412

தொடக்கநிலைக் கல்வி இயக்ககம்

கணிதம்

தொடக்க நிலை

பகுதி – III

கணிதம்

பாடங்கள் : 17 – 29

மதுரை காமராசர் பல்கலைக்கழகம்,
மதுரை – 625 021.

பதிப்புரிமை : தொலைநிலைக் கல்வி இயக்ககம்

ACL.MKU
01066

Reprint at SUN - Year 2010 - 2011 - Copies 1000

கூட்டல்-கழித்தல்

ஆயத்த நிலை வகுப்பில் சங்கேத கணிதம் (அல்ஜீப்ரா) என்ற தலைப்பில்மாதிகளைப் பற்றிப் படித்தீர்கள். இனி இந்த ஆண்டில் நான்கு அடிப்படைச் செயல்களான கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகியவை எவ்வாறு செய்யப்படுகின்றன என்பது பற்றித் தெரிந்து கொள்வோம்.

சுருக்குதல் :

1) $5x+3+6x+7$

இதில் x ஐக் கொண்ட இரு உறுப்புக்கள் உள்ளன. பங்கீட்டு விதியை பயன்படுத்துவோம்.

$\Rightarrow$ $5+6) x + (3+7)$

$\Rightarrow 11x + 10$

ஆகவே, $11x+10$ என்ற கோவை $5x+3+6x+7$ என்ற கோவையின் சுருக்கப்பட்ட வடிவம் ஆகும்.

2) $3xy-4xz+6xy-z+8xz-3-2z-7$

$\Rightarrow (3+6)\, xy+(-4+8)\, xz+(-1-2)\, z+(3-7)$

$\Rightarrow 9xy+4xz+z-4$

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட கோவையின் சுருக்கப்பட்ட வடிவம் ஆகும்.

கோவைகளின் மதிப்பீடு :

$P(x) = x^3-7x^2+5x+4$ என எடுத்துக்கொள்வோம். x ன் மதிப்புக்கு ஏற்ப கோவையின் மதிப்பு மாறும். $x=2$ என்றால் கோவையின் மதிப்பை

P (2) என எழுதலாம்.

$\Rightarrow P(2) = (2)^3 - 7(2)^2+5\,(2)+4$

$\Rightarrow P(2) = 8-28+10+4$

$P(2) = 22-28 = -6$

$(x) = 1$ என்றால் கோவையின் மதிப்பு $P(1)$

$\Rightarrow P(1) = (1)^3 - 7(1)^2 + 5(1) + 4$

$= 1-7+5+4$

$= 10-7$

$\Rightarrow P(1) = 3$

$x = 1 : x = 2$ என்னும் போது $P(1) : P(2)$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு சமமில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். x வெவ்வேறு மதிப்புக்களை ஏற்கும் போது கோவையும் வெவ்வேறு மதிப்புக்களை ஏற்கின்றது.

குறிப்பு : சில சமயங்களில் xன் வெவ்வேறு இரண்டு மதிப்புகளுக்கு கோவையின் மதிப்பு சமமாகவும் இருக்கலாம்,

எ.கா,

$P(x) = 4x^2 + 5x - 7$ என்றால் $P(2) : P(0)$ இவற்றைக் காண்க

தீர்வு $P(x) = 4x^2 + 5x - 4$

$P(2 = 4(2)^2 + 5(2) - 7$

$= 16+10-7$

$P(2) = 19$

$P(0) = 4(0)^2 + 5(0) - 7$

$= 0+0-7$

$P(0) = -7$

பூச்சிய பல்லுறுப்புக் கோவை :

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் குணகங்கள் அனைத்துமே பூச்சியமானால் அது பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்

(உ-ம்) $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவை :

உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை சமமாகவும் ஒத்த உறுப்புக்களை உடையதாகவும் உள்ள இரண்டு ஒரே மாறியின் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில்

முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையின் குணகங்கள் முறையே, இரண்டாவது பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒத்த உறுப்புக்களின் குணகங்களின் எதிர் எண்களானால், இக் கோவைகள் ஒவ்வொன்றும் மற்ற தன் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகும்.

(உ.ம்) $4x^2-7x+6$ ன் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவை

$-4x^2+7x-6$ ஆகும்.

அதாவது இரு எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

(எ. கா)கீழ்க்காணும் கோவையின் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவையை எழுதுக;

$-8x^2+8xy-6y^2+7yz$

தீர்வு : எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவை காண குணகங்களின் குறியை மாற்ற வேண்டும்.

எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவை $8x^2-8xy+6y^2-7yz$

கூட்டல் : பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டும் போது பங்கீட்டுப் பண்பு வரிசை மாற்றுப் பண்பு ஆகிய பல்பண்புகளைப் பயன்படுத்தி சுருக்கி எழுத வேண்டும்.

(உ.ம்)

பின்வரும் கோவைகளைக் கூட்டி எழுதுக.

$3x^2-6x+9$; $6x^2+7x-5$; $-4x+7$

தீர்வு :

$(3x^2-6x+9)+(6x^2+7x-5)+(-4x+7)$

$\Rightarrow 3x^2-6x+9+6x^2+7x-5-4x+7$

$\Rightarrow (3+6)x^2+(-6+7-4)x+(9-5+7)$

$\Rightarrow 9x^2-3x+11$

(எ.கா) 1 :

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுக.

$4y-y+12$; $9x+5y-17$; $7x+3y+10$

தீர்வு :

$$(4x-7y+12)+(9x+5y-17)+(7x+3y+10)$$

$\Rightarrow \; 4x-7y+12+9x+5y-17+7x+3y+10$

$\Rightarrow \; (4+9+7)x+(-7+5+3)y+(12-17+10)$

$\Rightarrow \; 20x+y+5$

குறிப்பு : மூன்று அல்லது நான்கு கோவைகளைக் கூட்ட வேண்டியிருந்தால் கோவைகளை ஒன்றின் கீழ் ஒன்றாக ஒரின உறுப்புக்கள் ஒன்றின் கீழ் ஒன்றாக அமையுமாறு எழுதிக் கூட்டுவது எளிது.

$$\begin{array}{l} 4x-7y+12 \\ 9x+5y-17 \\ 7x+4y+10 \\ \hline \end{array}$$

$(4+9+7)x+(-7+5+3)y+(12-17+10)$

$\Rightarrow \; 20x+y+5$

கழித்தல் : இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றைக் கழிக்கும் போது, கூட்டலில் செய்தது போலவே வரிசை மாற்றுப் பண்பு, பங்கீட்டுப் பண்பு இவற்றைப் பயன்படுத்த வேண்டும். கழித்தல் என்பது கூட்டலின் எதிர்ச் செயல் என்பதால் கழிக்கப்படும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காணவேண்டும். பிறகு இரண்டு கோவைகளையும் கூட்டவேண்டும்.

(உ.ம்)

$8x^2+6xy-5$ லிருந்து $7x^2-5xy+8$ ஐக் கழிக்கவும்.

தீர்வு :

$$(8x^2+6xy-5)-(7x^2-5xy+8)$$

$\Rightarrow \; (8x^2+6xy-5-7x^2-5xy-8)$

$\Rightarrow \; (8-7)x^2+(6+5)xy+(-5-8)$

$\Rightarrow \; x^2+11xy-13$

(எ.கா.) 1

முதல் கோவையிலிருந்து இரண்டாம் கோவையைக் கழிக்கவும்.

$(9x^2+6xy+x+y-6)$; $(4x^2+x-y-5)$

தீர்வு :

$(9x^2+6xy+x+y-6)-(4x^2+x-y-5)$

$\Rightarrow (9x^2+6xy+x+y-6-4x^2-x+y+5)$

$\Rightarrow (9-4)x^2+(6)xy+(1-1)x+(1+1)y+(-6+5)$

$\Rightarrow 5x^2+6xy+2y-1$

(எ.கா.) 2

முதல் கோவையுடன் இரண்டாம் கோவையைக் கூட்டி வரும் விடையிலிருந்து மூன்றாம் கோவையைக் கழி.

$3x-2y+z$; $z-y-x$; $2z+3y-4x$

தீர்வு :

$(3x-2y+z)+(z-y-x)-(2z+3y-4x)$

$\Rightarrow 3x-2y+z+z-y-x-2z-3y+4x$

$\Rightarrow (3-1+4)x+(-2-1-3)y+(1+1-2)z$

$\Rightarrow 6x-6y$

$\Rightarrow 6(x-y)$ இரண்டு உறுப்புக்களில் 6 பொதுவாக இருப்பதால் பங்கீட்டுப் பண்பின் எதிர்ச்செயலைப் பயன்படுத்தி 6ஐ வெளியே எடுக்கலாம்.

(எகா.) 3

$(4x+6y)$ உடன் எக்கோவையைக் கூட்ட $(2x-y)$ கிடைக்கும்.

தீர்வு :

$(4x+6y)$ என்ற கோவையுடன் A என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கூட்டி $(2x-y)$ என்ற கோவை கிடைப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம்.

ஆகவே $(4x+6y)+A=(2x-y)$

$\Rightarrow A=(2x-y)-(4x+6y)$

$\Rightarrow A=2x-y-4x-6y$

$\Rightarrow A=(2-4)x+(-1-6)y$

$\Rightarrow A=-2x-7y$

ஆகவே $-2x-7y$ என்ற கோவையைக்கூட்டத் தேவையான விடை கிடைக்கும்.

எ.கா. 4

$2x-3y-4z$ லிருந்து எதைக் கழிக்க $4x+3y-2z$ கிடைக்கும்?

தீர்வு :

$(2x-3y-4z)$ என்ற கோவையிலிருந்து A என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கழிக்க $(4x+3y-2z)$ என்ற கோவை கிடைப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம்.

$\Rightarrow (2x-3y-4z)-A=(4x+3y-2z)$ ஆகிறது.

$\Rightarrow (4x+3y-2z)=(2x-3y-4z)-A$

$\Rightarrow A=(2x-3y-4z)-(4x+3y-2z)$

$\Rightarrow A=2x-3y-4z-4x-3y+2z$

$\Rightarrow A=(2-4)x+(-3-3)y+(-4+2)z$

$\Rightarrow A=-2x-6y-2z$

$\Rightarrow A=-2x-3y+z$

ஆகவே $-2(x+3y+z)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை கழிக்கவேண்டும்.

பயிற்சி :

1) சுருக்குக.

i) $a-4+12a+8$

ii) $x^2-25+12x^2$

iii) $x^4+5-2x^3-24+9x+30 \quad 2x$

2) கோவைகளின் மாறிகளுக்குக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மதிப்பைப் பிரதியீடு செய்து கோவையின் மதிப்பைக் காண்க.

i) $3x^2+7x-5 \qquad x=1$

ii) $4x^2-5xy+6y \qquad x=0, y=1$

iii) $6x^3-7x^2+8x-5 \qquad x=2$

3) கீழ்க்காணும் கோவைகளைக் கூட்டி எழுதவும்.

i) $4x^2-4x+5;\ 6x^2+8x-3;\ 3x^2-7x+6$

ii) $12a^2-3b;\ -6b-7a^2+9b-5a^2$

iii) $7x^2+6xy-4y^2;\ 8x^2-7xy+6y^2$

4) முதல் கோவையிலிருந்து இரண்டாம் கோவையைக் கழித்து எழுதவும்.

i) $4x^2-7x-5; \qquad 3x^2-3x+7$

ii) $9x^2-6xy+7y^2; \qquad 6x^2+6xy-2y^2$

iii) $12a^2-7ab+4b^2; \qquad -7a^2+6ab-4b^2$

விடைகள் :

1) i) $13a+4$ ii) -13 iii) $-x^2+7x+11$

2) i) 5 ii) 6 iii) 31

3) i) $13x^2-3x+8$

ii) 0

iii) $15x^2-xy+2y^2$

i) $x^2-4x-12$

ii) $3x^2+12xy+9y^2$

iii) $19a^2-13ab+8b^2$

பெருக்கல்-வகுத்தல்

இந்தப் பாடத்தில் பெருக்கல் என்னும் செயலைப் பற்றிப் படிப்போம். பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எண்களால் பெருக்குதல், பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கோவையால் பெருக்குதல் ஆகிய முறைகளைக் கற்றுக் கொள்வோம்.

பல்லுறுப்புக் கோவையை எண்களால் பெருக்க எண்களிடையேயுள்ள பங்கீட்டுப்பண்பு பயன்படுகிறது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒரு மெய்யெண்ணால் பெருக்க வேண்டுமெனறால் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அந்த மெய்யெண்ணால் பெருக்க வேண்டும். கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளால் இச்செயலைப் பற்றி எளிதில் அறிந்து கொள்ளலாம்.

(எ.கா):

$(6x^2 - 7x + 5) \times 4$

பங்கீட்டுப் பண்பை பயன்படுத்த

$6x^2 \times 4 - 7x \times 4 + 5 \times 4$

$\Rightarrow 24x^2 - 28x + 20$

(எ.கா. 2)

$(-4x^2 \times 7x - 6) \times (-5)$

பங்கீட்டுப் பண்பை பயன்படுத்த

$\Rightarrow -4x^2 \times -5 + 7x \times -5 - 6 \times -5$

$\Rightarrow 20x^2 - 35x + 30$

(எ.கா) 3

$(2x^3 - 7x^2 + 6x - 5) \times 4$

பங்கீட்டுப் பண்பைப் பயன்படுத்த

$\Rightarrow (2x^3 \times \frac{2}{3} - 7x^2 \times \frac{2}{3} + 6x \times \frac{2}{3} - 5 \times \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{4}{3}x^3 - \frac{14}{3}x^2 + 4x - \frac{10}{3}$

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு ஒருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குவதற்கும் இதே பங்கீட்டுப் பண்பைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

(எ.கா.) 4

$(6x^3 + 7x^2 - 5) \times 2x$

$\Rightarrow 6x^3 \times 2x + 7x^2 \times 2x - 5 \times 2x$

$\Rightarrow 12x^4 + 14x^3 - 10x$

(எ.கா.) 5

$\Rightarrow 4x^3 - 7x^2 + 8x - 7 \times 2y$

$\Rightarrow 4x^3 \times 2y - 7x^2 \times 2y + 8x \times 2y - 7 \times 2y$

$\Rightarrow 8x^3y - 14x^2y + 16xy - 14y$

(எ.கா.) 6

$(12x^2y - 10xy^2 + 7y^3) \times 2xy$

$\Rightarrow 12x^2y \times 2xy - 10xy^2 \times 2xy + 7y^3 \times 2xy$

$\Rightarrow 24x^3y^2 - 20x^2y^3 + 14xy^4$

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் பெருக்குவதற்கும் பங்கீட்டுப் பண்பையே பயன்படுத்துகிறோம்.

(எ.கா.) 7

$(3x^2 - 5x + 2) \times (4x^2 + 3x - 5)$

$[(3x^2 - 5x + 2) \times 4x^2] + [3x^2 - 5x + 2) \times 3x]$
$+ [3x^2 - 5x + 2) \times -5)]$

$[(3x^2 \times 4x^2 - 5x \times 4x^2 + 2 \times 4x^2)]$
$+ [3x^2 \times 3x - 5x \times 3x + 2 \times 3x]$
$+ [3x^2 \times -5 - 5x \times -5 + 2 \times -5]$

$$\Rightarrow (12x^4 - 20x^3 + 8x^2) + (9x^3 - 15x^2 + 6x)$$
$$+ (-15x^2 + 25x - 10)$$

$$\Rightarrow 12x^4 - 20x^3 + 8x^2 + 9x^3 - 15x^2 + 6x$$
$$-15x^2 + 25x - 10$$

$$\Rightarrow 12x^4 + (-20 + 9)x^3 + (8 - 15 - 15)x^2 + (6 + 25x)x - 10$$

$$\Rightarrow 12x^4 - 11x^3 - 22x^2 + 31x - 10$$

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் பங்கீட்டுப்பண்பு, வரிசை மாற்றுதுப்பண்பு, அடுக்குக்குறி விதிகள் ஆகியவை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. எந்த இடத்தில் எது பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது என்பது நன்கு கவனிக்கப்படல் அவசியம்.

இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை ஒன்றன் கீழ் ஒன்றாகவும் எழுதிக் கொண்டு பெருக்கல் என்னும் செயலைச் செய்யலாம்.

எ.கா. 8

$$(5x^2 - 6x + 7) \times (3x^2 - 3x + 2)$$

தீர்வு

$$
\begin{array}{rrrrrl}
5x^2 & -6x & +7 \times & & & \\
3x^2 & -3x & \times 2 & & & \\
\hline
15x^4 & -18x^3 & +21x^2 \ldots\ldots & & & (1) \\
 & -15x^3 & +18x^2 & -21x \ldots\ldots & & (2) \\
 & & 10x^2 & -12x & +14 \ldots\ldots & (3) \\
\hline
15x^4 & -33x^3 & +49x^2 & -43x & +14 &
\end{array}
$$

கூட்ட $15x^4 - 33x^3 + 49x^2 - 43x + 14$

குறிப்பு :

(1)ம் வரியானது $(5x^2 - 6x + 7$ என்னும் கோவையை, $3x^2$ என்னும் ஒருறுப்புக் கோவையால் பெருக்கக் கிடைக்கின்றது.

(2)ம் வரியானது $(5x^2 - 6x + 7)$ என்னும் கோவையை $-3x$ என்னும் ஒருறுப்புக் கோவையால் பெருக்கக் கிடைக்கின்றது

(3)ம் வரியானது $(5x^2-6x+7)$ என்னும் கோவையை 2 என்ற எண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கின்றது. மூவறையும் கூட்டத் தேவையான பெருக்கற்பலன் கிடைக்கின்றது.

சில வேளைகளில் நமக்குப் பெருக்கற்பலனில் உள்ள அத்தனை உறுப்புகளும் தேவைப்படாமல், ஒரே ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பின் குணகம் மட்டும் தேவைப்படலாம். அம்மாதிரி சமயங்களில் நாம் கோவைகளை முழுவதும் பெருக்கிவிட்டு, நமக்குத் தேவையான உறுப்பை மட்டும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். ஆனால் கோவையை முழுவதும் பெருக்காமலே யே நமக்குத் தேவையான உறுப்பை மட்டும் கண்டுபிடிக்க முடியும்

(எ.கா) 9

$$(4x^3+7x^2-6x+5)\times(6x^2+4x-3)$$

என்ற பெருக்கற்பலனில் x^3 குணகத்தை, கோவையை முழுவதும் பெருக்காமல் காண்க.

தீர்வு :

பெருக்கற்பலனில் x^3 உடைய உறுப்பு பின்வரும் முறைகளில் அடையலாம்.

1) முதல் கோவையின் மாறிலி $\times$ இரண்டாம் கோவையின் x^3 உறுப்பு

2) முதல் கோவையின் x உறுப்பு $\times$ இரண்டாம் கோவையின் x^2 உறுப்பு

3) முதல் கோவையின் x^2 உறுப்பு $\times$ இரண்டாம்கோவையின் x உறுப்பு

4) முதல் கோவையின் x^3 உறுப்பு $\times$ இரண்டாம் கோவையின் மாறிலி

மேலே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கில் இரண்டாம் கோவையில் x^3 உறுப்பு இல்லை. ஆகவே, மற்ற மூன்று முறைகளில்தான் x^3 உறுப்பும் கிடைக்கும். அவற்றைத் தனித்தனியே கண்டு கூட்டி வரும் விடையே x^3 உறுப்பாகும்.

x^3 ஐக் கொண்ட உறுப்பு

$$(-6x\times 6x^2)+(7x^2\times 4x)+(5x^3\times -3)$$

= [illegible] $28x^3$ —[illegible]

$\Rightarrow (-36+28-12)x^3$

$\Rightarrow -20x^3$

ஆகவே, பெருக்கற்பலனில் x^3 ன் குணகம் − 20

இனி கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய இரு செயல்களின் பண்புகளைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

கூட்டல்:

அடைவுப் பண்பு இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

உ.ம்.

$(4x^3+2x^2+5x+1)+(7x^3-4x^2+6x-5)$

$\Rightarrow 11x^3-2x^2+11x-4$ இதுவும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

சேர்ப்புப் பண்பு:

$[(4x^2+2x-2)+(3x^2-5x+1)]+(2x^2+x-1)$

$\Rightarrow (7x^2-3x-1)+(2x^2+x-1)$

$\Rightarrow 9x^2-2x-2 \ldots\ldots (1)$

$(4x^2+2x-2)+[(3x^2-5x+1)+(2x^2+x-1)]$

$\Rightarrow (4x^2+2x-2)+[5x^2-4x]$

$\Rightarrow 9x^2-2x-2 \ldots\ldots (2)$

ஆகவே (1) = (2)

$[(4x^2+2x-2)+[3x^2-5x+1)]+(2x^2+ -1)$

$= (4x^2\times 2x-2)+(3x^2-5x+1)+(2x^2+x=1)$

இது கூட்டலின் சேர்ப்புப் பண்பு எனப்படும்.

கூட்டலின் சமனி:

பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையை எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையுடன் கூட்டினாலும் அதே பல்லுறுப்புக் கோவைதான் கிடைக்கும். ஆகவே பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவை கூட்டலின் சமனி உறுப்பு எனப்படுகிறது.

$(4x^3-7x+4)+(0x^2+0x+0)$

$(4+7)x^2 + (ox^2+ox+o)$

$= (4+o)x^2 + (-7+o)x + (4+o)$

$\Rightarrow 4x^2-7x+4$

கூட்டலின் எதிர்மறை (உறுப்பு கோவை):

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையுடன் அதன் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கூட்ட பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவை கிடைக்கின்றன. ஆகவே ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும் அதன் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவை எதிர்மறைக் கோவையாகும்.

