad 0 = 240 - 12L^{0.5}K^{0.5} \rightarrow 240 = 12L^{0.5}K^{0.5}$$

λ — வை சமன்பாடு 1,2லிருந்து நீக்கவும். சமன்பாடு 1-ஐ 2-ஆல் வகுக்க:

$$\frac{(1)}{(2)} \rightarrow \frac{25}{50} = \frac{\lambda 6L^{-0.5}K^{0.5}}{\lambda 6L^{0.5}K^{-0.5}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{L^{-0.5}K^{0.5}}{L^{0.5}K^{-0.5}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{K}{L}$$

$$\frac{L}{2}=K$$

$K=L/2$ என சமன்பாடு 3ல் பிரதியிடவும்.

$$240=12L^{0.5}\left(\frac{L}{2}\right)^{0.5}$$

$$240=\frac{12}{\sqrt{2}}L$$

$$L=\frac{\sqrt{2}(240)}{12}$$

$$L=28.28$$

எனவே

$$K=14.14.$$

$$L=25L+50K$$

$$=25(28.28)+50(14.14)$$

$$=1414$$

சமன்பாடு (4)ல் பிரதியிட K – யானது கிடைக்கும்.

$$\frac{L}{2}=K$$

$$=\frac{28.28}{2}$$

$$=14.14$$

$L=28.28$ எனில் K – யானது 14.14 ஆகும்.

மீச்சிறு செலவானது

$$\begin{aligned} C &= 25L + 50K \\ &= 25(28.28) + 50(14.14) \\ &= 1414 \end{aligned}$$

அதாவது, செலவுச் சார்பானது $L = 28.28,\ K = 14.14$ வாக இருக்கும்போது மீச்சிறு செலவை அடையும்.

மேலே கண்ட நிபந்தனைகளைப் பிறிதொரு முறையிலும் பெறலாம் என்பதைப் பின்வரும் விளக்கத்திலிருந்து அறியக் கூடும்.

மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்பு பெற முதல் வரிசை நிபந்தனை

மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்பு பெற முதல் வரிசை நிபந்தனையின் படி $f_x = 0,\ f_y = 0,\ f_\lambda = 0$ என இருக்க வேண்டும்.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial \lambda}$ ஆகிய ஒவ்வொரு பகுதி வகைக்கெழுவையும் கண்டுபிடித்து பூஜ்யத்திற்குச் சமப்படுத்த, கீழ்க்காணும் தொடர்புகள் கிடைக்கப்பெறும்.

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ என்றிட, $f_x + \lambda\phi_x = 0$ என்றும்,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ என்றிட, $f_y + \lambda\phi y = 0$ என்றும், மற்றும்,

$\dfrac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$ என்றிட, $\phi(x, y) = 0$ என்றும் கிடைக்கும்.

$$f_x + \lambda\phi x = 0 \qquad \ldots(3)$$

$$f_y + \lambda\phi_\gamma = 0 \qquad \ldots(4)$$

மேலும், $$\phi(x, y) = 0 \qquad \ldots(5)$$

இங்கு (3), (4), (5) ஆகிய மூன்று ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண x, y, λ ஆகியவற்றிற்குக் குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் கிடைக்கப்பெறும். x, y என்ற மாறிகளின் இம்மதிப்புகள் u-இன்

பெருமம், சிறுமம் இவற்றைத் தீர்மானிக்கும். இவ்வாறு $\phi(x,y)=0$ எனும் தொடர்பைப் பயன்படுத்தி u — க்கு மீப்பெரு மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்கிறோம். (இங்கு λ-ன் மதிப்பை முன் கூட்டியே தீர்மானிக்காவிடினும், பின்னர் சமன்பாடுகள் (3), (4), (5) லிருந்து பெறுகிறோம் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

இரண்டாவது வரிசை நிபந்தனைக்கு கெசியன் அணிக்கோவையைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்க வேண்டும்.

$$|H_1|=\begin{vmatrix} 0 & P_x \\ P_x & f_{xx} \end{vmatrix}$$

$$|H_2|=\begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & f_{xx} & f_{xy} \\ P_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$|H|=\begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & f_{xx} & f_{xy} \\ P_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனை: மீப்பெரு மதிப்பு பெற

$$|H_1|<0, \quad |H|>0$$

என அமையும்.