$(3a^2-7a+5)$ என்ற கோவையின் எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவை $-3a^2+7a-5$ ஆகும்.

$(3a^2-7a+5) + (-3a^2+7a-5)$

$= (3-3)a^2 + (-7+7)a + (5-5)$

$= oa^2 + oa + o$

ஆகவே, $(3a^2-7a+5)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் எதிர்மறை உறுப்பு $(-3a^2+7a-5)$ ஆகும்.

இதேபோல $(3a^2-7a-5)$ என்ற கோவையின் எதிர்மறை உறுப்பு $(-3a^2+7a+5)$ ஆகும்.

மாற்றுப் பண்பு

$(4a^2+10a-13) + (6a^2-7a+8)$

$= (4+6)a^2 + (10-7)a + (13+8)$

$= 10a^2 + 3a - 5$ ——— (1)

$(6a^2-7a+8) + (4a^2+10a-13)$

$= (6+4)a^2 + (-7+10)a + (8-13)$

$= 10a^2 + 3a - 5$ ——— (2)

(1) = (2) ஆகவே

$[(4a^2+10a-13) + (6a^2-7a+8)$

$= (6a^2-7a+8) + (4a^2+10a-13)$

இதுவே கூட்டலின் மாற்றுப்பண்பு ஆகும்.

பெருக்கல் :

அடைவுப்பண்பு : இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலன் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

$$(3x+3) \times (4x+5) = 12x^2 + 23x + 10$$

$12x^2+23x+10$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

சேர்ப்புப் பண்பு :

$$[(3x-5) \times (2x+1)] \times (4x+1)$$

$$\Rightarrow (6x^2-7x-5) \times (4x+1)$$

$$\Rightarrow 24x^3-22x^2-27x-5 \text{ ——— (1)}$$

$$(3x-5) \times [(2x+1) \times (4x+1)]$$

$$\Rightarrow (3x-5) \times (8x^2+6x+1)$$

$$\Rightarrow 24x^3 - 22x^2 - 27x - 5 \text{ ——— (2)}$$

$$(1) = (2)$$

ஆகவே,

$$[(3x-5) \times (2x+1)] \times (4x+1) = (3x-5) \times [(2x+1) \times (4x\times3)]$$

இது பெருக்கலின் சேர்ப்புப் பண்பு ஆகும்.

பெருக்கல் சமனி

1 என்ற ஒருமைப் பல்லுறுப்புக் கோவையால் எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையையும் பெருக்க அதே பல்லுறுப்புக் கோவை கிடைக்கின்றது. ஆகவே, 1 என்ற ஒருமைப் பல்லுறுப்புக் கோவை பெருக்கல் சமனி எனப்படும்.

$$(3x^2-7x+6) \times 1$$

$$= 3x^2 \times 1-7x \times 1+6 \times 1$$

$$= 3x^2 - x + 6$$

மாற்றுப் பண்பு

$$(2x+5) \times 3x-3)$$

$$= (2x+5) \times 3x + (2x+5) \times -3$$

$= 6x^2+15x-6x-15$

$= 6x^2+9x-15$ ———————— (1)

$(3x-3)\ (2x+5)$

$= (3x-3+2x+(3x-3) \times 5$

$= 6x^2-6x+15x-15$

$= 6x^2+9x-15$ ———————— (2)

ஆகவே. (1) = (2)

$(2x+5) \times (3x-3) = (3x-3) \times (2x+5)$

இது பெருக்கலின் மாற்றுப் பண்பு ஆகும்.

பங்கீட்டுப் பண்பு :

பங்கீட்டுப் பண்பில் இடதுபுற, வலதுபுற பங்கீட்டுப் பண்புகள் உள்ளன

இடது பங்கீடு

$4x \times (5x+3) = (4x \times 5x) + (4x \times 3)$

இடது கைப்பக்கம்

$4x \times (4x+3) = 20x^2+12x$

வலது கைப்பக்கம்

$(4x \times 5x) + (5x \times 3) = 20x^2+12x$

இருபுறமும் சமம், இது இடதுபுறப் பங்கீட்டுப் பண்பு எனப்படும். இதேபோல வலது புறப் பங்கீட்டுப் பண்பையும் நிறுவலாம்.

வகுத்தல்

x ஒருறுப்புக் கோவையை, ஒருறுப்புக் கோவையால் வகுத்தல் :

(உ.ம் 1) x^3 ஐ x ஆல் வகுக்க

$$\frac{x^3}{x} = \frac{x \times x \times x}{x} = x^2$$

2) $3x^4$ ஐ 2x ஆல் வகுக்க

$$\frac{3x^4}{2x} = \frac{3 \times x \times x \times x \times x}{2 \times x}$$

$$= \frac{3}{2} \times x^3$$

பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒருறுப்புக் கோவையால் வகுத்தல் :

உ-ம் 1) $\frac{x^3+x^3+2x+1}{x}$

$=> \frac{x^3}{x} + \frac{3x^3}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x}$

$=> x^2+3x^2+2+\frac{1}{x}$ (இது பல்லுறுப்புக் கோவையல்ல)

$\frac{4x^3+3x+2x+1}{2x^2}$

(ie) $\frac{4x^3}{2x^2} + \frac{3x^2}{2x^2} + \frac{2x}{2x^4} + \frac{1}{2x^2}$

(ie) $2x + \frac{3}{2}x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$

இது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையல்ல :

பல்லுறுப்புக் கோவையைப் பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்தல் :

உ-ம் 1) $(x^2+7x+12)$ ஐ $(x+4)$ ஆல் வகுக்க;

```
            x + 3
x+4   √ x² + 7x + 12
          x² + 4x
        -----------
கழி       + 3x + 12
          + 3x + 12
        -----------
கழி           0
        -----------
```

ஆகவே
$x^2+7x+12 \div x+4$
ஈவு $x+3$
மீதி 0

i) ஈவின் முதல் உறுப்பு $\frac{x^2}{x} = x$

$x(x+4) = x^2+4x$

ii) ஈவின் இரண்டாம் உறுப்பு $\frac{3x}{x} = 3$

$3(x+4) = 3x+12$

வலதுபுறம் வகுத்தலின் வழிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உ.ம் 2

$$x^2-10x+16 \div x-2$$

வகுபடும் கோவை $x^2-10x+16$
வகுக்கும் கோவை $x-2$

உ.ம் 2

$$\begin{array}{r} x-8 \\ x-2\,\overline{)\,x^2-10x+16} \\ x^2-2x \quad\quad \\ \hline \text{கழி} \quad -8x+16 \\ -8x+16 \\ \hline 0 \end{array}$$

i) ஈவின் முதல் உறுப்பு

$$\frac{x^2}{x} = x$$

ie, $x(x-2) = x^2-2x$

ii) ஈவின் இரண்டாம் வகுப்பு

$$\frac{-8x}{x} = -8$$

$$-(x-2) = -8x+16$$

ஆகவே, $x^2-10x+16 \div x-2$
ஈவு $x-8$
மீதி $= 0$
x^3+1ஐ $x+1$ ஆல் வகு

குறிப்பு :

x^3+1 என்ற வகுபடும் கோவையில் x^2, x ஆகிய உறுப்புக்களின் குணகங்கள் பூச்சியமாகும். ஆகவே, வகுபடும் கோவையை

$x^3+1 = x^3\ 0x^2+0x+1$ என்று எழுத வேண்டும்.

$$\begin{array}{r} x^2-x+1 \\ x+1\,\overline{)\,x^3+0x^2+0x+1} \\ x^3+x^2 \quad\quad\quad\quad \\ \hline \text{கழி} \quad x^2+0x \quad\quad \\ -\ x^2-x \quad\quad \\ \hline \text{கழி} \quad +x+1 \\ x+1 \\ \hline 0 \end{array}$$

i) ஈவின் முதல் உறுப்பு

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$

$$x^2(x+1) = x^3+x^2$$

ii) ஈவின் இரண்டாம் உறுப்பு

$$\frac{-x^2}{x} = -x$$

$$-x(x+1) = -x^2-x$$

iii) ஈவின் மூன்றாம் உறுப்பு

$$\frac{x}{x} = 1$$

ஆகவே $x^3+1 \div x+1$

ஈவு x^2-x+1

மீதி 0

உ-ம் 4

$$2x^3+5x^2+4x+1 \div x^2+2x+1$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+1 \\
\hline
x^2+2x+1 & 2x^3+5x^2+4x+1 \\
 & 2x^3+4x^2+2x \\
\hline
\text{கழி} & x^2+2x+1 \\
\text{கழி} & x^2+2x+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

i) ஈவின் முதல் உறுப்பு

$$\frac{2x^3}{x^2} = 2x$$

$2x(x^2+2x+1)$
$= 2x^3+4x^2+2x$

ii) ஈவின் இரண்டாம் உறுப்பு

$$\frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$1(x^2+2x+1)$
$= x^2+2x+1$

$2x^3+5x^2+4x+1 \div x^2+2x+1$

ஈவு $2x+1$

மீதி 0

உ-ம் 5

$$5x^4-4x^3+3x^2+2x+1 \div x^2-x+1$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^2+x-1 \\
\hline
x+1 & 5x^4-4x^3+3x^2+2x+1 \\
 & 5x^4-5x^3+5x^2 \\
\hline
\text{கழி} & x^3-2x^2+2x \\
 & x^3-x^2+x \\
\hline
\text{கழி} & -x^2+x-1 \\
 & -x^2+x-1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

ஈவு $5x^2+x-1$

மீதி 0

i) ஈவின் முதல் உறுப்பு

$$\frac{5x^4}{x^2} = 5x^2$$

$5x^2(x^2-x+1)$
$= 5x^4-5x^3+5x^2$

ii) ஈவின் இரண்டாம் உறுப்பு

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

$x(x^2-x+1) = x^3-x^2+x$

iii) ஈவின் மூன்றாம் உறுப்பு

$$\frac{x}{x} = 1$$

[illegible]$(x^2-x+1) = -x^2+x-1$

உ.ம. 6

வகுத்து மீதி காண்க.

$$4x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \div x + 2$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 5x + 0 \\
\hline
x+2 & 4x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \\
 & 4x^3 + 8x^2 \\
\hline
\text{கழி} & -5x^2 - 2x \\
 & -5x^2 - 10x \\
\hline
\text{கழி} & +8x + 5 \\
 & +8x + 16 \\
\hline
\text{கழி} & -11 \\
\hline
\end{array}
$$

i) ஈவின் முதல் உறுப்பு

$$\frac{4x^3}{x} = 4x^2$$

$$4x^2 (x^2 + 2) = 4x^3 + 8x^2$$

ii) ஈவின் இரண்டாம் உறுப்பு

$$\frac{-5x^2}{x} = -5x$$

$$-5x (x+2) = -5x^2 - 10x$$

iii) ஈவின் மூன்றாம் உறுப்பு

$$\frac{8x}{x} = 8$$

$$8 (x + 2) = 8x + 16$$

ஈவு $= 4x^2 - 5x + 8$ மீதி—11

பயிற்சி :

1. கீழ்வரும் பெருக்கல்களைச் செய்க.

1) $(x^2 + 2x + 5) \times 4$

2) $(x^2 - 7x + 3) \times (-12)$

3) $(x^2 - 5x - 7) \times x^2$

4) $(x^2 - 5x + 9) \times (-2x)$

II. கீழ்வரும் பெருக்கல்களைச் செய்க.

1) $(x^2 - 2x + 1)\ (x + 1)$

2) $(x^2 + x - 1)\ (x - 1)$

3) $(y^2 - y + 1)\ (y + 1)$

4) $(x^3 + 2x^2 + 3x - 5)\ (2x + 1)$

5) $(4x^2 + 7x + 5)\ (2x + 5)$

III. வகுத்து ஈவு மீதி காண்க.

1) $x^2 + 8x + 12 \div x + 2$

2) $x^2 + 5x + 4 \div x + 4$

3) $2x^2 - 7x + 12 \div x + 3$

4) $5x^3 + 6x^2 +$ [illegible] $- 4$

விடைகள் :

I. 1) $4x^3 + 8x + 20$

2) $-12x^3 + 84x - 96$

3) $x^4 - 5x^3 - 7x^2$

4) $-2x^3 + 10x^2 - 18x$

II. 1) $x^3 - x^2 - x + 1$

2) $x^2 - 2x + 1$

3) $y^2 - 1$

4) $2x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 7x - 5$

5) $8x^3 + 34x^2 + 45x + 25$

III. 1) ஈவு $x+6$ மீதி 0

2) ஈவு $x+1$ மீதி 0

3) ஈவு $2x-3$ மீதி 18

4) ஈவு $5x^2 + 14x + 68$ மீதி 280

முற்றொருமைகள்—காரணிகள்

முற்றொருமைகள் :

1. $(x+a)\ (x+b)$

$$= x\,(x+b) + a\,(x+b)$$
$$= x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + (a+b)\,x + ab$$

$$\Rightarrow \boxed{(x+a)\ (x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab}$$

2. $(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b)$

$$= a\,(a+b) + b\,(a+b)$$
$$= a^2+ab+ab+b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

3. $(a-b)^2 = (a-b)\ (a-b)$

$$= a\,(a-b) - b\,(a-b)$$
$$= a^2-ab-ab+b^2$$
$$= a^2-2ab+b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$$

4. $(a+b)\ (a-b) = a(a-b)\ b(a-b)$

$$= a^2-ab+ab-b^2$$

$$= a^2-b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(a+b)\ (a-b) = a^2-b^2}$$

மேற்கண்ட நான்கு முற்றொருமைகளை பயன்படுத்திக் கணக்குகள் செய்யும் முறையைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

எ.கா 1

$(x+3)(x+3)$ இப்பெருக்கற்பலன் $(x+a)(x+b)$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளது. ஆகவே.

$$(x+3)\ (x+2) = x^2 + (3+2)\,x + (3\times2)$$
$$= x^2+5x+6$$

எ.கா. 2

$$(x+4)\ (x-3) = (x+4)\ [\{x + (-3)\}]$$
$$= (x^2+(4-3)\,x+4(-3)$$
$$= x^2+x-12$$

எ.கா. 3

$(2x+3)\ (2x+5)$

$$= (2x)^2 + (3+5)\,2x-(5\times3)$$
$$= 4x^2+16x+15$$

எ.கா. 4

$$(2x-3)\ (2x+7) = [2x+(-3)]\ (2x+7)$$
$$= (2x)^2 + (-3+7)\,2x+(-3\times7)$$
$$= 4x^2+8x-21$$

எ.கா. 5

$(x+5)^2$ இப்பெருக்கற்பலன் $(a+b)^2$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளது, ஆகவே,

$$(x+5)^2 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2$$
$$= x^2+10x+25$$

எ. கா. 6

$$(3x+7)^2 = (3x)^2 + 2\,(3x)\,(7) + (7)^2$$
$$= 9x^2 + 42x + 49$$

எ. கா. 7

$$(2x^2+5)^2 = (2x^2)^2 + 2(2x^2)\,(5) + (5)^2$$
$$= 4x^4 + 20x^2 + 25$$

எ. கா. 8

$(x-8)^2$ இப்பெருக்கற்பலன் $(a-b)^2$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளது.

$$(x-8)^2 = (x)^2 - 2(x)\,(8) + (8)^2$$
$$= x^2 - 16x + 64$$

எ. கா. 9

$$(3x-4)^2 = (3x)^2 - 2\,(3x)\,(4) + (4)^2$$
$$= 9x^2 - 24x + 16$$

எ. கா. 10

$$(4x^2-7)^2 = (4x^2)^2 - 2\,(4x^2)\,(7) + (7)^2$$
$$= 16x^4 - 56x^2 + 49$$

எ. கா. 11

$(x+5)\,(x-5)$ இப்பெருக்கற்பலன் $(a+b)\,(a-b)$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளது.

$$(x+5)\,(x-5) = (x)^2 - (5)^2$$
$$= x^2 - 25$$

எ. கா. 12

$$(2x+3)\,(2x-3) = (2x)^2 - (3)^2$$
$$= 4x^2 - 9$$

இனி சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி இருக்கும் முறைகளை பற்றிக் கற்றுக் கொள்வோம்.

எ. கா 13

$64+2\times8\times2+4$ இதை நாம் $(8)^2+2(8)(2)+(2)^2$ என எழுதலாம். ஆகவே இவ்விரிவானது $a^2+2ab+b^2$ யை ஒத்திருக்கின்றது.

$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ என்று நமக்குத் தெரியும்.

ஆகவே,

$$(8)^2+2(8)(2)+(2)^2 = (8+2)^2$$
$$= 10^2$$
$$= 100$$

எ. கா. 14

$$225+30\times5+25$$
$$= (15)^2+2(15)(5)+(5)^2$$
$$= (15+5)^2$$
$$= 20^2$$
$$= 400$$

எ. கா. 15

$$169-2\times13\times3+9$$
$$= (13)^2-2(13)(3)+(3)^2$$
$$= (13-3)^2$$
$$= 10^2 = 100$$

எ. கா. 16

$$1005\times995 = (1000+5)(1000-5)$$
$$= (1000)^2-(5)^2$$
$$= 1000,000-25$$
$$= 999,975$$

எ. கா. 17

$$635^2-365^2$$
$$(635+365)(635-365)$$
$$= (1000\times270)$$
$$= 270,000$$

எ. கா. 18

$(a+2b)^2-(a-2b)^2$

$= [(a+ab)+(a-2b)] \; [(a+2b)-(a-2b)]$

$= (a+2b+a-2b) \; (a+2b-a+2b)$

$= (2a) \; (4b)$

$= 8ab$

இதே கணக்கை வேறொரு முறையிலும் செய்யலாம்.

$(a+2b)^2-(a-2b)^2$

$= [(a^2)+2(a)(2b)+(2b)^2]-[(a)^2-2(a)(2b)+(2b)^2]$

$= (a^2+4ab+4ab^2)-(a^2-4ab+4b^2)$

$= a^2+4ab+4b^2-a^2+4ab-4b^2$

$= 8ab$

எ. கா. 19

$(a+b) = 12$; $ab = 32$ என்றால் a^2+b^2 ன் மதிப்பு காண்க :

தீர்வு

$(a+b)^2 = (12)^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+2ab = 144$

$\Rightarrow a^2+b^2+2(32) = 144$

$\Rightarrow a^2+b^2+64 = 144$

$\Rightarrow a^2+b^2 = 144-64$

$\Rightarrow a^2+b^2 = 80$

எ. கா. 20

$(x-y) = 4$; $xy = 3$ என்றால் $(x+y)^2$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$(x-y) = 4$

$\Rightarrow (x-y)^2 = (4)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2xy = 16$

$\Rightarrow x^2+y^2-2(3) = 16$

$\Rightarrow x^2+y^2-6=16$

$\Rightarrow x^2+y^2=16+6=22$ ——— (1)

நாம் $(x+y^2)$ ன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

$\Rightarrow (x+y)^2=22+2\ (3)$ (1) லிருந்து

$\Rightarrow (x+y)^2=22+6$

$\Rightarrow (x+y)^2=28$

எ. கா. 21

$\left(x-\frac{1}{x}\right)=p$ என்றால் $x^2+\frac{1}{x^2}$ ன் மதிப்பின் P மூலம் காண்க

தீர்வு

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)=p$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=p^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2(x)\left(\frac{1}{x}\right)=p^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=p^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=p^2+2$$

இனி $(a+b+c)^2$ என்ற முற்றொருமையின் விரிவையும் அதைப் பயன்படுத்திக் கணக்குகள் செய்யும் முறையைப் பற்றியும் காண்போம்.

$(a+b+c)^2$ ன் விரிவைக் காண வேண்டும். நாம் $(a+b)=x$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2$$

$= (x+c)^2$ இது $(a+b)^2$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளது.

$$\therefore (a+b+c)^2 = x^2+2xc+c^2$$

$=$ $x = a+b$ என மறுபடியும் பிரதியிடுவோம்.

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\,c + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab + 2ca + 2bc + c^2$$

$$\therefore \boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$$

எ.டு. 1

$(x+2y+z)^2$ ன் விரிவு காண்க.

தீர்வு :

$$(x+2y+z)^2 = (x^2) + (2y^2) + (z)^2 + 2(x)(2y) + 2(4y)^2(z) + 2(z)(x)$$
$$= (x^2) + (2y^2) + z^2 + 4xy + 4yz + 2zx$$

எ.டு. 2

$(2x+3y+4z)^2$ ன் விரிவு காண்க.

தீர்வு :

$$(2x+3y+4z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(4z) + 2(4z) + 2(4z)(2x)$$
$$= 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24yz + 16zx$$

எ.டு. 3

$(3x-2y+z)^2$ ன் விரிவு காண்க.

தீர்வு :

$$(3x-2y+z)^2 = (3x)^2 + (-2y)^2 + (z^2) + 2(3x)(-2y) + 2(-2y)(z) + 2(z)(3x)$$
$$= 9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12xy - 4yz + 6zx$$

எ.டு. 4 சுருக்குக

$(2x+3y+z)^2 + (x+2y-z)^2$

$= [\,2(x)^2 + (3y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(z)$
$\quad + 2(z)(2x)\,] + [\,(x)^2 + (2y^2) + (-z)^2 + 2(x)(2y)$
$\quad + 2(2y)(-z) + 2(-z)(x)\,]$

$= [4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 6yz + 4zx]$
$\quad + [x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 2zx]$

$= 5x^2 + 13y^2 + 2z^2 + 16xy + 2yx + 2zx$

இனி $(a+b)^3$; $(a-b)^3$ என்ற இரு முற்றொருமைகளின் விரிவைக் காண்போம்.

(1) $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(ie) $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 + 3ab^2 + b^3}$

(2) $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$

$= (a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2)$

$= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$= a^3 + (-2-1)a^2b + (1+2)ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(ie) $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

இவ்விரு முற்றொருமைகளையும் பிறிதொரு வடிவிலும் எழுதலாம்.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$$

மேலும் !

$$(a-b)^3 = a^3 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3\ 3a^2b + 3ab^2$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab\ (a-b)$$

ie., $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)$

எ. கா. 1

$(2a+b)^3$ ன் விரிவுக் காண்க.

தீர்வு

$$(2a+b)^3 = (2a)^3 + 3\,(2a)^2\,(b) + 3\,(2a)\,(b)^2 + b^3$$

$$= 8a^3 + 3\,(4a^2)\,(b) + 3\,(2a)\,(b)^2 + b^3$$

$$= 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$$

எ. கா. 2.

$(4x+3y)^3$ ன் விரிவைக் காண்க.

தீர்வு

$$(4x+3y)^3 = (4x)^3 + 3\,(4x)^2\,(3y) + 3\,(4x)\,(3y)^2 + (3y)^3$$

$$= 64x^3 + 3\,(16x^2)\,(3y) + 3\,(4x)\,(9y^2) + 27y^3$$

$$= 64x^3 + 144x^2y + 108xy^2 + 27y^3$$

எ. கா. 3

$(3a-2b)^3$ ன் விரிவுக் காண்க.

தீர்வு

$$(3a-2b)^3 = (3a)^3 - 3(3a)^2(2b) + 3(3a)(2b)^2 - (2b)^3$$

$$= 27a^3 - 3(9a^2)(2b) + 3(3a)(4b^2) - 8b^3$$

$$= 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$$

எ. கா. 4

$(a+b) = 12$; $ab = 35$ எனில் a^3+b^3 ன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு

$$(a+b) = 12$$

$$(a+b)^3 = 12^3$$

$$a^3+b^3+3ab(a+b) = 1728$$

$$(a^3+b^3+3\times35\times12 = 1728$$

$$a^3+b^3+1260 = 1728$$

$$\text{(i.e.) } a^3+b^3 = 1728-1260$$

$$a^3+b^3 = 468$$

எ. கா. 5

$a-b = 4$; $ab = 21$ எனில் (a^3-b^3) ன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு

$$(a-b) = 4$$

$$(a-b)^3 = 4^3$$

$$a^3-b^3-3ab(a-b) = 64$$

$$a^3-b^3-3\times21\times4 = 64$$

$$a^3-b^3-252 = 64$$

$$a^3-b^3 = 64+252$$

$$a^3-b^3 = 316$$

காரணிப்படுத்துதல் :

$$(x+3)\ (x+2) = x(x+2) + 3\,(x + 2)$$
$$= x^2 + 2x + 3x + 6$$
$$= x^2 + 5x + 6$$

என்று நமக்குத் தெரியும்.

x^2+5x+6 என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x+3)\ (x+2)$ என்ற இரு கோவைகளின் பெருக்கற்பலனாக மாற்றி அமைக்கும் முறைக்கும் காரணிப்படுத்துதல் என்று பெயர்

$x^2 + 5x + 6 = (x+a)\ (x + b)$ என்க

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (a + b)\ x + ab$

இருபுறமும் குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$a+b = 5$

$ab = 6$ என்று கிடைக்கிறது.

இந்த இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்கும் மதிப்புகள்

$a=3 \quad b=2$

ஆகவே, $x^2+5x+6 = (x+3)\ (x+2)$

எ.கா. 1

காரணிப்படுத்துக $x^2 + 9x + 20$.

தீர்வு

$x^2+9x+20 = (x+a)\ (x+a)$ என்க

$\Rightarrow x^2+9x+20 = x^2+(a+b)x = ab$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$a+b = 9$ $\Rightarrow$ $a=5$

$ab = 20$ $\quad = 4$

$\therefore x^2 + 9x + 20 = (x+5)\ (x+4)$

எ.கா. 2

$x^2 + 18x+6$

தீர்வு

$$x^2 + 18x + 65 = (x+a)(x+b) \text{ என்க}$$
$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

ஆகவே, $a + b = 18$ $\quad a = 13$

$\Rightarrow$

$ab = 65$ $\quad a = 5$

$\therefore x^2 + 18x + 65 = (x+13)(x+5)$

எ.கா. 3

காரணிப்படுத்துக. $2^2 + 4ab + 4b^2$

தீர்வு

$$a^2 + 4ab + 4b^2 = (a)^2 + 2(a) + (2b) + (2b) + (2b)^2$$
$$= (a+2b)^2$$

எ.கா. 4

காரணிப்படுத்துக. $9a^2 - 48ab^2 + 65b^4$

தீர்வு

$$9a^2 - 48ab^2 + 64b^4 = (3a)^2 - 2(3a)(8b^2) + (8b^2)^2$$
$$= (3a - 8b^2)^2$$

(ie) $9a^2 - 48ab^2 - 64b^4 = (3a - 8b^2)^2$

எ.கா. 5

$(a-3b)^2 - (a+3b)^2$

தீர்வு

$$(a-ab)^2 - (a+3b)^2 = [a-3b) + (a+3b)]\,[(a-3b) - (a+3b)]$$
$$= (a - 3b + a + 3b)(a - 3b - a - 3b)$$
$$= 2a \times (-6b)$$
$$= -12ab$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$$

என்ற விரிவை நாம் அறிவோம். இதைப் பயன்படுத்தி a^3+b^3 என்ற கோவையைக் காரணிப்படுத்தும் முறையை இங்கு காண்போம்.

1) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab\,(a+b)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)\,[\,(a + b)^2 - 3ab]$

$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2+2ab+b^2 - 3ab)$

$$\Rightarrow \boxed{a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)}$$

2) $a^3 - b^3$ ஐக் காரணிப்படுத்துதல்

$a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b) = (a-b)^3$

$\Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab\,(a-b)$

$\Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)\,[(a-b)^2 + [3ab$

$\Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)\,[a^2 - 2ab + b^2 + 3ab]$

$$\Rightarrow \boxed{a^3 - b^3 = (a-b)\,(a^2+ab+b^2)}$$

இந்த இரு சூத்திரங்களையும் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்தும் முறை பற்றி இனிக் காண்போம்.

எ. கா. 1

$27 + x^3$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$$(27 + x^3) = (3^3+x^3)$$
$$= (3 + x)\,[(3)^2-(3)\,(x) + (x)^2$$
$$= (3 + x)\,(9-3x + x)^2$$

எ. கா. 2

$64x^3 + 125y^3$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$$64x^3 + 125y^3 = [(4x)^3 + (5y)^3]$$

$$= [(4x + 5y)[4x)^2 - (4x)(5y) + (5y^2)]$$

$$= (4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$$

எ.கா. 3

$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$$

$$= \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right]\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b^2} - 1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

எ.கா. 4

$27y^3 - 8x^3$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$$27y^3 - 8x^3 = (3y)^3 - (2x)^3$$

$$= (3y - 2x)[(3y)^2 + (3y)(2x)(2x)^2]$$

$$= (3y - 2x)(9y^2 + 6xy + 4x^2)$$

எ.கா 3

$a^3 b^3 - 27$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$$a^3 b^3 - 27 = (ab)^3 - (3)^3$$

$$= (ab-3)\,[\,(ab)^2 + (ab)(3) + (3)^2]$$

$$= (ab-3)\,(a^2b^2 + 3ab + 9)$$

பயிற்சி :

I பெருக்கற்பலன் காண்க.

1) $(x+3)(x+7)$

2) $(x+5)(x+9)$

3) $(x+2)(a+5)$

4) $(x^2+5)(x^2-7)$

II. விரிவு காண்க.

1) $(2a+3b)^2$

2) $(x+3y)^2$

3) $(3x-4y)^2$

III. $a + \dfrac{1}{a} = 5$ என்றால் $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$ ன் மதிப்பு காண்க.

IV. விரிவு காண்க

1) $(2x+3y+z)^2$

2) $(x+y+2x)^2$

V. விரிவு காண்க

1) $(3x+2y)^3$

2) $(3a-y)^3$

VI. காரணிப்படுத்துக.

1) $x^2 + 9x + 14$

2) $x^2 - 5x - 6$

3) $4x^2 + 4ab + b^2$

4) $125a^3 - 27$

5) $64x^3 + 8y^3$

விடைகள் :

I. 1) $x^2 + 10x + 21$

2) $x^2 + 14x + 45$

3) $a^2 + 7a + 10$

4) $x^4 - 2x^2 - 35$

II. 1) $4a^2 + 12ab + 9b^2$

2) $x^2 + 1 + 9y^2$

3) $9x^2 - 24xy + 16y2$

III. 23

IV. 1) $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 6yz + 4zx$

2) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4zx$

V. 1) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

2) $64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 + y^3$

VI. 1) $(x + 7)(x + 2)$

2) $(x - 6)(x + 1)$

3) $(2a + b)^2$

4) $(5a - 3)(25a^2 - 15a + 9)$

5) $(4x + 2y)(16x^2 - 8xy + 4y^2)$

பல்லுறுப்புச் சார்பு - மீதித்தேற்றம்

பல்லுறுப்புச் சார்பு :

ஒரு சார்பானது ஒரு குறிப்பிட்ட மாறியில் அல்லது மாறிகளில் அமைந்த பல்லுறுப்புக்கோவையினால் வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின் அது பல்லுறுப்புச்சார்பு எனப்படும். x என்னும் மாறியினால் வரையறுக்கப்படும் சார்பை நாம் p(x) என்று எழுதுகிறோம். x,y, என்னும் இரு மாறிகளால் வரையறுக்கப்படும் சார்பை p(x,y) என்று எழுதுகிறோம். இச்சார்புகளின் விதி ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையினால் வரையறுக்கப்படுவதால் இச்சார்பின் மதிப்பகம், துணைமதிப்பகம் இரண்டுமே மெய்யெண்களைக் கொண்ட கணமாக அமையும்.

சார்பின் பூச்சியம் :

$P(x) = 2x + 6$ என்க. x என்ற மாறி மெய்யெண்களில் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை எடுத்துக் கொள்ளும் உதாரணமாக $x = -3$ என்க.

$P(x) = 2x + 6$

$P(-3) = 2(-3) + 6$

$= -6 + 6$

$P(-3) = 0$

மற்றுமொரு சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$P(x) = 4x - 12$ என்க

$x = 3$ என்க

$P(x) = 4x - 12$

$P(3) = 4(3) - 12$

$P(3) = 12 - 12 = 0$

முதல் சார்பு $x = -3$ என்னும் போது பூச்சியமாகிறது.
இரண்டாம் சார்பு $x = 3$ என்னும் போது பூச்சியமாகிறது

x-ன் எந்த மதிப்பிற்கு சார்பலன் பூச்சியமாகிறதோ
சார்பின் பூச்சியம் என்கிறோம். முதல் சார்பின் பூச்சியம்—
இரண்டாம் சார்பின் பூச்சியம் 3.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$P(x) = 3x - 15$. என்ற சார்பின் பூச்சியத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$P(x) = 3x - 15$

$P(5) = 3(5) - 15$

$= 15 - 15$

$= 0$

ஆகவே 5 என்பது சார்பின் பூச்சியமாகும்

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$P(x) = x^2 - 7x + 12$ என்ற சார்பின் பூச்சியங்களைக் காண்க

தீர்வு :

$P(x) = x^2 - 7x + 12$

$P(3) = (3)^2 - 7(3) + 12$

$= 9 - 21 + 12$

$P(3) = 21 - 21 = 0$

மேலும் $P(4) = (4)^2 - 7(4) + 12$

$= 16 - 28 + 12$

$P(4) = 28 - 28 = 0$

ஆகவே 3, 4 என்பன சார்பின் பூச்சியங்கள்

[redacted]

எடுத்துக்காட்டு—3:

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ என்ற சார்பின் பூச்சியத்தைக் காண்க

தீர்வு:

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$P(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 12(2) - 8$

$= 8 - 24 + 24 - 8$

$P(2) = 32 - 32 = 0$

ஆகவே 2 என்பது சார்பின் பூச்சியம்.

எடுத்துக்காட்டு—4:

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ என்ற சார்பின் பூஜ்யங்களைக் காண்க

தீர்வு:

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$P(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6$

$= (1) - 6 + 11(1) - 6$

$P(1) = 12 - 12 = 0$

மேலும் $P(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6$

$= 8 - 24 + 22 - 6$

$P(2) = 30 - 30 = 0$

மேலும் $P(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6$

$= 27 - 54 + 33 - 6$

$P(3) = 60 - 60 = 0$

ஆகவே 1,2,3, என்பன சார்பின் பூச்சியங்கள்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒரு ஈறுருப்புக் கோவையால் வகுத்து வரும் மீதி காணும் முறை பற்றி நாம் ஏற்கனவே அறிந்துள்ளோம். அதை இங்கு நினைவுபடுத்திக் கொள்வோம்.

$3x-5 \div x-1$

$$\begin{array}{r|l} x-1 & \dfrac{3}{3x-5} \\ & 3x-3 \\ \hline & \text{மீதி } -2 \end{array}$$

மீதி = −2

$P(x) = 3x-5$

$P(1) = 3(1)-5 = -2$

ஆகவே $P(x) = 3x-5$ என்ற கோவையை $(x-1)$ ஆல் வகுத்து வரும் மீதியும் $P(1)$ம் சமம் என்று அறிகிறோம்.

மற்றுமொரு உதாரணம் பார்ப்போம்.

$2x^2-4x+3 \div x-2$

$$\begin{array}{r|l} x-2 & \dfrac{2x}{2x^2-4x+3} \\ & 2x^2-4x \\ \hline & +3 \end{array}$$

மீதி 3

$P(x) = 2x^2-4x+3$ என்க

$P(2) = 2(2)^2-4(2)+3$

$= 8-8+3$

$= 3$

ஆகவே $P(x) = 2x^2-4x+3$ என்ற கோவையை $(x-2)$ ஆல் வகுத்து வரும் மீதியும் $P(2)$ம் சமம் என்று அறிகிறோம்.

மேலே கண்ட இரு உதாரணங்களில் இருந்து நாம் கீழ்வரும் உண்மையைப் பெறலாம்.

"$P(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-a)$ என்ற சுருறுப்புக் கோவையால் வகுத்து வரும் மீதி $P(a)$ ஆகும்." இதுவே மீதித்தேற்றம் எனப்படும்.

கிளை முடிவுகள் :

1) $P(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x+a)$ ஆல் வகுத்து வரும் மீதி $P(-a)$ ஆகும்.

2) P(x) என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை (ax+b) என்ற ஈருறுப்புக்கோவையால் வகுத்து வரும் மீதி $P\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு-1 :

$P(x) = 2x^2-3x+4$

P(x) ஐ x-4 ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு :

$P(x) = 2x^2-3x+4$ அதை [x—4] ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் மீதி P(4) ஆகும்.

$\therefore P(4) = 2(4)^2-3(4)+4$

$= 32-12+4$

மீதி $= 24$

எடுத்துக்காட்டு-2 :

$7x^5+6x^4-3x^2+2$ என்னும் கோவையை (x+1) ஆல் வகுக்க வரும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு :

$P(x) = 7x^5+6x^4-3x^3+2$. இதை (x+1) ஆல் வகுத்து வரும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு :

$P(x) = 7x^5+6x^4-3x^2+2$. இதை (x+1) ஆல் வகுத்து வரும் மீதி P(−1)

$\therefore P(-1) = 7(-1)^5+6(-1)^4-3(-1)^2+2$

$= -7+6-3+2$

$= -2$

ஆகவே மீதி —2

எடுத்துக்காட்டு— 3

x^2+ax+b என்ற கோவை (x—5); (x—3) இவற்றால் மீதியின்றி [illegible] மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$P(x) = x^2+ax+b$ என்க

$P(x)$ என்னும் கோவை $(x-5)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடுகின்றது.

$\Rightarrow$ மீதி $= 0$

$(5)^2+a(5)+b = 0$

$\Rightarrow 5a+b = -25$ ——— (1)

$P(x)$ என்னும் கோவை $(x-3)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடுகின்றது.

ஆகவே மீதி $= 0$

$P(3) \quad 0$

$(3)^2 + a(3) + b = 0$

$\Rightarrow 3a + b = -9$

(1) $= 5a + b = -25$

(2) $= 3a + b = -9$ ——— (2)

கழி $2a = -16$

$a = -8$

a ன் மதிப்பை (1)ல் பிரதியிட

$5(-8) + b = -25$

$-40 + b = -25$

$b = -25+40$

$b = 15$

ஆகவே கோவை

$P(x) = x^2 \quad 8x+15$ ஆகும்.

சுருக்கமுறை வகுத்தல் :

ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை $P(x)$ ஐ $(x-a)$ ஆல் வகுக்கும் போது வரும் மீதி (a) எனக் கண்டோம் இம் முறையில் மீதி மட்டுமே காண முடியும் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு எவ்வளவு என்று தெரியாது. ஈவு பற்றியும் தெரிந்து கொள்ள வேண்டுமென்றால் சுருக்குமுறைவகுத்தலை பயன்படுத்தி ஈவு, மீதி இவற்றைக் காணலாம். இம் முறையானது பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளால் எளிதில் விளங்கும்.

எடுத்துக்காட்டு -1 :

$2x^2+3x+5$ என்ற கோவையை x+1 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு, மீதி காண்க.

தீர்வு :

முதலில் குணகங்களை பிரித்தெழுதுவோம் (x+1)ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி (P(—1) என்பதால் —1 என்ற எண்ணை இடது புறம் எழுதுவோம்.

—1	2 + 3 + 5	
	0 − 2 − 1	
	2 1	+ 4

i) 2க்குக் கீழ் 0 என எழுதி கொண்டு கூட்டுக.

ii) வரும் விடை 2ஐ 1 ஆல் பெருக்கி +3க்குக் கீழ் எழுதிக் கூட்டுக.

iii) வரும் விடை +1ஐ (—) ஆல் பெருக்கி + 5க்குக் கீழ் எழுதிக் கூட்டுக.

கொடுக்கப்பட்ட வகுபடும் கோவையின் படி 2 வகுக்கும் கோவையின் படி 1 ஆகவே ஈவுக் கோவையின் படி (2—1) = 1 ஆகும்.

ஆகவே ஈவு 2x + 1
மீதி + 4

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$5x^3+3x+2 \div x+2$ ஈவு, மீதி காண்க.

இக்கோவையில் x^2ன் உறுப்பு இல்லையாதலால் அதன் இடத்தில் 0 போட்டுக் கொள்ள வேண்டும்.

—2	5 + 0 + 3 + 2	
	0 − 10 + 0 − 46	
	5−10+23	− 44

i) 5க்குக் கீழ் 0 என எழுதிக் கொண்டு கூட்டி வரும் விடை- 5

ii) 5 ஆல்—2 ஐப் பெருக்கி + 0 க்குக் கீழ் எழுதிக் கூட்டி வரும் விடை — 10

கொடுக்கப்பட்ட வகுபடும் கோவையின் படி 3. வகுக்கும் கோவையின் படி 1 ஆகவே ஈவுக் கோவையின் படி $3 - 1 = 2$

∴ ஈவு $5x^2 - 10x + 23$

மீதி -44

iii) -10 ஆல் 2ஐப் பெருக்கி $+3$க்கு கீழ் எழுதிக் கூட்டி வரும் விடை $+23$

iv) 23 ஆல் -2ஐப் பெருக்கி $+2$க்கு கீழ் எழுதிக் கூட்டி வரும் விடை -44

எடுத்துக்காட்டு—3 :

$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 5 \div 2x - 3$ சுருக்கு முறையில் வகுத்து ஈவு, காண்க.

தீர்வு :

வகுக்கும் கோவையாகிய $2x-3$ ஐ $2\left\{x - \frac{3}{2}\right\}$ என்று எழுதிக் கொள்ளலாம். ஆகவே $4x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ என்ற கோவையை $\left\{x - \frac{3}{2}\right\}$ என்ற கோவையால் வகுத்து வரும் மீதியே $p(x)$ ஐ $2x-3$ ஆல் வகுத்து வரும் மீதியாகும். ஆனால் வகுத்து வரும் ஈவை மாத்திரம் 2 ஆல் வகுக்க வேண்டும். அதுவே $P(x)$ஐ $(2x-3)$ ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் ஈவாகும்.

$$
\begin{array}{c|l}
\frac{3}{2} & 4 + 3 - 4 + 5 \\
 & 0 + 6 + \frac{27}{2} + \frac{57}{4} \\
\hline
 & 4 + 9 + \frac{19}{2} \;\Big|\; + \frac{77}{4}
\end{array}
$$

∴ மீதி $\frac{77}{4}$

ஈவு $= \dfrac{4x^2 + 9x + \frac{19}{2}}{2}$ ஆகும்.

$2x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{4}$ ஆகும்.