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனை:மீச்சிறு மதிப்பு பெற

$$|H_1|<0, \quad |H|<0$$

அதாவது,

$$|H_1|=\begin{vmatrix} 0 & P_x \\ P_x & f_{xx} \end{vmatrix}$$

$$|H_2|=\begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & f_{xx} & f_{xy} \\ P_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & f_{xx} & f_{xy} \\ P_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு:

$x + 2y = 4$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு, $f(x, y) = 2x^2 - 6y^2$ எனும் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு:

$z = 2x^2 - 6y^2$ என்றும், $\phi(x, y) = x + 2y - 4$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும்,

$z = \left(2x^2 - 6y^2\right) + \lambda(x + 2y - 4)$ என்க.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \rightarrow \quad 4x + \lambda = 0 \qquad ....(1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow \quad -12y + 2\lambda = 0 \qquad ....(2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow \quad x + 2y - 4 = 0 \qquad ....(3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2), (3) லிருந்து $\lambda = 48,\ x = -12,\ y = 8$ என்று கிடைக்கும். எனவே, தேவையான புள்ளி $(-12, 8)$ என்பதாகும்.

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனைகாண இரண்டாம் பகுதி வகைக் கெழுக்களைக் காண வேண்டும்.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \lambda} = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \lambda} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda^2} = 0$$

$$f_{xx} = 4 \quad f_{yy} = -12 \quad f_{xy} = 0$$

$$|H_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$|H_1| < 0,\ |H| < 0 (i.e., |H_2 < 0|)$ எனவே $z-$ ஆனது மீச்சிறு மதிப்பை x, y என்ற புள்ளியில் ஏற்கும்.

இவ்வாறு, $z-$ன் மதிப்பு $= 2(-12)^2 - 6(8)^2$

$$= -96$$

இதுதான் மீச்சிறு மதிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$u = 4xy - y^2$ என்ற பயன்பாட்டுச் சார்புக்கு வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடு $3x + 4y = 100$ என்றால் பயன்பாட்டை உச்சமாக்கும் x, y - க்களின் மதிப்பை நிர்ணயிக்கவும்.

தீர்வு:

$$z = 4xy - y^2 + \lambda(2x + y - 6)$$

$$f_x = 4y + 2\lambda \quad = 0 \quad \ldots(1)$$
$$f_y = 4x - 2y + \lambda = 0 \quad \ldots(2)$$
$$f_\lambda = 2x + y - 6 \quad = 0 \quad \ldots(3)$$

சமன்பாடு 1-இன் படி

$$2\lambda = -4y$$
$$\lambda = -2y$$

இதனை (2)-இல் பிரதியிட

$$4x-2y-2y=0$$
$$4x=4y$$
$$x=y$$

இதனை சமன்பாடு (3)-இல் பிரதியிட

$$2y+y-6=0$$
$$3y=6$$
$$y=2$$

எனவே $x=2, \lambda=-4$

$z-$ ஆனது மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்கும்.

$$f_{xx}=0 \;\; f_{yy}=-2 \;\; f_{xy}=4$$

$$|H|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|H_1|=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4<0$$

$$H_2=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=24>0$$

$|H_1|<0$, $|H|(i.e., H_2)>0$ என ஆனது மீப்பெரு மதிப்பை அடையும். $z-$ இன் மீப்பெரும் மதிப்பு

$$z=4(2)(2)-(2)^2-4(4+2-6)$$
$$=16-4$$
$$=12$$

$=12$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு:

$u = 10x + 20y - x^2 - y^2$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பை $2x + 5y = 10$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு காண்க.

தீர்வு:

$$z = 10x + 20y - x^2 - y^2 + \lambda(2x + 5y - 10)$$

$$f_x = 10 - 2x + 2\lambda = 0 \qquad ...(1)$$

$$f_y = 20 - 2y + 5\lambda = 0 \qquad ...(2)$$

$$f_\lambda = 2x + 5y - 10 = 0 \qquad ...(3)$$

சமன்பாடு 1-இன் படி $x = 5 + \lambda$

சமன்பாடு 2-இன் படி $y = 10 + \frac{5}{2}\lambda$ இதனை (3)-ல் பிரதியிட

$$2(5 + \lambda) + 5\left(10 + \frac{5}{2}\lambda\right) - 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{-100}{29}, \ X = \frac{45}{29}, \ Y = 10 + \frac{5}{2}, \ \lambda = \frac{40}{29}$$

$$X = \frac{45}{29}, \ Y = \frac{40}{29}, \ \lambda = \frac{-100}{29}$$

என இருக்கும்போது $z -$ ஆனது மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்கும்.