எ. கா — 4

$5x^3 - 6x^2 - 7 \div 3x - 2$ சுருக்கு முறையில் வகுத்து ஈவு, மீதி காண்க

தீர்வு :

$$
\begin{array}{c|cccc}
\frac{2}{3} & 5 & -6 & +0 & -7 \\
 & 0 & \frac{+10}{3} & \frac{-16}{9} & \frac{-32}{3} \\
\hline
 & 5 & -\frac{8}{3} & -\frac{16}{27} & \Big| -\frac{21}{27} \\
\hline
\end{array}
$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{8}{9} - \frac{16}{27} \quad - \quad \frac{22}{27}$$

$\therefore$ ஈவு $\frac{5}{3}x^2 - \frac{8}{9}x - \frac{16}{27}$

மீதி $-\frac{22}{27}$

எ. கா. — 5

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ என்ற கோவைக்கு $(x+1)$ ஒரு காரணி எனக் காட்டுக. ஈவுக் கோவையும் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோவைக்கு $(x+1)$ ஒரு காரணி என்றால் $x+1)$ ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி "0" ஈவும் காணவேண்டியிருப்பதால் சுருக்கு முறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்துவோம்

-1	1	$+3$	$+3$	$+1$
	0	-1	2	-1
	1	$+2$	$+1$	0

ஈவு (x^2+2x+1)

மீதி 0 ஆகவே $(x+1)$ ஒரு காரணி.

எ. கா—6

x^3-27 என்ற கோவைக்கு $(x-3)$ ஒரு காரணி எனக் காட்டுக. ஈவையும் காண்க.

தீர்வு :

இங்கு x^2, x உறுப்புக்கள் இல்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

3	1	$+0$	$+0$	-27
	0	$+3$	$+9$	$+27$
	1	$+3$	$+9$	-0

ஈவு $= x^2+3x+9$

மீதி $= 0$ ஆகவே $(x-3)$ ஒரு காரணி

பயிற்சி :

I பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் சார்பின் பூச்சியத்தைக் காண்க,

1) $P(x) = 10x-15$

2) $P(x) = 3x-4$

3. $P(x) = x^2-7x+10$

4) $P(x) = x^3-1$

II) மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, மீதி காண்க

1) $7x^3 - 4x^2 - 5x + 7 \div x+2$

2) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 17x + 8 \div x+1$

3) $2x^2 - 5x + 3 \div x-a$.

III x^3+x^2+mx+0 ஆனது $(x+4)$ ஆல் மீதியில்லாமல் வகுபடுமானால் m-ன் மதிப்பென்ன?

IV) x^3+mx^2+nx-3 என்ற கோவையை $(x-1)$, $(x+3)$ ஆகியவை மீதியின்றி வகுக்குமானால் m,n இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

V) (x^2+x+6) என்ற கோவை x^4+6x^2+ax+b என்ற கோவையை மீதமின்றி வகுத்தால், a,b இவற்றின் மதிப்புக் காண்க.

IV) சுருக்கு முறையில் வகுத்து ஈவு, மீதி காண்க.

1) $3x^3-x^2+4x-2 \div x-2$

2) $x^4-2x^3+5x-7+x+3$

3) $4x^3+6x^2+6x-1 \div x+2$

விடைகள் :

I (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) 2.5 (4) 1

II (1) −15 (2) 28 (3) $3a^2-5a+3$

III. $m = -10$

IV $m=3$, $n=-1$

V $a=-2$, $b=-1$

VI 1) $3x^2-x+2$: $+2$

2) x^3-x^2+3x-4 : 5

3) $2x^2+6x+6$: 10

பாடம்—21

காரணிப்படுத்துதல் வர்க்கமூலம் மீச்சிறுமடங்கு மீப்பெரு பொது வகுத்தி

சென்ற பாடத்தில் நாம் மீதித் தேற்றத்தைப் பற்றியும், தொகுமுறை வகுத்தலைப் பற்றியும் படித்தோம். இந்தப் பகுதியில் மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி மூன்று படிக்கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தும் முறை பற்றிக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

காரணிப்படுத்துக : $x^3-6x^2+11x-6$

தீர்வு :

$P(x) = x^3-6x^2+11x-6$

$P(1) = (1)^3-6(1)^2+11(1)-6$

$= 12-12=0$

$\therefore (x-1)$ ஒரு காரணி

$P(x)$ ஐ $(x-1)$ ஆல் வகுத்து ஈவு காண்போம்

$$\begin{array}{c|l|l} 1 & 1-6+11-6 & \\ & 0+1-5+6 & \\ \hline & 1-5+6 & 0 \end{array}$$

ஈவு x^2+5x+6

$x^2-5x+6 = (x+a)(x+b)$ என்க

$x^2-5x+6 = x^2+(a+b)x+ab$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த $\left.\begin{array}{l} a+b = -5 \\ ab = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -3 \\ b = -2 \end{array}$

$\therefore x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$

$\therefore P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

உதா - 2 :

காரணிப்படுத்துக x^3+3x^2-4

தீர்வு :

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$P(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 4$$

$$= (1 + 3 - 4) = 0$$

P (1) = 0 என்பதால் (x−1) ஒரு காரணி சுருக்கு முறையில் வகுத்து ஈவுக் கோவை காண்போம்.

1	1 + 3 + 0 − 4	
	0 + 1 + 4 + 4	
	1 + 4 + 4	0

ஈவு $= x^2+4x+4$

$= (x+2)^2$

$\therefore P(x) = (x-1)(x+2)^2$

உதா—3 :

காரணிப்படுத்துக $2x^3+x^2-2x-1$

தீர்வு :

$$P(x) = 2x^3+x^2-2x-1$$

$$P(1) = 2(1)^3+(1)^2-2(1)-1$$

$$= 2+1-2-1$$

$$= 3-3=0$$

$\therefore$ (x−1) ஒரு காரணி

மேலும் $P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$

$$= -2+1+2-1$$

$$= -3+3 = 0$$

$\therefore (x+1)$ ஒரு காரணி

$P(x)$ ஐ முதலில் $(x-1)$ ஆலும் $(x+1)$ ஆலும் வகுத்து வரும் மீதியைக் காண்போம்.

1.	2	+ 1	− 2	− 1	
	0	+ 2	+	+ 1	
1	2	+ 3	+ 1		0
	0	− 2	− 1		
		2	+ 1		0

ஈவு = $(2x+1)$

$\therefore P(x) = (2x+1)(x+1)(x-1)$

எ. கா—4:

$8x^3+12x^2-10x-15$ காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு:

$$P(x) = 8x^3+12x^2-10x-15$$

$$P\left(-\tfrac{3}{2}\right) = 8\left(-\tfrac{3}{2}\right)^3 + 12\left(-\tfrac{3}{2}\right)^2 - 10\left(-\tfrac{3}{2}\right) - 15$$

$$= -\frac{8\times 27}{8} + 12 \times \frac{9}{4} + \frac{10\times 3}{2} - 15$$

$$= -27 + 27 + 15 - 15 = 0$$

$\therefore 2x+3$ ஒரு காரணி சுருக்கு வகு முறையில் வகுத்து காண்போம்.

$$\frac{-3}{2}\ \Big|\ 8+12-10-15$$
$$0-12+0+15$$
$$8+0-10\ \Big|\ 0$$
$$2$$
$$4+0-5$$

ஈவு $4x^2-5$

$\therefore\ P(x) = (4x^2-5)(2x+3)$

எடுத்துக்காட்டு—5 :

$12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$ காரணிப்படுத்துக

தீர்வு :

$$P(x) = 12x^3-16x^2+7x-1$$

$$P(\tfrac{1}{3}) = 12(\tfrac{1}{3})^3-16(\tfrac{1}{3})^2+7(\tfrac{1}{3})-1$$

$$= \frac{12}{27} - \frac{16}{9} + \frac{7}{3} - 1$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{16}{9} + \frac{7}{3} - 1$$

$$= \frac{4-16+21-9}{9} = 0$$

$\therefore\ (3x-1)$ ஒரு காரணி

தொகுமுறையில் வகுத்து ஈவு காண்போம்.

$$\tfrac{1}{3}\ \Big|\ 12-16+7-1$$
$$0+4-4+1$$
$$12-12+3\ \Big|\ 0$$
$$3$$
$$4-4+1$$

எனவே $4x^2-4x+1 = (2x-1)(2x-1)$

$= (2x-1)^2$

$\therefore p(x) = (2x-1)^2 (3x-1)$

வர்க்கமூலம் :

எண்களில் வர்க்கமூலம் காணும் முறைப்பற்றி ஏற்கனவே படித்துள்ளோம். அது போலவே பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கும் வர்க்கமூலம் காணலாம். ஒருறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காணும் முறையைப் பற்றி முதலில் காணலாம். வர்க்கமூலம் எடுப்பது என்ற செயலைக் குறிக்க $\sqrt{\ }$ என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்தினோம். 16ன் வர்க்க மூலம் என்பதை $\sqrt{16}$ என்று எழுதினோம். இதையே (16^2) என்றும் எழுதலாம் என்பதும் நமக்குத் தெரியும்

i) ஒருறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காணுதல்

ii) முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்துதல்

எடுத்துக்காட்டு—1 :

$81\ x^8$ன் வர்க்க மூலம் காண்க.

தீர்வு :

$$\sqrt{81\ x^8} = (81\ x^8)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (9^2\ x^8)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 9x^4$$

எடுத்துக்காட்டு—1 :

$\sqrt{22^{10}\ y^3\ z^{12}}$ காண்க.

தீர்வு :

$$\sqrt{225x^{10}\ y^2\ z^{12}} = (15^2\ x^{10}\ y^6\ z^{12})^{\frac{1}{2}}$$

$a^2+2ab+b^2$ ன் வர்க்கமூலம் காண்க

தீர்வு :

$$(a^2+2ab+b^2)^{\frac{1}{2}} = [(a+b)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= (a+b)$$

எடுத்துக்காட்டு - 4

$x^4+2x^2y^2+y^4$ன் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு :

$$= [(x^2+y^2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$(x^4+2x^2y^2+y^4)^{\frac{1}{2}} = (x^2+y^2)$$

எடுத்துக்காட்டு—5 :

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ன் வர்க்கமூலம் காண்க :

தீர்வு :

$$(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+3ca)^{\frac{1}{2}} = [(a+b+c)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= (a+b+c)$$

காரணிப்படுத்துதல் முறை :

எடுத்துக்காட்டு - 6 :

$(x^2-5x+6)(x^2-4x+3)(x^2-3x+2)$ன் வர்க்க மூலம் காண்க.

தீர்வு :

முதலில் ஒவ்வொரு கோவையாகக் காரணிப்படுத்திக் கொள்வோம்.

i) $x^2-5x+6 = x^2-3x-2x+6$
$= x(x-3)-2(x-3)$
$= (x-3)(x-2)$

ii) $x^2-4x+3 = x^2-3x-x+3$
$= x(x-3)-1(x-3)$
$= (x-3)(x-1)$

iii) $x^2-3x+2 = x^2-2x-x+2$
$= x(x-2)-1(x-2)$
$= (x-2)(x-1)$

$\therefore (x^2-5x+6)\ (x^2-4x+3)\ (x^2-3x+2)$

$= (x-3)\ (x-2)\ (x-3)\ (x-1)\ (x-2)\ (x-1)$

$= (x-3)^2\ (x-2)^2\ (x-1)^2$

$\therefore$ வர்க்கமூலம் $= [(x-3)^2\ (x-2)^2\ (x-1)^2]^{\frac{1}{2}}$

$= (x-3)\ (x-2)\ (x-1)$

எடுத்துக்காட்டு—7 :

$(x^2-x-6)\ (x^2-9)\ (x^2+5x+6)$ன் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு :

i) $x^2-x-6 = x^2-3x+2x-6$

$= x(x-3) + 2\ (x-3)$

$= (x-3)\ (x+2)$

ii) $x^2-9 = x^2-3^2$

$= (x+3)\ (x-3)$

iii) $x^2+5x+6 = x^2+3x+2x+6$

$= x(x+3) + 2\ (x+3)$

$= (x+3)\ (x+2)$

$x^2-x-6)\ (x^2-9)\ (x^2+5x+5)$

$= (x-3)\ (x+2)\ (x+3)\ (x-3)\ (x+3)\ (x+2)$

$= (x-3)^2\ (x+2)^2\ (x+3)^2$

$\therefore$ வர்க்கமூலம் $= [(x-3)^2\ (x+2)^2\ (x+2)^2]^{\frac{1}{2}}$

$= (x+3)\ (x+2)\ (x+3)$

எளிதில் காரணிப்படுத்த முடியாத பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்க மூலத்தை வகுத்தல் முறையில் காணலாம். வகுத்தல் முறையில் வர்க்க மூலம் காணும் முறைபற்றி காணுவோம்.

முதலில் வர்க்கமூலம் காணவேண்டிய கோவையில் படிகள் இறங்கு வரிசை ஏறுவரிசையில் அமைந்திருக்கின்றனவா எனப் பார்க்கவேண்டும் அப்படி அமையாவிட்டால் படிகள் இறங்குவரிசை ஏறுவரிசையில் அமையுமாறு மாற்றி எழுதிக் கொள்ள வேண்டும். பிறகு கோவையின் முதல் உறுப்பின் வர்க்க மூலத்தைக் காணவேண்டும். பிறகு இரண்டு உறுப்புகளை இறக்கிக்கொண்டு, தொடர்ந்து செய்யவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.

$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ ன் வர்க்க மூலம் காண்க :

தீர்வு :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 1 \\
\hline
x^2 & x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2 + x & 2x^3 + 3x^2 \\
 & 2x^3 + x^2 \\
\hline
2x^2 + 2x + 1 & + 2x^2 + 2x + 1 \\
 & + 2x^2 + 2x + 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

வர்க்க மூலம் $(x^2 + x + 1)$

முறை :

கொடுக்கப்பட்ட கோவையின் முதல் உறுப்பு x^4 இதன் வர்க்க மூலம் $x^2 \times x^2 = x^4$ என்று எழுத வேண்டும்.

i) இரண்டாவது நிலையாக இரண்டு உறுப்புக்களை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். $(x^3 + 3x^2)$ முதலில் கண்ட வர்க்கமூலமான x^2 ஐ 2 ஆல் பெருக்கி இடது புறம் எழுதிக் கொள்ள வேண்டும். முதல் உறுப்பான $2x^3$ ஐ $2x^2$ ஆல் வகுத்து வரும் ஈவு x ஐ x^2ன பக்கத்திலும், $2x^2$ ன் பக்கத்திலும எழுதிக் கொள்ள வேண்டும் $x(2x^2 + x) = 2x^3 + x^2$ $(2x^3 + 3x^2)$ லிருந்து $2x^3 + x^3$ க் கழிக்க கிடைப்பது $2x^2$

ii) $2x^2$ உடன் மீதி உள்ள இரண்டு உறுப்புகளான $+ 2x + 1$ இவைகளையும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். வர்க்க மூல உறுப்புக்களான $(x^2 + x)$ ஐ 2 ஆல் பெருக்க வேண்டும். $(2x^2 + 2x)$ இதை இடது

புறத்தில் எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். முதல் உறுப்பான $2x^2$ ஐ $2x^2$ ஆல் வகுத்துவரும் ஈவு 1 ஐ $x^2 + x$ பக்கத்திலும்' $2x^2 + 2x$ பக்கத்திலும் எழுதிக் கொள்ள வேண்டும்.

$1 \; (2x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 2x + 1$ மீதம் கிடைப்பது 0

iv) ஆகவே வர்க்க மூலம் $(x^2 + x + 1)$

எடுத்துக்காட்டு—2 :

வர்க்க மூலம் காண்க :-

$9x^4 - 18x^3 + 33x^2 - 24x + 16$

தீர்வு :

	$3x^2 - 3x + 4$
$3x^2$	$9x^4 - 18^3 + 33x^2 - 24x + 16$
	$9x^4$
$6x^2 - 3x$	$-18x^3 + 33x^2$
	$-18x^3 + 9x^2$
$6x^2 - 6x + 4$	$+24x^2 - 24x + 16$
	$+24x^2 - 24x + 16$
	0

ஆகவே வர்க்க மூலம் $(3x^2 - 3x + 4)$

பயிற்சி :

1. காரணிப்படுத்துக :

   1) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
   2) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
   3) $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$
   4) $12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$
   5) $x^3 - 6x^2 - x + 6$
   6) $x^3 - 7x - 6$

II. கீழ்வரும் கோவை வர்க்கமூலம் காண்க.

1. $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 3x + 2)$

2. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1$

3. $9x^6 - 12x^5 + 4x^4 - 24x^3 + 16x^2 + 16$

4. $4x^4 - 20x^3 + 29x^2 - 10x + 1$

விடைகள் :

I. 1. $(x+1)(x+2)(x+3)$

2. $(x+1)(x-1)(x+2)$

3. $(x+2)(x+3)(x+4)$

4. $(2x-1)(2x+1)(3x-1)$

5. $(x+1)(x-1)(x-6)$

6. $(x+1)(x+2)(x-3)$

II. 1. $(x+3)(x+2)(x+1)$

2. $x^2 \quad 2x-1$

3. $4x^3-2x^2-4$

4. $(2x^2-5x+1)$

பாடம்—22

வடிவியல்

வடிவங்களைப் பற்றியும் அவற்றின் தன்மைகளையும் அறிய உதவும் கணிதப் பகுதி வடிவியல் என்று நாம் அறிவோம்.

முன்பு நாம், கோணம் என்பது இரு பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள தொலைவு என்றும். கோணத்தை டிகிரியில் அளந்து கணக்கிடுகின்றோம் என்றும் கண்டோம்.

கோணத்தை அளக்க பாகைமானியை எவ்வாறு பயன்படுத்துவது என்று நமக்கு தெரியும்.

இனி, இங்கு கோணங்களைப் பற்றி மேலும் கற்போம்.

கோணச் சோடிகள் :

ஒரு புயத்தைப் பொதுவாகக் கொண்டு இரு கோணங்கள் அமைந்தால் அவற்றைக் கோணச் சோடி என்கிறோம்.

OB பொது புயம்,

$\hat{AOB}$, $\hat{BOC}$

கோட்டுச் கோணச் சோடிகள் (Linear pair)

பொதுவற்ற புயங்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்தால் அவை கோட்டுக் கோணச் சோடி எனப்படும்.

மிகை நிரப்புக் கோணங்கள் (Supplementary Angles)

இரு கோணங்களின் அளவுகளின் கூட்டுத் தொகை 180^0 ஆனால் அவ்விரு கோணங்களையும் மிகை நிரப்புக் கோணங்கள் என்போம் ஒவ்வொரு கோணத்தையும் மற்றதன் "மிகை நிரப்பி" என்போம்.

இரு கோணங்களும் எங்கு வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம். இரு கோணங்களும் கோணச் சோடிகளாகவும்; இருக்கலாம்.

இரு கோணங்களும் கோணச் சோடிகளாகவும் இருக்கலாம்

கோணம் 110°ன் மிகை நிரப்புக் கோணம் 70°

80°ன் மிகை நிரப்புக் கோணம் 110°

113°ன் மிகை நிரப்புக் கோணம் 67°

நிரப்புக் கோணங்கள்

இரண்டு கோணங்களின் அளவுகளின் கூட்டுத் தொகை 90° ஆனால் அவ்விரு கோணங்களையும் நிரப்புக் கோணங்கள் என்போம் ஒவ்வொரு கோணமும் மற்றதன் நிரப்பு ஆகும்.

கோணம் 65°ன் நிரப்பு கோணம் 25°

கோணம் 40°ன் நிரப்புக் கோணம் 50°

மாதிரி கணக்குகள் :

1) 65ன் மிகை நிரப்பு கோணம் என்ன?

ஒரு கோணம் மற்றதன் மிகை நிரப்பு என்றால் அவ்விரு கோண அளவுகளின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

அதாவது

65° + மிகை நிரப்புக் கோணம் = 180°

மிகை நிரப்புக் கோணம் = 180°—65°

= 115°

அதாவது மிகை நிரப்புக் கோணம் காண கொடுக்கப்பட்ட கோண அளவை 180°லிருந்து கழித்து எழுதக் கிடைக்கும்.

2) 124°ன் மிகை நிரப்பு என்ன?

124° மிகை நிரப்பு = 180°—124° = 56° ஆகும்.

124° மிகை நிரப்புக் கோணம் 56° ஆகும்.

3) இரு மிகை நிரப்புக் கோணங்களில் ஒன்றின் அளவு மற்றதைவிட 50° அதிகம் எனில் ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவென்ன?

ஒரு கோண அளவு = x° எனக் கொள்வோம்.

x°ன் மிகை நிரப்பு இதைவிட 50° அதிகம் எனில்

x° மிகை நிரப்பி = x + 50° ஆகும்.

இவைகள் ஒன்றுக்கொன்று மிகை நிரப்புக

எனவே, இவைகளின் கூடுதல் = 180°

$$\therefore x^\circ + (x + 50^\circ) = 180^\circ$$

$$x^\circ + x^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$2x + 50^\circ = 180^\circ$$

$$2x^\circ = 180^\circ - 50^\circ$$

$$2x = 130^\circ$$

$$x = \frac{130}{2} = 65^\circ$$

x என்பது ஒரு கோண அளவு = 65°

2வது கோணம் முதல் கோணத்தை விட 50° அதிகம்

எனவே இரண்டாவது கோணம் = 65° + 50° = 115°

இவை ஒன்றுக்கொன்று மிகை நிரப்பு

எனவ 65° + 115° = 180°

4. இரு மிகை நிரப்புக் கோணங்களில் ஒன்றின் அளவு மற்றதைப் போல் இரு மடங்கு எனில் ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவும் என்ன?

ஒரு கோணத்தின் அளவு = a^{0} எனக் கொள்வோம்

எனவே இரண்டாவது கோணத்தின் அளவு $= 2 \times a^{0}$

$= 2a^{0}$

இவை இரண்டும் மிகை நிரப்புக் கோணங்கள்

ஆகவே $a^{o} + 2a^{o} = 180^{o}$

$$3a = 180^{o}$$

$$a = \frac{180^{o}}{3} = 60^{o}$$

எனவே, இரண்டாவது கோணத்தின் அளவு $= 2 \times a$

$= 2 \times 60^{o}$

$= 120^{o}$

அவ்விரு கோணங்களும் முறையே 60^{o}, 120^{o} ஆகும்.

5. 37^{o} ன் நிரப்பு கோணம் என்ன?

இரு கோண அளவுகளின் கூடுதல் 90^{0} ஆனால் அவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்பு கோணங்களாகும்.

எனவே நிரப்பு கோணம் காண கொடுக்கப்பட்ட கோண அளவை 90^{0} யிலிருந்து கழித்து எழுதக் கிடைக்கும்.

37^{0} நிரப்பு கோணம் $= 90^{0} - 37^{0}$

$= 53^{0}$ ஆகும்.

6. இரு நிரப்பு கோணங்களின் இரண்டு கோணங்களும் சமம் என்றால் ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவு என்ன?

ஓர் கோணமும் + அதன் நிரப்பும் சேர்ந்து = 90^0 சமம்.

ஆனால், இங்கு கோணமும், அதன் நிரப்பும் சமம் என்று கூறப்பட்டுள்ளது.

எனவே கோணம் m^0 எனில் அதன் நிரப்பும் m^0 ஆகும்.

$$\therefore m^0 + m^0 = 90^0$$

$$2m^0 = 90^0$$

$$m = \frac{90^0}{2} = 45^0$$

எனவே, ஒவ்வொரு கோணமும் 45^0

7. இரு நிரப்பு கோணங்களில் ஒன்று மற்றதைவிட 40^0 குறைவு என்றால் ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவென்ன?

முதல் கோணத்தின் அளவு = x^0 என்க.

எனவே மற்றொரு கோணத்தின் அளவு = $x^0 - 40^0$

இவை இரண்டும் நிரப்பு கோணங்களானால்

$$x^0 + (x - 40^0) = 90^0$$

$$x + x^0 - 40 = 90^0$$

$$2x = 90^\circ + 0^\circ$$

$$2x = 130^\circ$$

$$x = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

முதல் கோணத்தின் அளவு 65° எனில்

இரண்டாவது கோணத்தின் அளவு $= 65^\circ - 40^\circ$

$= 25^\circ$

இவை இரண்டும் நிரப்பு கோணங்கள்

$$65^\circ + 25^\circ = 90^\circ$$

பயிற்சி

1. இரு மிகை நிரப்புக் கோணங்களில் ஒன்று மற்றதை விட 30° குறைவானால் ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவென்ன?

2) இரு மிகை நிரப்பு கோணங்களின் a° எனில் மற்றதன் அளவென்ன?

3) இரு மிகை நிரப்பு கோணங்களின் ஒன்றின் அளவு மற்றதைப்போல் 3 மடங்கு எனில் ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவென்ன?

4) 90°—x°ன் நிரப்பு கோணம் என்ன?

5) ஒரு நிரப்பு கோணங்களில் ஒன்று மற்றொன்றைக் காட்டிலும் 20 அதிகம் என்றால் சிறிய கோணத்தின் அளவென்ன?

விடைகள்

(1) 75 105 (2) 180−a° (3) 45°, 135° (4) x° (5) 125°

அடுத்துள்ள கோணங்கள் (Adjacent angles)

மூன்று நேர்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால் இரண்டு கோணங்கள் அப்புள்ளியில் உண்டாகின்றன. ஒரு நேர்கோடு இரு கோணங்களுக்கும் பொதுவான புயமாக அமைகிறது. இவ்வாறு ஒரு பொதுவான புயத்தையும் பொதுவான உச்சியையும் கொண்ட கோணங்கள் அடுத்துள்ள கோணங்கள் ஆகும்.

பொதுவல்லாத புயங்கள் கோணங்களின் வெளிப்புறமாக அமைந்துள்ளதால் அவை வெளிப்புற புயங்கள் எனப்படும்.

O பொதுவான உச்சி

OA பொது புயம்

OB, OC வெளிப்புற புயங்கள்.

$\hat{OCA}$, $\hat{AOB}$ அடுத்துள்ள கோணங்கள்

இரு அடுத்துள்ள கோணங்கள் மிகை நிரப்பு கோணங்களானால் அவற்றின் வெளிப்புயங்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும்.

ஒரு நேர்கோட்டின் மீது மற்றொரு நேர்கோடு நிற்பதால் ஏற்படும் இரண்டு அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° அல்லது இரண்டு செங்கோணங்களுக்குச் சமம்.

குத்தெதிர் கோணங்கள்

AB, CD என்ற இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று O என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும்போது படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் நான்கு கோணங்கள் உண்டாகின்றன.

$\hat{AOC}$, $\hat{BOD}$, $\hat{AOD}$ என்ற கோணங்கள் உண்டாகின்றன.

$\hat{AOC}$யும் $\hat{BOD}$யும் ஒன்றுக்கொன்று எதிராக உள்ளன. இவை குத்தெதிர் கோணங்கள் எனப்படும்.

இது போலவே $\hat{BOC}$யும் $\hat{AOD}$யும் குத்தெதிர் கோணங்களாகும். இவ்வாறு பல படங்கள் வரைந்து குத்தெதிர் கோணங்களை அளந்து பார்த்தால் நமக்கு ஓர் உண்மை தெரிய வருகின்றது.

அதாவது இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்வதால் ஏற்படும் குத்தெதிர் கோணங்கள் சமம்.

முன் பக்கத்தில் காட்டியுள்ள படத்தில் $\hat{BOD} = 50^\circ$ எனில் $\hat{AOC}$, $\hat{AOD}$, $\hat{BOC}$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

ABயும் CDயும் Oவில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. எனவே $\hat{AOC}$ யும் $\hat{BOD}$யும் குத்தெதிர் கோணங்கள் போன்றே $\hat{AOD}$யும் $\hat{COB}$யும் குத்தெதிர் கோணங்கள்.

குத்தெதிர் கோணங்கள் சமம்

எனவே $\angle AOC = \angle BOD$

$\angle AOD = \angle COD$

$\angle BOD = 50^\circ$ ஆகவே $\angle AOC = 50^\circ$

CC பொதுமையும், OA, OB வெளிப்புயங்கள்.

$\angle BOC$யும் $\angle COA$யும் அடுத்துள்ள கோணங்கள்.

வெளிப்புயங்கள் நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளதால் இரு அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

அதாவது $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$

$\angle AOC = 50^\circ$

$50^\circ + \angle COB = 180$

$\angle COB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

∟CODயும் ∟AODயும் குத்தெதிர் கோணங்கள்.

குத்தெதிர் கோணங்கள் சமம்.

ஆகவே ∟COB = AOD—130°

மேலே உள்ள படத்தில் ∟COE = 50° ∟BOE = 40° எனில் பின் வருவனவற்றைக் கவனி.

(1) $\hat{BOC}$

(2) $\hat{AOD}$

(3) $\hat{BOD}$

(4) $\hat{COA}$

∟BOC = ∟COE + ∟BOE

∟BOC = 50°+40°=90°

AB, CD கதிர்கள் Oல் வெட்டிக் கொள்வதால்

∟BOC = ∟AOD குத்தெதிர் கோணம்

∟BOD = ∟AOC குத்தெதிர் கோணம்

∟BOC = 90° எனவே ∟AOD = 90°

∟COA, ∟AOD அடுத்துள்ள கோணங்கள்.

∟COA + ∟AOD = 180°

∟COA = 90° = 180°

∟COA = 180°—90° = 90°

∟COA = ∟BOD = 90° குத்தெதிர் கோணங்க.

1) மேலே உள்ள படத்தில் 3 கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

t = 60°

f 75° எனில் a, c, d, e இவற்றின் மதிப்பைக் காண்க

b − c = 60° குத்தெதிர்கோணம்

b e = 75° குத்தெதிர்கோணம்

a + b + f = 180° கோட்டுக் கோணச் சோடி.

a + 75 + 60 = 180°   a = 180° − 135° = 45°

a = d = 45°

பயிற்சி

1. கோட்டுக் கோணச் சோடி ஒன்றில் ஒரு கோணம் விரிகோணம் எனில் மற்றொரு கோணம் என்னவாக இருக்கும்?

2. கோட்டுக் கோணச் சோடி ஒன்றில் கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் எனில், கோண அளவுகள் யாவை?

3. அடுத்த பக்கத்திலுள்ள படத்தில் ADB நேர்கோடு எனில் p, q, r இவைகளின் மொத்த மதிப்பு என்ன?

விடைகள்

1) 60° (ii) 40° (iii) 30°, 6 °. (iv) 35°
2) குறுங்கோணம் 3) 90°, 90° 4) p + q + r = 180°
5) a = 60° 6) l = 110°
b = 120° m = 140°
c = 60° n = 30°
p = 110°

ஒருபோக்கு நேர்கோடுகள் அல்லது இணைகோடுகள்
(Paralell straight lines)

சமபக்கத்தில் எவ்வளவு தூரம் நீட்டினாலும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாத நேர்கோடுகளை ஒரு போக்கு நேர்கோடுகள் அல்லது இணைகோடுகள் என்கிறோம்.

சன்னலின் கம்பிகள், இரயில் தண்டவாளங்கள், மின்சாரக் கம்பங்களிலிருந்து புறப்பட்டுச் செல்லும் கம்பிகள் போன்றவை இணை கோடுகளுக்கு உதாரணங்களாகக் கூறலாம். இணைகோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள தூரங்கள் சமம்,

AB, CD என்ற இணைகோடுகளை வரைக. இவ்விரு இணைகோடுகளையும் வெட்டுமாறு EF என்ற வெட்டுக் கோடு வரைக. அது ABயை Gயிலும் CDயை Hயிலும் வெட்டட்டும்.

EF, குறுக்குவெட்டு எனப்படும்.

1,2,7,8 என்ற கோணங்கள் இணைகோடுகளுக்கு வெளியே அமைந்துள்ளன. அவைகளை வெளிக் கோணங்கள் (Exterior angles) என்பர்.

3,4,5,6, என்ற கோணங்கள் இணைகோடுகளுக்கு உட்புறமாக அமைந்துள்ளன அவைகளை உட்கோணங்கள் (Interior angles) என்பர்.

படத்தில் 1,2; 2,3; 3,4; 4,1; அடுத்துள்ள கோணங்கள்.

இதேபோன்று 5,6; 6,7; 7,8; 8,5; அடுத்துள்ள கோணங்கள்

1,3; 2,4; 5,7; 6,8; இந்த ஜோடிக் கோணங்கள் குத்தெதிர் கோணங்கள் என்பதும் நமக்குத் தெரியும்.

ஒத்த கோணங்கள் (Corresponding angles)

படத்தில் 2,6 என்ற கோணங்கள் இணைகோடுகளுக்கு மேலேயும் குறுக்குவெட்டியின் ஒரே புறத்திலும் அமைந்துள்ளன. இவ்வாறு இருவகைகளில் ஒத்திருப்பதால் இவைகளை ஒத்த கோணங்கள் என்கிறோம். மேற்கண்ட சோதனையிலிருந்து நாம் பின்வரும் உண்மையினை அறியலாம்

ஒரே நேர்கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாகும்.

$\hat{b}$யும் 110° குத்தெதிர் கோணங்கள்

எனவே $\hat{b} = 110°$

$\hat{a}$ $\hat{b}$ அடுத்துள்ள கோணங்கள்

$\hat{a} + \hat{b} = 180°$

$\hat{a} = 180 - 110° = 70°$

$\hat{b}$யும் $\hat{x}$ ஒத்த கோணங்கள் $\hat{b} = \hat{x} = 70°$

$\angle BOE + \angle GEF + \angle CEF = 180°$

$60° + x° + 75° = 180°$

$x = 180° - (75° + 60°)$

$= 180° - 135°$

$x = 45°$

a, b, c, இவைகளின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$65° + b + 50° = 180°$

$b = 180° - (65 + 50)$

$D = 180° - 115°$

$b = 65°$

$\hat{a} = \hat{b} = 65°$ ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்

முன்பு நடத்திய சோதனையில் இணைகோடுகள் வரையாமல் ஏதாவது இரு நேர்கோடுகள் வரைந்து அதனை ஒரு குறுக்கு வெட்டி வெட்டும் போது உண்டாகும் கோணங்களை பார்.

முன்பக்கத்தில் கண்ட படத்தில் உள்ள

1,2,5,6, கோணங்களை அவ

இதுபோல 3,4,5,6 கோணங்களை அள

இவை சமமல்ல.

அதாவது ஒத்த கோணங்கள் சமமில்லை

ஒன்று விட்ட கோணங்கள் சமமில்லை.

குறுக்குவெட்டியின் ஒரே புறத்தில் உள்ள இரு உட்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° அல்ல என்று அறிகிறோம்

மேற்கண்ட சோதனையிலிருந்து நாம் பின்வரும் உண்மையினை அறிகின்றோம்.

இரண்டு நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டும்பொழுது உண்டாகும்.

ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமமானால்

ஒத்த கோணங்கள் சமமானால்

குறுக்கு வெட்டியின் ஒரே புறத்தில் உள்ள இரு உட்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆனால் அந்த நேர்கோடுகள் இரண்டும் இணை நேர்கோடுகளாகும்.

சோதனை

ஒன்றுக்கொன்று இணையாக உள்ள மூன்று இணைகோடுகள் வரைக. அம்மூன்று இணைகோடுகளையும் வெட்டுமாறு ஒரு குறுக்கு வெட்டி வரைக. அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் அள,

இவை போன்று 1, 5

3, 7

4, 8 என்ற கோணங்கள் ஒத்த கோணங்களாகும்.

ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் (Alternate angle)

3,5 என்ற கோணங்கள் குறுக்கு வெட்டிக்கு ஒன்று ஒரு புறமும் மற்றொன்று மறுபுறமும் அமைந்துள்ளன. இவ்வாறு ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்று மாறுபட்டுள்ளதால் அவை ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் எனப்படும்.

சோதனை

பல்வேறு இணைகோடுகள் வரைந்து அவற்றை குறுக்குவெட்டி வெட்டும் போது உண்டாகும் எட்டு கோணங்களையும் சேகரித்துப் பார்ப்போம்

$\angle 1 = \angle 5$ சம அளவுள்ளன

$\angle 2 = \angle 6$

$\angle 3 = \angle 7$

$\angle 4 = \angle 8$

அதாவது ஒத்த கோணங்களின் அளவுகள் சமம்.

$\angle 4 = \angle 6$ சமம். அதாவது ஒன்றுவிட்ட கோணங்களின்

$\angle 3 = \angle 5$ அளவுகள் சமம்.

மேலும் $\angle 4$, $\angle 5$ இவைகளின் கூடுதல் 180°

$\angle$, $\angle 6$ இவைகளின் கூடுதல் 180°

அதாவது குறுக்குவெட்டியின் ஒரே புறத்திலுள்ள உட்கோணங்கள் மிகை நிரப்புக் கோணங்கள்,

மேற்கண்ட சோதனையிலிருந்து நாம் பின்வரும் உண்மைகளை அறிகின்றோம்.

) இரண்டு இணை கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டும் போது உண்டாகும்.

(i) ஒத்த கோணங்கள் சமம்.

(ii) ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்.

(iii) குறுக்கு வெட்டியின் ஒரே பக்கத்திலுள்ள இரண்டு உட்-கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^0

1) ஒரு சோடி இணை கோடுகளை ஒரு குறுக்கு வெட்டி வெட்டுவதால் ஏற்படும் ஒத்த கோணங்கள் எவ்வாறு இருக்கும்?

2) ஒரு சோடி இணைகோடுகளை ஒரு குறுக்கு வெட்டி வெட்டுவதால் ஏற்படும் குறுக்கு வெட்டியின் ஒரே பக்கத்திலுள்ள இரண்டு உட், கோணங்களின் கூடுதல் என்ன?

விடைகள்

1) சர்வசமம் (2) 180^0 (4) இணைகோடுகள் அல்ல. ஏனெனில் ஒத்த-கோணங்கள் சமமில்லை

(5) $z = 55$; $y = 40$; $p = x\ 85^0$

(6) $b = 45^0 \therefore a = (180^0 - b) = (180^0 - 45^0) = 135^0$

(7) இரண்டு கோடுகள் இணை கோடுகளா என்று அறிய உதவும் சோதனைகளைக் கூறுக.

(1) ஒரு சோடி ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமமாயிருக்க வேண்டும்.

(2) ஒரு சோடி ஒத்த கோணங்கள் ச ுமாயிருக்க வேண்டும்.

(3) குறுக்கு வெட்டியின் ஒரே பக்கத்திலுள்ள இரண்டு உட்கோணங்கள் கூடுதல் மிகை நிரப்புக் கோணங்களாய் இருக்க வேண்டும்.

AB, CD இணை கோடுகளாகும்

ஏனெனில் குறுக்கு வெட்டியின் ஒரே பக்கத்திலுள்ள இரண்டு உட்கோணங்களின் கூடுதல் 180° சமம்.

$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

சர்வசம முக்கோணங்கள்

முக்கோணங்களைப் பற்றி நாம் அறிந்த உண்மைகளை நினைவு படுத்திக்கொள்வோம்.

முக்கோணங்களை, பக்கங்களை அடிப்படையாகக்கொண்டு அசம பக்க முக்கோணம், இரு சமபக்க முக்கோணம், சமபக்க முக்கோணம் என்று மூன்று வகையாகவும், கோணங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு குறுங்கோண முக்கோணம், செங்கோண முக்கோணம், விரிகோண முக்கோணம் என்று மூன்று வகையாகவும், மொத்தம் ஆறு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

செய்முறை வடிவியல் மூலம் நாம் பலவகை முக்கோணங்களையும் வரைந்து, அவற்றிலிருந்து ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று முக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 2 செங்கோணங்கள் அல்லது 180° எனக் கண்டோம்.

இதற்கு முந்திய பகுதியில் நாம் கற்ற ஒத்த கோணங்கள், ஒன்று விட்ட கோணங்கள் போன்ற உண்மைகள் மூலம் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று முக்கோணங்களின் கூடுதல் 180° என்பதை நிரூபிக்கலாம்.

$\hat{XAB} = \hat{ABC}$ ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்

$\hat{YAC}$ $\hat{ACB}$

$$\angle ABCB + \angle ABC + \angle BAC = \angle YAC + \angle XAB + \angle BAC = 180^\circ$$

இனி முக்கோணங்களின் வெளிக்கோணம், உட்கோணம் என்பவைகளைப் பற்றி காண்போம்.

முக்கோணம் ABCல் BCயை Dக்கு நீட்டுக. இப்போது ∠ACD என்ற கோணம் ஏற்படுகிறது அல்லவா? இதற்கு Cயின் வெளிக்கோணம் (Exterior angle) என்று பெயர்

. ∠Aயையும், ∠Bயையும் இவ்வெளிக் கோணத்திற்கு உள் எதிர் கோணங்கள் (Interior opposite angeles) என்று கூறுவர்.

இவ்வாறு பல முக்கோணங்கள் வரைந்து அதன் பக்கங்களை நீட்சி செய்து, வெளிக் கோணங்களையும் அவற்றின் உள் எதிர் கோணங்களின் அளவுகளையும் அளந்து பார்க்கவும், அவ்வாறு அளந்து அட்டவணைப் படுத்தும்போது நாம் ஓர் உண்மையை அறிகிறோம்.

அதாவது, ஒரு முக்கோணமானது ஒரு பக்கத்தை நீட்டும்போது உண்டாகும் வெளிக்கோணமானது அதன் உள் எதிர் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாயிருப்பதை நாம் அறிகின்றோம்.

மேலும், நாம் வரைந்த பல முக்கோணங்களிலிருந்து பெரிய கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் பெரியதாகவும், சிறிய கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் சிறியதாகவும் இருப்பதையும் காண்கிறோம்.

இனி முக்கோணங்களின் சர்வ சமத்தைப் பற்றி காண்கிறோம்.

ஒரே நீளமுள்ள கோட்டுத் துண்டுகள் ஒன்றுக்கொன்று சர்வசமம் என்று அறிவோம்.

சம அளவுள்ள இரு கோணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சர்வசமம் என்பது அறிவோம்.

ஒரு வடிவம், மற்றொன்றின் மீது முற்றிலும் பொருந்துதல் என்பது அவ்விரு வடிவங்கள் சர்வசமமா என்பதாகும்.

உதாரணமாக இரு 10 பைசா நாணயங்கள்.

இரு ஒரு ரூபாய் நாணயங்களும் இவை ஒத்த வடிவங்களை உடையனவாகும்.

இதுபோன்று இரு முக்கோணங்களை ஒன்றின் மீது ஒன்றை முற்றிலும் பொருந்தும்படி வைக்க முடியுமானால் அவை சர்வசமம் உடையன என்கிறோம். இவ்வாறு ஒன்றின் மீது மற்றொன்றைப் பொருத்தும்போது ஒன்றின் 3 பக்கங்களும் மற்றதின் ஒத்த பக்கங்களோடும் ஒன்றின் 3 கோணங்கள் மற்றதின் ஒத்த கோணங்களோடும் முற்றிலும் பொருந்தும்.