$$f_{xx} = -2 \quad f_{yy} = -2 \quad f_{xy} = 0$$

$$|H_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 58 > 0$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 58 > 0$$

$|H_1| < 0, \ |H| > 0$ எனவே z –ஆனது மீப்பெரு மதிப்பை ஏற்கும்.

z – ன் மீப்பெரு மதிப்பானது:

$$z = 10\left(\frac{45}{29}\right) + 20\left(\frac{40}{29}\right)$$
$$-\left(\frac{45}{29}\right)^2 - \left(\frac{40}{29}\right)^2$$
$$-\left(\frac{100}{29}\right)\left[\left(\frac{2 \times 45}{29}\right) + \left(\frac{5 \times 40}{29}\right) - 10\right]$$

$$= \frac{32625}{841}$$
$$= 38.7931 \text{ அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு:

$u = 4xy$ என்ற சார்பின் உத்தம (மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு) மதிப்பை $2x + 3y = 62$ நிபந்தனைக்குட்பட்டு காண்க.

இங்கு, u எனும் சார்பை பின் வருமாறு அமைப்போம்.

$$u = 4xy + \lambda(2x + 3y - 62)$$

தீர்வு:

முதல் வரிசை நிபந்தனையின் படி

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4y + 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4x + 3\lambda = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 62 = 0$$

இச்சமன்பாடுகளை கிராமர் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்வு செய்ய

$$(0)x+4y+2\lambda=0 \qquad ....(1)$$
$$4x+(0)y+3\lambda=0 \qquad ....(2)$$
$$2x+3y+(0)\lambda=62 \qquad ....(3)$$

$$x=15.5 \quad y=10.33 \quad \lambda=-20.87$$

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனைகாண இரண்டாம் பகுதி வகைக் கெழுக்களைக் காண வேண்டும்.

$$f_{xx}=0 \quad f_{xy}=4 \quad f_{x\lambda}=2$$
$$f_{yx}=4 \quad f_{yy}=0 \quad f_{y\lambda}=3$$
$$f_{\lambda x}=2 \quad f_{\lambda y}=3 \quad f_{\lambda\lambda}=0$$

கெசியன் அணிக் கோவையானது

$$|H_2|=\begin{vmatrix}0 & 4 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=48$$

$|H|$ $i.e.,|H_2|$ என்பது >0வாக இருப்பதால் இச்சார்பானது மீப்பெரு மதிப்பை x, y என்ற புள்ளியில் ஏற்கும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$u=-2x^2+5xy-y^2$ என்ற பயன்பாட்டுச் சார்புக்கு வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடு $u=-2x^2+5xy-y^2$ என்றால் பயன்பாட்டை உச்சமாக்கும் x, y-க்களின் மதிப்பை நிர்ணயிக்கவும்.

தீர்வு:

$z=-2x^2+5xy-y^2+\lambda(8-x-3y)$ என்ற சார்புக்கு முதல் வரிசை பகுதிக்கெழு காணவும்.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x + 5y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x - 2y - 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 8 - x - 3y = 0$$

முதலாம் வகைக்கெழுக்களை பூச்சியத்திற்கு சமன்செய்து, சமன்பாடுகளைத் தீர்வு செய்யவும்.

$$-4x + 5y - \lambda = 0 \qquad ...(1)$$

$$5x - 2y - 3\lambda = 0 \qquad ...(2)$$

$$-x - 3y + (0)\lambda = -8 \qquad ...(3)$$

$\lambda -$ வை சமன்பாடு 1,2லிருந்து நீக்கவும்.

$$(1)\times 3 \rightarrow 12x - 15y + 3\lambda = 0$$

$$5x - 2y - 3\lambda = 0$$

$$17x - 17y = 0 \qquad ...(4)$$

$$y = 2$$

$y = 2$ என்பதை சமன்பாடு (5)ல் பிரதியிடவும்.