ஒத்த பக்கங்கள் என்பன முக்கோணத்தில் சமகோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களாகும்.

ஒத்த கோணங்கள் என்பன சமபக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்களாகும்.

படத்திலுள்ள இரு கோணங்களில்

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$ ஒத்த கோணங்களாகும்.

BC, EF; CA, DF; AB, DE ஒத்த பக்கங்களாகும்.

வடிவங்களின் சர்வசமத்திற்கு வடிவ ஒற்றுமை மட்டும் இருந்தால் போதாது அளவுகளும் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

பல முக்கோணங்கள் வரைந்து, அவற்றுள் சர்வசம முக்கோணங்களின், பக்க அளவுகளையும் கோண அளவுகளையும் அட்டவணைப் படுத்திப் பார்த்தால் பின் வரும் உண்மைகள் நமக்குத் தெரிய வருகின்றன.

1. இரு முக்கோணங்களில் ஒன்றின் ஏதேனும் இருபக்கங்களும் அவற்றிற்கு இடையில் உள்ள கோணமும் தனித்தனியே மற்றதின் இரு பக்கங்களுக்கும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணத்திற்கும் சமமானால் அவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும்.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களும் அவற்றிற்கு இடையில் உள்ள பக்கமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களுக்கும் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள பக்கத்திற்கும் சமமானால் அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும்.

3. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்குச் சர்வசமமானால் அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும்.

இரு செங்கோண முக்கோணங்களில் ஒன்றின் கர்ணம் மற்றொன்றின் கர்ணத்திற்கும் ஒன்றின் ஒரு பக்கம் மற்றொன்றின் அதற்கு ஒத்த பக்கத்திற்கும் சர்வசமமானால் அவ்விரு செங்கோண முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும்.

பல வகை முக்கோணங்களிலிருந்து நாம் பெரிய கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் பெரியது என்றும் சிறிய கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் சிறியது என்றும் அறிகின்றோம்.

இங்கு மேலும் சில உண்மைகளைக் காண்போம் ABC என்ற இரு சமபக்க முக்கோணம் வரைக. படத்தில் காட்டியுள்ளதுபோல் ∠Aன் இரு சமவெட்டி வரைக. BCயை Dயில் வெட்டட்டும் Aயையும் Dயையும் இணைக்கவும் அது முக்கோணம் ABCயை △ABD என்றும் DA△ என்றும் இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது.

இம்முக்கோணம் ABCயை தாளில் வரைந்து வெட்டி எடுத்துக் கொள்ளவும், பின் இதனை ADன் வழியே மடித்தால் AC ஆனது ABயின் மீது பொருந்துகிறது எனெனில் ∠ABDயும் ∠ACDயும் சர்வசமம். மேலும் ∠C ∠B யின் மீது பொருந்துவதைக் காணலாம்,

BCயையும், CDயையும் அளக்கவும்.

எனவே ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் இருபக்கங்களுக்கிடையில் உள்ள கோணத்தின் இருசம வெட்டியானது அதன் எதிர்பக்கத்தை இரு சமபாகங்களாக பிரிக்கின்றது. மேலும், அது செங்குத்துக் கோடாக அமைகின்றதைக் காண்கிறோம்.

இது போன்ற ஓர் முக்கோணத்தின் இருகோணங்கள் சமமானால் அவற்றின் எதிர்பக்கங்கள் சமம் என்று அறிகிறோம்.

ஓர் சமபக்க முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களும் சமமாகும் இதனை வேறுவிதமாக ஒரு சமகோண முக்கோணத்தில் மூன்று பக்கங்களும் சமம் என்று கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

படத்தில் காட்டியுள்ள முக்கோணச்சோடிகள் சர்வசமபக்க முக்கோணங்களா? காரணம் கூறுக.

வடிவொத்த முக்கோணங்கள் :

சர்வசம முக்கோணங்களைப் பற்றி கற்ற நாம் இப்பகுதியில் வடிவொத்த முக்கோணங்களைப் பற்றி கற்போம்.

ஒத்த கோண அளவுகளைக் கொண்ட முக்கோணங்கள் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் எனப்படும்.

ABC என்னும் முக்கோணம் ஒன்றைவரைந்துகொள்க. பின்னர் அதன் பக்க அளவுகளைப் போல் மூன்று மடங்கு உள்ள மற்றொரு முக்கோணம் வரைக இதனை LMN என்று பெயரிடுவோம். இந்த இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோண அளவுகளை அளந்து பார்க்க

இவ்வாறு பல அளவுகளுக்கு முக்கோணங்கள் வரைந்து ஒவ்வொவ்வொரு முக்கோணத்தின் அளவுகளைப் போல் இரண்டு or (மூன்று) or நான்கு மடங்கு அளவுகளுக்கு முக்கோணம் வரைந்து அம்முக்கோணங்களில் ஒத்தச் சோடிக் கோண அளவுகளை அளந்து பார்க்கவும். அது போன்றே ஒத்த சோடிப் பக்கங்களை அளந்து பார்க்கவும்.

இவைகளிலிருந்து வடிவொத்த முக்கோணங்களில் கோண அளவுகள் மாறாமல் இருப்பதைக் காண்கிறோம் ஆனால் பக்கங்களின் அளவுகள் வேறுபடுகின்றன.

இதிலிருந்து நாம், இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்களின் அளவுகளின் விகிதங்கள் சமம் என்று அறிகிறோம்.

மேலும், இரு முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்களின் அளவுகளின் விகிதங்கள் சமமானால் அம் முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை ஆகும் என்று கூறலாம்.

இரு வடிவொத்த முக்கோணங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் அவற்றின் விகிதசமங்களை எவ்வாறு காண்பது என்பது பார்ப்போம்.

$\triangle ABC$யும் $\triangle APQ$ம் வடிவொத்த முக்கோணங்கள்.

$$\angle A = \angle A$$
$$\angle B = \angle P$$
$$\angle C = \angle Q$$
$$\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$$
$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$$

இருபுறமும் 1-ஐ கழிக்க

$$\frac{AB}{AP} - 1 = \frac{AC}{AQ} - 1$$
$$\frac{AB-AP}{AP} = \frac{AC-AQ}{AQ}$$
$$\frac{BP}{AP} = \frac{CQ}{AQ}$$

முன்னர் நாம் வடிவொத்த முக்கோணங்களை வரைந்து அவற்றின் கோணங்களின் அளவுகளையும் பக்கங்களின் அளவுகளையும் அளந்து பார்த்தோம் அல்லவா. இதுபோன்றே இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்புகளையும் கண்டு, அவைகளை அட்டவணைப்படுத்துக.

இவைகளிலிருந்து நாம் வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் a:b என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் $a^2 : b^2$ என்று அமைவதைக் காண்கின்றோம்.

1) வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ABC, DEFல் AB = 3; BC = 4 CA=5 ; DE = 9 எனில் EF, FD எவ்வளவு?

$\triangle ABC \parallel\!\parallel\!\parallel \triangle DEF$

எனவே $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{ED}$

$\frac{3}{9} = \frac{4}{EF} = \frac{5}{DF}$

$\frac{3}{9} = \frac{4}{EF}$

$3 \times EF = 4 \times 9$

$EF = \frac{4 \times 9}{3} = 12$

$\frac{3}{9} = \frac{5}{DF}$

$3.\ DF = 5 \times 9$

$DF = \frac{5 \times 9}{3} = 15$

1) படத்தில் உள்ள வடிவொத்த முக்கோணங்களில் BC, CBயின் மதிப்பென்ன?

BC = x என்க

CE = y என்க

$$AE = AC - CE$$

$$= (6+y).$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

$$\frac{12}{4} = \frac{y+6}{6}$$

$$72 = 4y + 24$$

$$72 - 24 = 4y$$

$$48 = 4y$$

$$\frac{48}{4} = y$$

$$12 = y$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

$$\frac{12}{4} = \frac{24}{x}$$

$$12x = 4 \times 24$$

$$x = \frac{4 \times 24}{12}$$

$$x = 8$$

$BC = 8$, $DE = 12$.

மாதிரி—7 :

519. க. செமீ. பருமனுள்ள ஒரு பட்டகத்தின் குறுக்கு வெட்டு 5 செமீ பக்கமுள்ள ஒழுங்கான அறுகோணம். அப்பட்டகத்தின் பக்கப் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

பட்டகத்தின் உயரம் h எனக் கொள்வோம்.

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 5 \times 5 \times h = 519.6$$

$$6 \times .433 \times 5 \times 5 \times h = 519.6$$

$$\therefore h = \frac{516.6}{6 \times 433 \times 5 \times 5} = 8 \text{ செ.மீ.}$$

∴ பட்டகத்தின் உயரம் = 8 செ.மீ.

பட்டகத்தின் பக்கப்பரப்பு = குறுக்கு வெட்டுச் சுற்றளவு × உயரம்

= 30 × 8 = 240 ச.செ.மீ.

மாதிரி—8 :

16 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு பட்டகத்தின் குறுக்கு வெட்டு முகம் 10 செ.மீ. பக்கமுள்ள சதுரமாகும். அப்பட்டகத்தின் கன அளவு யாது?

பட்டகத்தின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு = a^2 = 10 × 10 = 100 ச செ மீ

உயரம் = 16 செமீ.

கன அளவு = 100 × 16 = 1600 க செ. மீ.

5) இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் விகிதம் 4 : 16 என்றால் அவற்றின் பக்கங்களின் அளவுகளின் விகிதம் என்ன?

இருவடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் $a^2 : b^2$ என்ற விகிதத்திலிருந்தால் அவற்றின் பக்கங்களின் அளவுகளின் விகிதம் a : b ஆகும். எனவே 4 : 16 என்ற விகிதத்தில் பரப்பளவுகள் இருப்பின்

அவற்றின் பக்கங்களின் விகிதம் $\sqrt{4} : \sqrt{16}$ அதாவது

2 : 4 அதாவது 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.

பயிற்சி

1) இரு முக்கோணங்கள் சர்வசம முக்கோணங்களாயிருப்பதற்குள்ள நிபந்தனைகளில் ஏதேனும் இரண்டினை கூறுக.

2) முக்கோணங்களில் பக்கங்கள் என்றால் என்ன? ஒத்த கோணங்கள் என்றால் என்ன?

3) இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பக்க அளவுகள் 5 : 7 என்ற விகிதத்திலிருந்தால் அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் என்ன? (25 : 49)

4) இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் (25 :81) எனில் அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் என்ன? (9)

5) ABCயும் ADEயும் வடிவொத்த முக்கோணங்கள். AB = 4 செ.மீ. BD = 3 செ.மீ., DE = 14 செ.மீ AC = 6 செ.மீ. எனில் BC; CE-யைக் காண்க. (8. செ.மீ : 45 செமீ)

6) △ PQR ||| △ PST, PS = 9; SQ = 3; QR = 24 எனில் STயைக் காண்க.

7) △ ABC ||| △ DEF படத்தில் சமமான பக்கங்கள் ஒரே மாதிரியாகக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. சமமான கோணங்கள் எவை?

வட்டம் (Circle)

வட்டத்தைப் பற்றி நாம் முன்பு அறிந்துள்ளதை முதலில் நாம் நினைவு கூர்வோம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து குறிப்பிட்ட தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை வட்டம் எனப்படும்

அக்குறிப்பிட்ட புள்ளி வட்டமையம் எனப்படும் வட்டமையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதையை வட்டத்தின் பரிதி என அழைக்கப்படுகிறது,

வட்டமையத்திலிருந்து பரிதியிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்குமிடையே உள்ள தூரம் ஆரம் எனப்படும்.

பரிதியிலுள்ள ஏதேனும் இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கு "நாண்" எனப்படும்,

நாண் வட்டமையத்தின் வழியே சென்றால் அந்த நாண் விட்டம் எனப்படும்.

நாண்களில் மிகப்பெரியது விட்டமாகும். நாண் ஆரத்தைப்போல் இருமடங்கு பெரியது.

படத்தில் AB என்பது ஓர் வட்ட நாண், வட்ட நாண்பரிதியை சமமில்லாத இரண்டு வில்களாகப் பிரிக்கின்றது, பெரிய வில்லுக்குப் பெருவில் அல்லது நெடுவில் (major arc) என்றும், சிறிய வில்லுக்கு சிறுவில் அல்லது (minor arc) என்றும் பெயர்.

விட்டமானது பரிதியை இரு சமவிற்களாகப் பிரிக்கும்,

படத்தில் AXB என்பது பெருவில்

AYB என்பது சிறுவில்

CD என்பது விட்டம்,

எனவே, வில் CXD = வில் CBD

வட்டத்துண்டு (Segment of a circle)

வட்ட நாண் வட்டத்தை இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்கும் என்று பார்த்தோம். ஒவ்வொரு துண்டிற்கும் வட்டத்துண்டு என்று பெயர்.

வட்டமையம் எந்த துண்டில் உள்ளதோ அந்த வட்ட துண்டிற்கு பெருவட்டத்துண்டு (Major Segment) என்று பெயர். மற்றதற்குச் சிறு வட்டத்துண்டு (Minor Segment) என்றும் பெயர்.

விட்டத்தால் உண்டாகும் ஒவ்வொரு துண்டும் சமமாகும். விட்டம் வட்டத்தை இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கின்றது. அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் அரைவட்டத்துண்டு (Semi circle) எனப் பெயர்.

வட்டத்துண்டு என்பது நாணினாலும் அதனால் வெட்டப்படும் வில்லாலும் அடைபடும் உருவம் ஆகும்.

பொது மைய வட்டங்கள்

ஒரே புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வெவ்வேறு ஆரங்களையுள்ள வட்டங்கள் பொது மைய வட்டங்கள் எனப்படும்.

இரு வட்டங்களின் மையங்களின் தூரமானது அவ்விரு வட்டங்களின் ஆரங்களின் கூடுதலுக்குச் சமமானால் அவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொட்டுக் கொள்ளும். $r_1 + r_2 = d$

இரு வட்டங்களின் மையங்களின் தூரமான அவ்விரு வட்டங்களின் ஆரங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமானால் அவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று உட்புறமாகத் தொட்டுக் கொள்ளும். $r_1 - r_2 = d$

இரு வட்டங்களின் மையங்களின் தூரமானது இவ்விரு வட்டங்களின் ஆரங்களின் கூடுதலைக் காட்டிலும், குறைவாக இருந்தால் அவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும். $d < r_1 + r_2$

இரு வட்டங்களின் மையங்களின் தூரமானது, அவ்விரு வட்டங்களின் ஆரங்களுன் கூடுதலைக் காட்டிலும் அதிகமாக இருந்தால் அவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெட்டாமல் ஒன்றுக்கு வெளியே மற்றது அமையும்.

இரு வட்டங்களின் மையங்களின் தூரமானது அவ்விரு வட்டங்களின் ஆரங்களின் வித்தியாசத்தைக் காட்டிலும் குறைவாக இருந்தால் அவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெட்டாமல் ஒன்றுக்கு உள்ளே மற்றது அமையும்.

படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் 3செமீ. ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. அதில் ஏதேனும் 3 வட்ட நாண்களைக் குறிக்கவும். ஒவ்வொன்றிற்கும் வட்ட மையம் O விலிருந்து செங்குத்துக்கோடு வரைக.

இதுபோன்று வெவ்வேறு ஆர அளவுகள் கொண்ட வட்டம் வரைக அதில் சர்வசம நாண்களைக் குறிக்க.

இவைகளிலிருந்து நாம் பின்வரும் உண்மைகளைத் தெரிந்து கொள்கின்றோம்.

1) ஒரு வட்டத்தில் சர்வசம நாண்கள் வட்ட மையத்திலிருந்து சம தொலைவில் உள்ளன. மறுதலையாக,

ஒரு வட்ட மையத்திலிருந்து சம தொலைவில் உள்ள நாண்கள் சர்வசமம் ஆகும்.

2) ஒரு வட்டத்தில் சர்வசம நாண்கள் சர்வசமவில்களை வெட்டுகின்றன.

3) வட்டத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு வட்டநாணை இரு சம பாகமாக்கும்.

வட்டமையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடு இரு சமபாகமாக்கும்.

எனவே, AB = AC + CB

AC = CB = 3செமீ.

CG என்பது வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்குமிடையே உள்ள தூரம் d என்போம்.

OCB என்பது செங்கோண முக்கோணம் ; ∠C = 90°

எனவே. $OB^2 = OC^2 + CB^2$

$r^2 = d^2 + a^2$ என்போம்.

இதிலிருந்து $d^2 = r^2 - a^2$

மேலும், $d^2 = r^2 - a^2$ என்று நாம் அறிவோம்.

எனவே, d கரண $= \sqrt{r^2 - a^2}$

$\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

d = 4 செ.மீ.

d = OC = வட்டமையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரம்

= 4 செமீ ஆகும்.

மாதிரி – 2 : 10செமீ. ஆரமுள்ள வட்டத்தில் வட்டமையத்திலிருந்து 6செமீ தொலைவில் உள்ள நாணின் நீளம் என்ன?

இங்கு r = ஆரம் = 10செமீ.

d = தொலைவு = 6 செமீ.

நாணின் நீளம் என்ன?

$CD = 2CE$. ஏனெனில் $[OE \perp CD]$

செங்கோண முக்கோண CEO வில் $\angle E = 90°$

எனவே, $OC^2 = OE^2 + CE^2$

$r^2 = d^2 + CE^2$

$CE^2 = r^2 - d^2$

$CE^2 = 10^2 - 6^2$

$= 100 - 36 = 64$

$CE = \sqrt{64} = 8cm$

ஆனால், $CD = 2\,CE$

எனவே, $CD = 2 \times 8 = 16$செமீ

நாணின் நீளம் 16 செமீ. ஆகும்.

ஏதாவது ஓர் ஆரத்திற்கு வட்டம் வரைந்து கொள்க. அதன் பரிதியில் கம்பசின் உதவியால் சம அளவுள்ள இரு விற்களை படத்தில் காட்டியுள்ளது போல வரைக. அவை ஒவ்வொன்றும் வட்ட மையத்தில் எதிர்கொள்ளும் கோணத்தை அள. இவ்வாறு சம அளவுள்ள பலவிற்களை வரைந்து அது வட்டமையத்தில் எதிர்கொள்ளும் கோணத்தை அள. படங்களில் AB CDயும் சமவிற்கள்

LMPQ யும் சமவிற்கள்

வட்டத்தில் சமவிற்கள் வட்ட மையத்தில் சமகோணங்கள் எதிர் கொள்ளுகின்றன என்று அறிகின்றோம்.

இதுபோன்றே ஒரு வட்டத்தில் சமநீளமுள்ள, நாண்கள் சம விற்களை உண்டாக்கும் என்று அறியலாம்.

இவைகளின் மறுதலையாக

ஒரு வட்டத்தில் வட்டமையத்தில் சமகொணங்களை எதிர்கொள்ளும் விற்கள் சமமானவை.

ஒரு வட்டத்தில் சம நீளமுள்ள விற்களை உண்டாக்கும் நர்ண்கள் நீளமுள்ளவை ஆகும்.

வட்டக்கோணம்

வட்டம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் ஏதாவது ஒரு நாணைப் படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் குறிக்க நாணானது வட்டத்தை இரு விட்டங்களாகப் பிரிக்கும் என அறிவோம். பெரிய வட்டத்துண்டில் படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் LMAN, LMBN, LMCN, LMQN என்ற வட்டக் கோணங்களை வரைந்து அவற்றின் அளவுகள்ள அள. அவை சம அளவுள்ளவையாக இருப்பதைக் காண்லாம்.

இது போலாவே சிறிய வட்டத்துண்டிலும் இவை போன்று கோணங்களை வரைந்து, அளந்து பார்க்கவும்.

இவைகளிலிருந்து நாம்.

ஒரே வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணங்கள் சமம் என்று அறிகின்றோர்.

மேலும், அரை வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணம் செங்கோணம் என்றும் பெரிய வட்டத் துண்டிலுள்ள கோணம் குறுங்கோணம் என்றும் சிறிய வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணம் விரிகோணம் என்றும் அறிவோம்.

ஏதாவது ஓர் ஆர அளவிற்கு வட்டம் வரைக. அதில $\overline{AB}$ என்ற நாணை படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் வரைக. AB யின் முனைகளை வட்ட மையம் O உடனும் பரிதியில் உள்ள P உடனும் தனித்தனியே இணை $\overline{AB}$ வட்டவில் வட்ட மையத்தில் எதிர்கொள்ளும் கோணத்தையும், வட்டக் கோணத்தையும் அளக்க இது போன்ற வெவ்வேறு அளவுள்ள வட்டங்கள் வரைந்து அதில் வட்ட விற்களைக் குறிக்க, அவ்வட்ட விற்கள் வட்ட மையத்தில் எதிர்கொள்ளும் கோணத்தையும், வட்டக் கோணத்தையும் அளந்து அட்டவணைப்படுத்துக

அட்டவணையிலிருந்து ஒவ்வொரு வட்ட வில்லும் வட்ட மையத்தில் எதிர்கொள்ளும் கோண அளவானது, அவ்வட்டத்தில் நிற்கும் வட்டக் கோணத்தின் அளவைப் போல் இரு மடங்காயிருப்பதைக் காணலாம். பொதுவாக

ஒரு வட்டவில் வட்ட மையத்தில் எதிர்கொள்ளும் கோணம் அந்த வில் மிதிப்பரிதியில் ஒரு புள்ளியியல் எதிர்கொள்ளும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும்.

2 ∟APB = AOB

வட்ட நாற்கரம் :

நாற்கரம் வரையும் முறையினை நாம் ஏற்கனவே அறிவோம். ஏதாவது ஓர் ஆர் அளவிற்கு வட்டம் வரைந்து அதில் நாற்கரம் ஒன்றினை வரைக.

அதன் ஒவ்வொரு கோணத்தையும் அளந்து அட்டவணைப்படுத்துக

இவ்வாறு பல வட்ட நாற்கரங்கள் வரைந்து அதன் கோணங்களை அட்டவணைப்படுத்துக.

அட்டவணைகளிலிருந்து நாம் வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்கோணங் களின் கூட்டுத் 180° ஆகும் என்பதை அறிகின்றோம்.

இந்த உண்மையின் சிறப்பீண்டர்தும் நிரூபிக்கலாம்.

வட்ட நாற்கரம் ABCDயில் AC, BD மூலை விட்டங்களை இணை

$\angle BAC = \angle BDC$ (ஒரே வட்டத் துண்டிலுள்ள கோணங்கள்)

$\angle ADC = \angle ACB$ (ஒரே வட்டத் துண்டிலுள்ள கோணங்கள்)

இதிலிருந்து $\angle BAC + ACB = ADB + BDC$

ஆனால், $\angle ADB + \angle BDC = \angle ADC$

எனவே $\angle BAC + \angle ACB = \angle ADC$

முக்கோணம் ABCயில்

$\angle ADC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$

ஆனால் $\angle BAC + \angle ACB = \angle ADC$

ஆகவே, $ADC + \angle ABC = 180^\circ$

$\angle D + \angle B = 180^\circ$

நாற்கரம் ADCDயில் $\angle A + \angle B + \angle C + D = 360^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

ஆகவே, $\angle C + \angle A = 180^\circ$

வட்ட நாற்கரத்தில் ஒரு பக்கத்தை நீட்டினால் ஏற்படும் வெளிக் கோணத்தின் அளவானது அதன் உள் எதிர் கோணத்திற்கு சமமாகும்.

வெட்டும் நாண்கள்

ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் ஒன்றையொன்று வட்டத்திற்கு உள்ளோ அல்லது வெளியிலோ வெட்டிக்கொண்டால் ஒன்றின் வெட்டுத் துண்டுகளால் அடைபடும் செவ்வகத்தின் பரப்பு மற்றதின் வெட்டுத் துண்டுகளால் அடைபடும் செவ்வகத்தின் பரப்பிற்குச் சமமாகும்.

வெட்டுத் துண்டுகளால் அடைபடும் செவ்வகத்தின் பரப்பைக் காணும்போது அவை ஒவ்வொன்றையும் வெட்டும் புள்ளியில் தொடங்க வேண்டும்.

இவ்வுண்மையை படம் வரைந்து நாம் காணலாம்.

மேலே உள்ள படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு வெட்டும் நாண்கள் வரைந்து, PA, PB, PC, PD இவற்றின் நீளங்களை அளந்து அட்டவணைப்படுத்துக.

அட்டவணையிலிருந்து PA, PB = PC, HD என்பதை அறியலாம்.

தொடு கோடுகள் (Tangents)

ஒரு வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிச் செல்லும் நேர் கோட்டிற்கு வெட்டுக்கோடு (Secant) என்று பெயர்.

வெட்டுக் கோட்டில் வட்டப் பரிதியினால் வெட்டப்படும் துண்டிற்கு நாண் என்று பெயர்.

வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டிச் செல்லும் நேர்கோட்டிற்கு வட்டத்தின் தொடுகோடு எனப்பெயர்,

தொடுகோடு வட்டத்தை தொடும் புள்ளிக்குத் தொடுபுள்ளி என்று பெயர்.

வட்ட மையத்தையும் தொடுபுள்ளியையும் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிற்கு தொடுபுள்ளி வழியே செல்லும் ஆரம் என்று பெயர்;

ஒரு வட்டத்தில் வரையப்பட்ட தொடுகோடானது, அது தொடும் புள்ளியின் வழியே செல்லும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது.

AB = வெட்டுக்கோடு

PQ = நாண்

MN = தொடுகோடு

S = தொடுபுள்ளி

DS = தொடுபுள்ளி வழியே செல்லும் ஆரம்

தொடுகோட்டுச் சோடிகள்

வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.

வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்கள் சமம். அவை வட்ட மையத்தில் அமைக்கும் கோணங்கள் சர்வசமம்.

வட்ட மையத்தையும் வெளிப்புள்ளியையும் சேர்க்கும் நேர்கோடு தொடுகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் இருசமவெட்டியாகும் மேலும் அந்நேர்கோடு தொடுபுள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் மையக் குத்துக்கோடு.

வெட்டுக்கோடும் தொடுகோடும்

வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடும் ஒரு வெட்டுக்கோடும் வரைந்தால் வெட்டுக்கோடு வட்டத்தில் உண்டாக்கும் வெட்டுத்துண்டுகளினால் ஏற்படும் செவ்வகத்தின் பரப்பு தொடுக்கோட்டுத்துண்டு அமைக்கும் சதுரத்தின் பரப்பிற்குச் சமம்.

வட்டம் ஒன்றினை வரைக. வட்டத்திற்கு வெளியே ஏதேனும் ஓரிடத்தில் A என்ற புள்ளியைக் குறிக்க. A யிலிருந்து வட்டத்திற்கு APR என்ற வெட்டுத்துண்டு வரைக. அதுபோல A யிலிருந்து வட்டத்திற்கு AT என்ற தொடுகோட்டுத்துண்டு வரைக. $\overline{AT}$ $\overline{AP}$ $\overline{AR}$ நீளங்களை அளந்து கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ளவாறு அட்டவணைப்படுத்துக.

வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியின் நிலையை மாற்றி அட்டவணையை நிரப்புக.

இதிலிருந்து நாம் $AP \cdot AR = AT^2$ என்பதை அறிகின்றோம்.

தொடுகோடு நாண் இவைகளுக்கிடையே அமையும் கோணம்

ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோடும் தொடுபுள்ளியில் வரையப்பட்ட நாணும் அமைக்கும் ஒவ்வொரு கோணமும் அதற்கு எதிரேயுள்ள வட்டத்துண்டில் உள்ள வட்டக் கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

வட்டம் ஒன்றினை வரைக. அதன் மேல் A என்ற புள்ளியைக் குறி-

Aயில் $\overline{PAR}$ என்ற தொடுகோடும். AB என்ற நாணும் வரைக.

$$\angle RAB = \angle ADB$$

இதுபோல் $\angle PAB = \angle ABC$ என்பதை அறியலாம்.

மாதிரி கணக்குகள்

1) ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் 5 செமீ அதில் வரையக் கூடிய மிகப்பெரிய நாணின் நீளம் என்ன?

ஒரு வட்டத்தின் மிகப்பெரிய நாண் அதன் விட்டமாகும்.

விட்டம் = 2r

எனவே விட்டம் = 2 × செமீ.

= 10 செமீ. ஆகும்.

2) ஒரு வட்டத்திலுள்ள 16 செ.மீ. நீளமுள்ள நாண், வட்ட மையத்திலிருந்து 6 செமீ. தூரத்தில் உள்ளது. வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?

நாண் AB = 16 செ.மீ.

வட்டமையத்திலிருந்து நாண் உள்ள தூரம் l = 6செமீ.

AB = AC + CB

மேலும் AC = CB என்று அறிவோம்.

ஏனெனில் வட்டமையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு இருசமபாகமாக்கும்.

AC = CB 8 செமீ

முக்கோணம் BOCயில் $\angle C$ $90°$

எனவே $OB^2 = OC^2 + CB^2$

$r^2 = 6^2 + 8^2$ (OB வட்டத்தின் ஆரம்)

$r^2 = 36 + 64$

$r^2 = 100$

$r = \sqrt{100} = 10$ செ.மீ

வட்டத்தின் ஆரம் 10 செ.மீ

3. ஒரு வட்டத்தில் ஒரு வட்டவில்லின் உள் அமைகோணத்தின் அளவு 60° அதனால் வெட்டப்படும் வில்லின் அளவு என்ன?

ஒரு வட்டவில் வட்டமையத்தில் எதிர்கொள்ளும் அளவு அவ்வில்லின் உள் அமைகோணத்தின் அளவைப்போல் இருமடங்கு.

எனவே $\angle BOC = 2\angle A$

$= \angle BOC = 2 \times 60^0 = 120$

படத்தில் (1) $\angle A = 55^0$ எனில் $\angle BOC$வின் அளவு என்ன?

(2) $\angle ABC$ன் இரு சம வெட்டி BO என்க.

(3) $m\angle ABC = 80^0$ எனில் $m\angle A$வின் அளவு என்ன?

(1) வட்டவில் வட்டமையத்தில் எதிர்கொள்ளும் கோணம் அந்த வில் பரிதியில் ஒரு புள்ளியில் எதிர்கொள்ளும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்கு.

எனவே $2\angle A = \angle BOC$

$2 \times 55^0 = \angle BOC$

$11^0 = \angle BOC$

(2) BO $A\overset{\triangle}{B}C$ யின் இருசமவெட்டி

எனவே $m\angle OBC = 40^0$

மேலும் $m\angle OCB = 40^0$ (சமபக்கங்களுக்கு எதிரில் உள்ள கோணங்கள் சமம்)

ΔOBCயில் $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ$

$\angle BOC + 40 + 40 = 180^\circ$

$\angle BOC = 180^\circ - 80^\circ$

$\angle BOC = 100^\circ$

$m\angle A = \frac{1}{2} (\hat{BOC})$

$m\angle A = \frac{1}{2} \times 100 = 50^\circ$

$m\angle A = 50^\circ$

5) ஒரு வட்டநாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்கோணங்கள் 1:3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவற்றின் அளவுகள் என்ன?

ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

இவை 1:3 விகிதத்திலுள்ளன,

எனவே $180 \times \frac{1}{4} = 45^\circ$

$180 \times 3/4 = 135^\circ$

அவற்றின் அளவுகள் $45^\circ : 135^\circ$

6) வட்ட நாற்கரம் ABCDயில் $m\angle A = 50^\circ$, $m\angle B = 85^\circ$ எனில் $m\angle C$, $m\angle D$யின் அளவென்ன?

வட்ட நாற்கரம் ABCDயில் எதிர்கோணங்களின் கூடுதல் 180°

எனவே $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$

$m\angle B + m\angle D = 180^\circ$

ஆகவே $m\angle C = 180 - m\angle D$

$= 180 - 50^\circ$

$m\angle C = 180^\circ$

$m\angle B + m\angle D = 180^\circ$

$85^\circ + m\angle D = 180^\circ$

$m\angle D = 180^\circ - 85^\circ$

$= 95^\circ$

7) பக்கத்திலுள்ள படத்தில் PA = 5; PD = 3 PC = 10 எனில் PBன் மதிப்பென்ன?

இரு நாண்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால் ஒன்றின் வெட்டுத்துண்டுகளால் அமையும் செவ்வகத்தின் பரப்பு மற்றதின் வெட்டுத் துண்டுகளால் அமையும் செவ்வகத்தின் பரப்பிற்குச் சமம்.

எனவே PA PB = PC BD

$15\ PB = 10.3$

$$PB = \frac{10 \times 3}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

$PB = 2.$

8) ஒரு வட்டத்திற்குள் வரையப்பட்டஓர் தொடுகோடும் வெட்டுக்கோடும் Pல் சந்திக்கின்றன, $\overline{AT}$ தொடுகோடு $\overline{ANP}$ வெட்டுக்கோடு $\overline{AN}$ = 4 செமீ; $\overline{AP}$ = 9 செமீ எனில் ATன் அளவென்ன?

ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடும், வெட்டுக்கோடும் வட்டத்திற்கு வெளியே சந்தித்தால் வெட்டுக்கோடு வட்டத்தில் உண்டாக்கும் வெட்டுத்துண்டுகளினால் ஏற்படும் செவ்வகத்தின் பரப்பு தொடுகோட்டுத் துண்டு அமைக்கும் சதுரத்தின் பரப்பிற்கும் சமம்.

எனவே $AT^2 = AP\ AN$

$= 9 \times 4$

$AT^2 = 36$

$AT = \sqrt{36}$

$= 6$ செ மீ

9) வட்ட நாற்கரம் ABCDல் AB, Eக்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது m∠CBC = 83° m∠CDB = 40° எனில் m∠ADBன் மதிப்பென்ன?

ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு புயத்தை நீட்டுவதால் உண்டாகும் வெளிக்கோணம் அதன் உள் எதிர்கோணத்திற்குச் சமம்.

எனவே $\angle CBE = ADC$

$m\angle CBE = \angle ADC$

ஆனால் $\angle ADC = m\angle CDB + \angle ADB$

$m\angle ADC = m\angle CDB + \angle ADB$

$m\angle ADC = 40^0 + m\angle ADB$

$m\angle ADC = m\angle CBE = 85^0$

எனவே $86^0 = 40^0 + m\angle ADB$

$8.^0 = 40^0 \; m\angle ADB$

$45' = m\angle ADB$

10) இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று P-ல் தொடுகின்றன PT பொதுத் தொடுகோடு. $\overline{CA}$ $\overline{BD}$-க்கு இணையா? காரணம் கூறுக

ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோடும் தொடுபுள்ளியில் வரையப்பட்ட நாணும் அமைக்கும் ஒவ்வொரு கோணமும் அதற்கு எதிரே உள்ள வட்டத்துண்டிலுள்ள வட்டக்கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

எனவே $m\angle APT = m\angle PCA = m\angle PDB = 55^0$

$\overline{CA}$, $\overline{BD}$க்கு இணையாகும், ஏனெனில் ஒத்த கோணங்கள் சமம

11. 5 செமீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 13 செமீ தொலைவில் உள்ள ஓர் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையப்படுகின்றன தொடுகோட்டின் நீளம் என்ன?

வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடானது, அது தொடும் புள்ளியின் வழியே செல்லும் ஆரத்திற்கு செங்குத்து.

எனவே $m\angle AT_1B = 90^0$

ஆகவே AB ஆரம் ஆகும்.

$AB^2 = AT_1^2 + BT_1^2$

$\therefore AB = 13$செ.மீ

$AT_1 = 5$செ.மீ

$AB^2 = 5^2 + BT_1^2$

$BT_1^2 = 13^2 - 5^2$

$= 169 - 25$

$BT_1^2 = 144$

$BT_1 = \sqrt{144}$

$BT_1 = 12$செ.மீ

இரு தொடுகோட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்கள் சமம்.

எனவே $BT_1 = BT_2 = 12$செ.மீ

பயிற்சி

1) ஒரு வட்டத்தில் இரு நாண்கள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது போல் P-ல் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

$AB = 15$செ.மீ., $PB = 6$செ.மீ., $PD = 9$செ.மீ எனில் CD ன் அளவென்ன

[CD = 15செ.மீ]

2) மையம் O உடைய வட்டத்தில் விட்டம் PQ, AB-க்கு செங்குத்து $MB = 3$செ.மீ, $OB = 7$செ.மீ, OP காண்க.

விடை = [OM 3செ.மீ ; PM = 5செ.மீ ; OP = 4செ.மீ.]

3) படத்தில் m∠BACன் அளவென்ன?

[m∠ABC = 50°]

தொடுகோடு வரைதல்

வெட்டுக்கோடு—தொடுகோடு

ஏதேனும் ஒரு ஆர அளவிற்கு ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டத்திற்கு வெளியே A என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். A மூலமாக வட்டத்தை இரண்டு இடங்களில் வெட்டும்படியாக ஒரு கோடு வரைக. இக்கோடு வெட்டுக்கோடு எனப்படும்.

வெட்டுக்கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளை B, C என்று குறிக்கவும்.

O—வட்டமையம்

ABC என்பது வட்டத்தின் வெட்டுக்கோடு

தொடுகோடு :

வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொடும் கோட்டிற்குத் தொடுக்கோடு என்று பெயர்.

2) வட்டப்பரிதியின் மேல் A என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கவும்.

3) வட்டமையமான O வையும், பரிதியின் மேலமைந்த புள்ளியான Aவையும் ஒரு கோட்டுத் துண்டால் இணைக்கவும்.

4) Aவை மையமாக வைத்து கோட்டுத்துண்டின் மேல் Aக்கு இருபுறமும் ஏதேனும் ஒரு ஆர அளவில் கவராயத்தின் உதவிகொண்டு இரு வட்ட விற்கள் வெட்டவும். அவ்வட்டவிற்கள் கோட்டை வெட்டு. மிடத்திற்கு C,D எனப்பெயரிடவும்.

5) ஆர அளவை சற்று பெரிதாக்கிக் கொண்டு Cயை மையமாக வைத்து கோட்டிற்கு மேலும், கீழும் இரு வட்டவிற்கள் வெட்டவும். ஆர அளவை மாற்றாமல் Dயை மையமாக வைத்து கோட்டிற்கு மேலும், கீழும் இரு வட்டவிற்கள் வெட்டவும்.

6) இவ்வாறு வரையப்பட்ட வட்டவிற்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளை ஒரு நேர்கோட்டால் சேர்க்கவும். இந்தக் கோடே தேவையான தொடுகோடு ஆகும்.

OP→தொடு புள்ளி வழியே வரையப்பட்ட ஆரம்,

$\angle APO = 90^\circ = \angle BPO$

படம் (2)

வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளி வழியே வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையலாம் இரு தொடு கோடுகளும் சமநீளமுள்ளவை

O→வட்டமையம்
A→வட்டத்திற்கு வெளியே அமைந்துள்ள புள்ளி
AB, AC → A வழியே வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள்
OB, OC → தொடு புள்ளிகளான B,C மூலம் வரையப்பட்ட ஆரங்கள்

$\angle OBA = 90^\circ \quad \angle OCA$

ABன் அளவும் ACன் அளவும் சமம்,

தொடு கோடு, தொடுபுள்ளி வழியே வரையபபட்ட ஆரம், அந்த ஆரத்திற்கும் தொடுகோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோண அளவு இவற்றைப் பற்றி இது வரை அறிந்தோம். இனிமேல் வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைவது எவ்வாறு என்று செய்முறையாகத் தெரிந்து கொள்வோம்,

செய்முறை வடிவியல்

வட்டப்பரிதியின் மேல் அமைந்துள்ள புள்ளி வழியே வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு வரைதல்

வட்டப பரிதியின் மேல் அமைந்துள்ள ஒரே புள்ளி வழியே வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரையும்போது; தொடுப்புள்ளி வழியே வரையப்பட்ட ஆரத்திற்கும் தொடுகோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தின் அளவு 90° என்ற உண்மையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

உண்மையில் கொடுக்கப்பட்ட அளவிற்கும் படம் வரையும் முன்னர் உதவிப்படம் வரைய வேண்டும். (உதவிப்படத்திற்கு மதிப்பெண்கள் பரீட்சையில் கொடுக்கப்படுவதால் உதவிப்படத்தை மாணவர்கள் கண்டிப்பாக வரைய வேண்டும்.)

எ.கா 1:4செமீ ஆர அளவுள்ள வட்டம் வரைக, வட்டப் பரிதியின் மேல் A என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கவும். அப்புள்ளி வழியே

வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு வரையவும்

தீர்வு : (முதலில் உதவிப்படம் வரைந்து கொள்ள வேண்டும். உதவிப்படம் அளவுகளுக்கு இருக்க வேண்டிய கட்டாயமில்லை).

குறிப்பு

i) வட்டப் பரிதியின் மேல் அமையும் ஒரு புள்ளியின் வழியாக வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு வரையலாம்.

ii) வட்டத்திற்கு வெளியே அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளி வழியாக வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம். இரண்டு தொடு-கோடுகளும் சம நீளமுள்ளவையாக இருக்கும்.

iii) வட்டத்திற்கு உட்புறம் அமைந்திருக்கும் ஒரு புள்ளி வழியாக வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைய முடியாது.

iv தொடுகோடு வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளி வழியே வரையப்படும் ஆரத்திற்கும், தொடு கோட்டிற்கும் இடையிலுள்ள கோணத்தின் அளவு 90⁰ ஆகும்.

படம் (1)

வட்டப் பரிதியின் மீது புள்ளி அமைந்தால் ஒரு தொடுகோடு வரைய முடியும்.

O—வட்ட மையம்

AB—தொடுகோடு

வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடு கோடுகள் வரைதல் :

எ.கா. 2

3.5 செமீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டமையத்திலிருந்து 8 செமீ தூரத்தில் A என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். A வழியே வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடு கோடுகள் வரையவும். தொடுகோடுகளின் நீளத்தை அளந்து எழுதவும்.

[இந்தக் கணக்கில் தொடுகோடு வரையும் போது அரைவட்டத்தில் உள்ள கோணத்தின் அளவு 90⁰ என்ற உண்மை பயன்படுத்தப்படுகிறது]

முதலில் வழக்கம் போல உதவிப்படம் வரைய வேண்டும்

செய்முறை

1) 3.5செமீ ஆர அளவுள்ள வட்டம் வரைய வேண்டும். வட்ட மையமான Oவிலிருந்து 8செமீ தூரத்தில் A என்ற புள்ளியைக் குறித்துக் கொண்டு OA இவற்றை ஒரு நேர் கோட்டால் இணைக்க வேண்டும்.