$$-17x - 51(2) = -136$$

$$-17x - 102 = -136$$

$$-17x = -136 + 102$$

$$17x = 34$$

$$x = 2$$

x, y ஐ 1ல் பிரதியிட்டால் $\lambda = 2$ பயன்பாட்டின் உச்ச அளவு

$$u = -2x^2 + 5xy - y^2$$

$$u = -2(4) + 5(2)(2) - 4$$

$$= -8 + 20 - 4$$

$$= 8$$

இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனையின் படி z மீப்பெரு மதிப்புடைய $H_1 < 0,\ H_2 > 0$ என இருக்க வேண்டும்.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \lambda} = -1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 5 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \lambda} = -3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda x} = -1 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial y} = -3 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda^2} = 0$$

$$f_{xx} = -4 \quad f_{yy} = -2 \quad f_{xy} = 5$$

$$|H_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} > 0$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} > 0$$

$|H_1| < 0,\ \ |H| > 0$ எனவே $z -$ ஆனது மீப்பெரு மதிப்பை அடையும்.

$$\begin{aligned} z &= -2x^2 + 5xy - y^2 + \lambda(8 - x - 3y) \\ &= -8 + 20 - 4 + 2(8 - 2 - 6) \\ &= 8 \text{அலகுகள்}. \end{aligned}$$

இரண்டுக்கு மேற்பட்ட சார்பிலா மாறிகள் இருந்தால், இயற்கணித அணி (Matrix Algebra) $u = f(x, y, z)$ என்ற சார்பிற்கு மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்பு காணும் நிபந்தனைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு கூறலாம்.

$f(x, y, z)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பாகவும், $\phi(x, y, z) = 0$ என்பது துணை நிபந்தனையாகவும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். மேலும்,

$u = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z)$ என்று அமைப்போம். எனவே,

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ என்றிட, $f_x + \lambda\phi_x = 0$ என்றும்,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ என்றிட, $f_y + \lambda\phi y = 0$ என்றும்,

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ என்றிட, $f_z + \lambda\phi_z = 0$ என்றும், மற்றும்,

$\dfrac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$ என்றிட, $\phi(x, y, z) = 0$ என்றும் கிடைக்கும்.

இந்த நான்கு நிபந்தனைகளையும் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளாகக் கருதித் தீர்வு காண, $f(x, y, z)$ என்ற சார்பு மீப்பெரும், மீச்சிறு மதிப்புகளை அடையும் புள்ளிகளைப் பெற முடியும்.

மீப்பெரு மதிப்பு பெற முதல்வரிசை நிபந்தனை:

$$f_x = 0$$
$$f_y = 0$$
$$f_z = 0$$

கெசியன் அணிக் கோவையானது

$$|H_1| = \begin{vmatrix} 0 & P_x \\ P_x & f_{xx} \end{vmatrix};$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & f_{xx} & f_{xy} \\ P_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y & P_z \\ P_x & f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ P_y & f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ P_z & f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

மீப்பெரு மதிப்பு பெற இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனை:

$|H_1| < 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H| > 0$ என அமையும்.

மீச்சிறு மதிப்பு பெற முதல்வரிசை நிபந்தனை:

$$f_x = 0$$
$$f_y = 0$$
$$f_z = 0$$

மீச்சிறு மதிப்பு பெற இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனை:

$$|H_1| < 0, \quad |H_2| < 0, \quad |H| < 0$$

அதாவது,

$$|H_1| = \begin{vmatrix} 0 & P_x \\ P_x & f_{xx} \end{vmatrix};$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & f_{xx} & f_{xy} \\ P_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y & P_z \\ P_x & f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ P_y & f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ P_z & f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

குறிப்பு

மூன்றிற்கும் மேற்பட்ட சார்பிலா மாறிகள் இருந்தால் இம்முறையை விரித்துக் கூறி, சார்புகளின் பெருமம், சிறுமம் காண்பதற்கான நிபந்தனைகளை கீழ்க்கண்டவாறு கூறலாம்.

மீப்பெரு மதிப்பு பெற முதல்வரிசை நிபந்தனை:

$$f_{x_1} = 0$$
$$f_{x_2} = 0$$
$$f_{x_3} = 0$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$f_{x_n} = 0$$

கெசியன் அணிக் கோவையானது

$$|H_1| = \begin{vmatrix} 0 & P_{x_1} \\ P_{x_1} & f_{x_1x_1} \end{vmatrix};$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & P_{x_1} & P_{x_1} \\ P_{x_1} & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ P_{x_2} & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 0 & P_{x_1} & P_{x_2} & P_{x_3} \\ P_{x_1} & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ P_{x_2} & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & fx_2x_3 \\ P_{x_3} & f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{vmatrix}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & P_{x_1} & P_{x_2} & P_{x_3} \ldots . P_{x_n} \\ P_1 & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \ldots \ldots f_{x_1x_n} \\ P_2 & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \ldots \ldots f_{x_2x_n} \\ P_3 & f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \ldots . f_{x_3x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ldots \quad \ldots \ldots \\ P_n & f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} \ldots . f_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

மீப்பெரு மதிப்பு பெற இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனை:

$|H_1| < 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H_3| < 0, |H_4| > 0 \ldots \ldots . |H| > 0$ என அமையும்.

மீச்சிறு மதிப்பு பெற முதல்வரிசை நிபந்தனை:

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= 0 \\ f_{x_2} &= 0 \\ f_{x_3} &= 0 \\ &\ldots \\ &\ldots \\ f_{x_n} &= 0 \end{aligned}$$

மீச்சிறு மதிப்பு பெற இரண்டாம் வரிசை நிபந்தனை:

$|H_1| < 0, \quad |H_2| < 0, \quad |H_3| < 0, |H_4| < 0 \; \ldots \ldots \; |H| < 0$ அதாவது,

$$|H_1| = \begin{vmatrix} 0 & P_{x_1} \\ P_{x_1} & f_{x_1x_1} \end{vmatrix};$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & P_{x_1} & P_{x_1} \\ P_{x_1} & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ P_{x_2} & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 0 & P_{x_1} & P_{x_2} & P_{x_3} \\ P_{x_1} & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ P_{x_2} & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & fx_2x_3 \\ P_{x_3} & f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{vmatrix}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & P_{x_1} & P_{x_2} & P_{x_3} \ldots P_{x_n} \\ P_1 & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \ldots\ldots f_{x_1x_n} \\ P_2 & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \ldots\ldots f_{x_2x_n} \\ P_3 & f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \ldots\ldots f_{x_3x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ P_n & f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} \ldots\ldots f_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

இவ்வாறு மூன்றிற்கும் மேற்பட்ட சார்பிலா மாறிகள் இருந்தால் சார்புகளின் மீப்பெருமம், மீச்சிறுமம் காணலாம்.

<+>

துணை மற்றும் பார்வைக்குரிய நூல்கள்

1. ஆர். அனுமந்தராவ், கணிதம் - துணைப்பாடம், சென்னை, தமிழ் வெளியிட்டுக் கழகம், தமிழக அரசு, 1969.

2. ரா. மகாதேவன், கணிதம் - ஓர் அறிமுகம் - III, சென்னை, தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், 1971.

3. க. சு. இராமச்சந்திரன், செயல் முறைக் கணிதம், சென்னை, தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், 1973.

4. துரை. இரத்தினசபாபதி, கே. ஆர். சந்தானகோபாலன், கணிதப்பொருளாதாரம், சென்னை (Madras), தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், 1973.

5. கு. இராஜகோபாலன், அடிப்படைக்கணிதம், சென்னை, தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், 1975.

6. ப. வே. நவநீத கிருஷ்ணன், பொறியியற் கணக்கு-(பகுதி-1), சென்னை, தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், 1975.

7. எம். ஜெயராம ஆறுமுகம், கணிதம் - ஓர் அறிமுகம் சென்னை, தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், 1977.

8. சி. வேலாயுதம், உயர் நிலை நுண்ணினப் பொருளாதார இயல், சென்னை, தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், 1977.

9. துரை. இரத்தினசபாபதி, தொழிலகங்களில் கணித, புள்ளியல் முறைகள் பாகம்-1., சென்னை, தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், 1978.

10. சி. வேலாயுதம், நுண்ணினப் பொருளாதாரம், சென்னை, தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், 1979.

11. Caroline Deineity, Elementary Mathematics for Economists, Oxford Publication, New York.

12. Allen, R.G.D., Mathematical Analysis for Economists, Macmillan Press and ELBS, London,1974.

13. Teresa Bradley and Paul Patton, Essential Mathematics for Economics and Business, New Delhi, John Wiley &Sons Ltd., 2002.

14. Adil H. Mouhammed, Introductory Mathematical Economics, New Delhi, Prentice Hall of India (P) Ltd., 2003.

15. Monga, G.S. , Mathematics for Economists, Sultan Chand & Sons, New Delhi, 2004.

16. Chiang, A.C. and Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw Hill, New York, 2005.

<+>