2) Oவை மையமாக வைத்து OAவின் நீளத்திற்குப் பாதிக்கு மேல் ஒரு அளவை ஆர அளவாக எடுத்துக் கொண்டு கோட்டிற்கு மேலும், கீழும் இரு வட்ட விற்கள் வெட்ட வேண்டும்.

3) ஆர அளவை மாற்றாமல் Aயை மையமாக வைத்து கோட்டிற்கு மேலும் கீழும் இரு வட்டவிற்கள் வெட்ட வேண்டும். வட்டவிற்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளை ஒரு நேர்கோட்டால் இணைக்கவேண்டும்.

4) இந்த நேர்கோடு OAவை வெட்டும் புள்ளியை P எனக் குறிக்கவும். Pயை மையமாக வைத்து PAன் அளவை ஆரமாக வைத்து ஒரு வட்டம் வரைய வேண்டும்.

5) இவ்வட்டம், Oவை மையமாக உடைய வட்டத்தை இரு இடங்களில் வெட்டும், வெட்டும் புள்ளிகளுக்கு B,C என்று பெயரிடுக. A,Bயையும் மேலும் A,Cயையும் நேர் கோடுகளால் இணைக்கவும்.

AB, AC தேவையான தொடுகோடுகள் தொடுகோட்டின் நீளம் 7.4செமீ (சுமார்)

பயிற்சி :

1) 5செமீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக, வட்டப் பரிதியின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் குறி அப்புள்ளி வழியே வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைக.

2) 8செமீ விட்ட அளவுடைய ஒரு வட்டம் வரைக, அவ்வட்டத்திற்கு AB என்ற விட்டம் வரைக. A,B மூலம் வட்டத்திற்குத் தொடு கோடுகள் வரையவும்

3) 6செமீ ஆர அளவுடைய வட்டம் வரைக. அவ்வட்டத்திற்கு இரண்டு விட்டங்கள் AB,CD ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்குமாறு வரைக A,B,C,D ஆகிய புள்ளிகள் வழியே வட்டத்திற்குத் தொடு கோடுகள் வரைக தொடுகோடுகளால் அடைபடும் உருவம் யாது?

பாடம்—22

சரிவகம் (டிரபீசியம்) வரைதல்

நான்கு நேர்கோடுகளால் அடைபடும் உருவம் ஒரு நாற்கரம் எனப்படும். நாற்கரத்தில் பலவகைகள் உள்ளன அதில் ஒருவகை சரிவகம் (டிரபீசியம்) எனப்படும்.

சரிவகம் :

ஒரு நாற்கரத்தில் ஒரு ஜோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் இணையானால் அது ஒரு சரிவகம் எனப்படும். ஒரு சரிவகம் வரைய நான்கு அளவுகள் போதுமானவை.

ABCD என்பது ஒரு சரிவகம். இதில் ABயும் CDயும் இணைப்பக்கங்கள் BCயும் ADயும் இணையில்லாத பக்கங்கள்.

குறிப்பு :

ABயும் CDயும் இணை என்பதால்

i) $\angle A + \angle B = 180^\circ$ மேலும்

ii) $\angle C + \angle D = 180^\circ$

சரிவகத்தின் பரப்பளவு காணும் முறை :

ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு காண சரிவகத்தின் ஒரு முனையிலிருந்துஎதிர்பக்கத்திற்கு ஒரு குத்துக்கோடு வரைய வேண்டும்.

ABCD என்ற சரிவகத்தில், D என்ற புள்ளியின் வழியாக ABக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு DE. இதுவே இணைப்பக்கஞக்கு இடையே உள்ள தூரமாகும் DE = d அலகுகள் என்க.

$$\left.\begin{array}{l} AB = a \\ CD = b \end{array}\right\}$$ அலகுகள் என்க

(சரிவகத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\, d\,(a+b)$

= இணைப் பக்கங்களின் கூடுதலில் பாதி × (அவற்றிற்கு இடைத்தூரம்).

டிரபீசியம் வரைதல் :

ஒரு டிரபீசியம் வரைய 4 அளவுகள் தேவை எனப்பார்த்தோம். 4 அளவுகள் கொடுக்கப்படும் பொழுது டிரபீசியம் வரைவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

எ. கா. 1

சரிவகம் ABCD ல் AB, CD இணை. AB = 6.2 செமீ; AD = 3 செமீ ∠A = 60° DC = 2.5 செமீ. சரிவகம் வரைக.

முதலில் உதவிப்படம் வரைந்து அளவுகளைக் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு உதவிப்படம் வரைந்து கொள்வதனால் சரிவகம் வரைய எவ்வாறு ஆரம்பிக்க வேண்டும் என்பது தெளிவாகும்.

செய்முறை :

1) AB = 6.2 செமீ அளவுக்கு ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைய வேண்டும்.

2) பாகைமானியின் உதவிகொண்டு A யில் 60° உண்டாக்குமாறு ஒரு கோடு வரைய வேண்டும் அக்கோட்டின் மீது AD = 3 செமீ இருக்குமாறு D என்ற புள்ளியைக் குறிக்க வேண்டும்.

3) D வழியாக மூலை மட்டங்களின் உதவி கொண்டு. AB க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரையவேண்டும்;

4) அக்கோட்டின் மீது DC = 2.5 செமீ இருக்குமாறு C என்ற புள்ளியைக் குறிக்க வேண்டும்.

5) B, C யை ஒரு நேர்க்கோட்டின் மூலம் இணைக்க வேண்டும்.

ABCD தேவையான சரிவகம்.

எ. கா. 2 :

AB = 7 செ.மீ. BC = 6.5 செ மீ. CD = 4 செ.மீ. AC = 7.4 செ.மீ. சரிவகம் வரைக.

1) AB = 7 செமீ இருக்குமாறு ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைய வேண்டும்.

2) Aயை மையமாக வைத்து 6.5 செமீ ஆர அளவுள்ள வட்டவில் வெட்ட வேண்டும்.

3) Bயை மையமாக வைத்து 6.5 செ.மீ ஆர அளவுள்ள வட்டவில் வெட்ட வேண்டும்,

4) இரண்டு வட்டவிற்களும் வெட்டுமிடத்திற்கு C எனப்பெயரிட்டு B,C மேலும் A,C யை நேர் கோடுகளால் இணைக்க வேண்டும்,

5) C வழியாக AB க்கு இணையாக, மூலை மட்டங்களின் உதவி கொண்டு. ஒரு கோடு வரைய வேண்டும். அக்கோட்டின் மீது CD = 4 செமீ இருக்குமாறு D என்ற புள்ளியைக் குறிக்க வேண்டும்.

6) A,D யை ஒரு நேர்கோட்டால் இணைக்க வேண்டும்.

ABCD தேவையான சரிவகம்.

எ. கா. 3:

(4 பக்க அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன) AB = 12 செமீ ; BC = 5 செமீ; CD = 8 செமீ AD = 6 செமீ. சரிவகம் வரைக.

செய்முறை :

1) AB = 12 செமீ இருக்குமாறு ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைய வேண்டும்.

2) (CDன் அளவு 8 செமீ ஆதலால்) ABயின் மீது AE = 8 செமீ இருக்குமாறு E என்ற புள்ளியைக் குறிக்க வேண்டும்

3) (ADன் அளவு 6செமீ ஆதலால்) Eயை மையமாக வைத்து 6 செமீ ஆர அளவில் ஒரு வட்டவில் வெட்ட வேண்டும்.

4) Bயை மையமாக வைத்து 5 செமீ ஆர அளவில் ஒரு வட்டவில் வெட்ட வேண்டும்.

5] இரண்டு வட்டவிற்களும் வெட்டுமிடத்திற்கு C எனப் பெயரிட வேண்டும். E,C மேலும் B,C யை நேர்கோடுகளால் இணைக்க வேண்டும்.

6] Cயை மையமாக வைத்து 8செ.மீ ஆர அளவில் ஒரு வட்டவில் வெட்ட வேண்டும்.

7] Aயை மையமாக வைத்து 6செ.மீ ஆரம் அளவில் ஒரு வட்டவில் வெட்ட வேண்டும்.

8] இரண்டு வட்டவிற்களும் வெட்டிக் கொள்ளும் இடத்திற்கு D என்று பெயரிட வேண்டும்.

9] A,D, மேலும் C,D யை நேர்கோடுகளால் இணைக்க வேண்டும்.

ABCD தேவையான சரிவகம்.

எ.கா. 4

AB = 10செமீ; CD = 6செமீ

AC = 9செமீ; BC = 10செமீ

சரிவகம் வரைக

செய்முறை

1] AB = 10 செமீ இருக்குமாறு ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைய வேண்டும்.

2] ABயை BE = 6 செமீ இருக்குமாறு E வரை நீட்ட வேண்டும்.

3] Aயை மையமாக வைத்து 9செமீ ஆர அளவுள்ள வட்டவில் வெட்ட வேண்டும்.

4] Eயை மையமாக வைத்து 10செமீ ஆர அளவுள்ள வட்டவில் வெட்ட வேண்டும். இரண்டு வட்டவிற்களும் வெட்டிக் கொள்ளும் இடத்திற்கு C எனப் பெயரிட வேண்டும்.

5] A,C மேலும் B,C மேலும் E,Cயை நேர் கோடுகளால் இணைக்க வேண்டும்.

6] Cயை மையமாக வைத்து 6செ.மீ ஆர அளவுள்ள வட்டவில் வெட்ட வேண்டும்

7] Bஐ மையமாக வைத்து 10 செ.மீ ஆர அளவுள்ள வட்டவில் வெட்ட வேண்டும். இரண்டு வட்டவிற்களும் வெட்டுமிடத்திற்கு E எனப் பெயரிட வேண்டும்.

8] A,D, மேலும் B,D மேலும் C,D ஆகியவற்றை நேர் கோடுகளால் இணைக்க வேண்டும்.

ABCD தேவையான சரிவகம்

இரு சமபக்க சரிவகம் :

ஒரு சரிவகத்தில் இணையில்லாத பக்கங்களின் அளவுகள் சமமாக இருக்குமேயானால் அது ஒரு இருசமபக்க சரிவகம் எனப்படும்.

சரிவகம் ABCDல் AB = CD என்க இரு சமபக்க சரிவகத்தில்

AB = CD, BC = AD

எ.கா. 1

AB = 12 செமீ

CD = 8 செமீ

BC = 5 செ.மீ அளவுக்குள்ள இருசமபக்க சரிவகம் வரைந்து பரப்பளவு காண்க.

ABCD ஒரு இரு சமபக்கசரிவகம் BC = 5 செமீ என்பதால் ADன் அளவும் 5செ.மீ ஆக இருக்கும்,

செய்முறை :

1] AB = 12செமீ இருக்குமாறு ஒரு கோட்டுத் துண்டு வரைய வேண்டும்.

2] ABன் மீது AE = 8 செமீ இருக்குமாறு E என்ற புள்ளியைக் குறிக்க வேண்டும்.

3] Eயை மையமாக வைத்து 5 செமீ ஆர அளவில் ஒரு வட்டவில் வெட்ட வேண்டும்,

4] Bயை மையமாக வைத்து 5செமீ ஆர அளவில் ஒரு வட்டவில் வெட்ட வேண்டும் இரண்டு வட்டவிற்களும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிக்கு C என்று பெயரிட வேண்டும்.

5] E,C மேலும் B,Cயை நேர்கோடுகளால் இணைக்க வேண்டும்.

6] Cயை மையமாக வைத்து 8செமீ ஆர அளவில் 1 வட்டவில் வெட்ட வேண்டும்.

7] A யை மையமாக வைத்து 5 செமீ ஆர அளவில் 1 வட்டவில் வெட்ட வேண்டும். இரண்டு வட்ட விற்களும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிக்கு D எனப்பெயரிட வேண்டும்.

8] A,D மேலும் C,D யை நேர் கோடுகளால் இணைக்கவேண்டும்.

பரப்பளவு காணுதல்

D யிலிருந்து AB க்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரையவேண்டும். (மூலை மட்டங்களின் உதவி கொண்டோ, காம்பஸின் உதவி கொண்டோ வரையலாம்)

DX என்பது செங்குத்துக் கோடு அதன் அளவு 4.8 செமீ

∴ சரிவகத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 4.8\ (12+8)$

$= \frac{1}{2} \times 4.8 \times 20$

$= 48$ ச.செமீ

பயிற்சி

கீழ்க்காணும் அளவுக்கு சரிவகம் வரைந்து பரப்பளவு கணக்கிடுக

1] AB = 10.2 செமீ BC = 8 செமீ CD = 5.3 செமீ $\underline{\llcorner B} = 72^\circ$

2] AB = 10 செமீ CD = 5 செமீ AC = 8 செமீ $\underline{\llcorner ABC} = 37^\circ$

3] AB = 11 செமீ ; CD = 8 செமீ BC = 4 செமீ AD = 6 செமீ

4] AB = 9 செமீ ; CD = 8 செமீ ; AC = 10 செமீ ; BD = 9 செமீ

5] AB = 12.8 செமீ CD = 6.4 செமீ

BC = AD 5.6 செமீ

6] AB = 7 செமீ CD = 6.5 செமீ

AC = BD = 7.5 செமீ

புறப்பரப்பும் கன அளவும்

(i) பட்டகங்கள் (Prisms)

அடிப்பக்கமும் (Base) மேல் பக்கமும் இணையாகவும், சர்வ சமமாகவும், பக்கங்கள் செவ்வக வடிவமுடையவையாகவும், உள்ள கன உருவத்திற்குப் பட்டகம் என்று பெயர் ஒரு பட்டகத்தின் குறுக்கு வெட்டு முகம் (Corss section) அதன் மேல்பக்கத்தையும், அடிப்பக்கத்தையும் ஒத்திருக்கும். குறுக்கு வெட்டு முகம் எந்த வடிவத்தில் இருக்கிறதோ அந்த வடிவத்தின் பெயரால் பட்டகம் அழைக்கப்படுகிறது.

முக்கோணம், செவ்வகம்; அறுகோணம், டிரபீஸியம் ஆகியவற்றைக் குறுக்கு வெட்டுகளைக் கொண்டு பட்டகங்கள் அமையும். கன சதுரம் தனச் செவ்வகம் ஆகியவையும் பட்டக வகைகளைச் சேர்ந்தவை, பட்டகங்களை சமதளத்தில் படத்தில் உள்ளது போல் நிறுத்தி அவற்றின் பக்கங்கள் தரைக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். எனவே, இவை நேர்-பட்டகங்கள் (right primis) என்று சொல்லப்படும்.

ஒரு பட்டகத்தின் அடிப்பக்கத்திற்கும், மேல் பக்கத்திற்கும் இடை-யேயுள்ள தூரம் அடிப்பட்டகத்தின் (height) ஆகும்.

பட்டகத்தின் மொத்த பரப்பு :

பட்டகத்தின் பக்கப் பரப்பு, அதன் சுற்றளவை நீளமாகவும் உயரத்தை அகலமாகவும் கொண்ட செவ்வகத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமாகும்.

∴ பக்கப் பரப்பு = அடிப்பாகச் சுற்றளவு × உயரம்

மொத்த பரப்பு = அடிப்பாகப் பரப்பு + மேல்பாகப் பரப்பு + பக்கப்பரப்பு

= 2 அடிப்பாகப் பரப்பு + பக்கப்பரப்பு

அடிப்பாகப் பரப்பு A சதுர அலகுகள், சுற்றளவு P அலகுகள், உயரம் h அலகுகள் என்றால்

பட்டகத்தின் மொத்த பரப்பு $S = 2A + ph$ சதுர அலகாம்.

பட்டகத்தின் கன அளவு.

ஒரு கனச் செவ்வகத்தின் கன அளவு = அதன் அடிப்பரப்பு × உயரம்

என அறிவோம். கனச் செவ்வகமும் ஒரு வகைப் பட்டகம், எனவே பட்டகத்தின் கன அளவு = அதன் அடிப்பரப்பு × உயரம்.

= அதன் குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பு × உயரம்

$V = Ah$ ஆகும்.

அடுத்து வரும் அட்டவணையில் வெவ்வேறு வடிவமுள்ள குறுக்கு வெட்டுகளைக் கொண்ட பட்டகங்களின் கன அளவு, பக்கப்பரப்பு, மொத்தப்பரப்பு ஆகியவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றிலும் பட்டகத்தின் உயரம் h எனக் கொள்க.

பட்டகத்தின் உயரம், குறுக்கு வெட்டின் உயரம் இவை வெவ்வேறு என்பதை நன்கு அறிதல் வேண்டும்.

எண்	பட்டகத்தின் குறுக்கு வெட்டு	கன அளவு க.செ.மீ.	பக்கப் பரப்பு ச.செ.மீ.	மொத்தம் பரப்பு ச.செ.மீ.
1)	a செ.மீ. பக்கமுள்ள சமபக்க முக்கோணம்	$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2h$	$3ah$	$3ah + 2 \frac{\sqrt{3}}{4}$
2)	a செ.மீ. பக்கமுள்ள இரு சமபக்க செங்கோண △	$\frac{a^2}{2} \times h$	$(a \times a + a\sqrt{2})h$	$(a + a + a\sqrt{2}h) + a^2$
3)	a செ.மீ, b செ.மீ. பக்கங்களும் c செ.மீ. கர்ணம் உள்ள செங்கோண △	$\frac{ab}{2} \times h$	$(a + b + c)h$	$(a + a + ac) h + ab$
4)	a செ.மீ. பக்கமுள்ள சதுரம்	a^2h	$4ah$	$4ah + 2a^2$
5)	l செ.மீ, a செ.மீ. பக்கங்களுள்ள செவ்வகம்	lbh	$2(l \times b)h$	$2(l + b)h + 2lb$
6)	a செ.மீ. பக்கமுள்ள ஒழுங்கு அறுகோணம்	$6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times h$	$6ah$	$6ah + 2(6 \times \frac{\sqrt{3}a^2}{4})$

மாதிரி : 1

ஒரு பக்கத்தின் குறுக்கு வெட்டு 5 செ.மீ, 12 செ.மீ பக்கங்களுள்ள செங்கோண முக்கோணம் பட்டகத்தின் உயரம் 10 செ.மீ. ஆனால் பட்டகத்தின் கன அளவு, பக்கப் பரப்பு, மொத்தப்பரப்பு ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

செங்கோண முக்கோணக் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு $\left.\right\} = \frac{5 \times 12}{2}$

$= 30$ ச.செ.மீ

கன அளவு = குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு × உயரம்

$= \frac{5 \times 2}{2} \times 10$ க.செ.மீ. $= 300$ க.செ.மீ

முக்கோணத்தின் கர்ணம் $= \sqrt{5^2 + 12^2}$ செ.மீ.

$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ செ.மீ.

பட்டகத்தின் பக்கப்பரப்பு = குறுக்கு வெட்டுச் சுற்றளவு × உயரம்.

$= (5 + 12 + 13) \times 10$ ச.செ.மீ.

$= 30 \times 10 = 300$ ச.செ.மீ

மொத்தப்பரப்பு = பக்கப்பரப்பு + 2 × குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பு

$= 300 + 2 \times 30$

$= 300 + 60 = 360$ ச.செ.மீ.

மாதிரி—2 :

ஓர் இரு சம பக்க டிரபீஸியப் பட்டகத்தின் உயரம் 50 செ.மீ. டிரபீசியத்தின் இணையான பக்கங்கள் 30 செ.மீ, 18செமீ. சம பக்கங்களில் ஒன்று 10 செமீ. பட்டகத்தின் மொத்தப் பரப்பு என்ன?

அடிப்பாகச் சுற்றளவு $= (30 + 10 + 10 + 18)$ செ.மீ.

$= 68$ செ.மீ

பக்கப்பரப்பு $= 3400$ ச.செ.மீ

டிரபீசியத்தின் குத்துயரம் = DE = $\sqrt{10^2-6^2}$

$= \sqrt{64} = 8$ ச.செ.மீ.

∴ அடிப்பக்கப் பரப்பு = $\frac{1}{2}(30+18) \times 8$ ச.செ.மீ

$= \frac{1}{2} \times 48 \times 8$ ச.செ.மீ = 192 ச.செ.மீ.

∴ மொத்தப் பரப்பு $= (400+192)$ ச.செ.மீ.

$= 3592$ ச.செ.மீ.

மாதிரி—3 :

ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணப் பட்டகத்தின் பக்கப்பரப்பு 360 ச.செ.மீ. குத்துயரம் 12 செ.மீ. அதன் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு என்ன?

குறுக்கு வெட்டு முகம் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம்

பக்கப் பரப்பு = 360 ச.செ மீ. உயரம் = 12செ மீ

அடியின் சுற்றளவு p $= \frac{360}{12} = 30$ செ.மீ.

∴ அறுகோணத்தின் பக்கம் $= \frac{30}{6}$ 5செ.மீ

அப்பக்கப்பரப்பு = 6 × சமபக்க மின்பரப்பு

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}\, a^2}{4}$

$= 6 \times \frac{17.2}{4} \times 5 \times 5$ செ மீ.

= 64 95 ச.செ.மீ

∴ குறுக்கு வெட்டு முகப் பரப்பு = 64.95 ச.செ.மீ.

மாதிரி—4 :

20 செ.மீ. உயரமுள்ள ஒரு பட்டகத்தின் குறுக்கு வெட்டு முகம் 13 செ.மீ., 15 செ.மீ, 15 செ.மீ, பக்கங்கள் கொண்ட முக்கோணம் ஆகும் பட்டகத்தின் கன அளவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

குறுக்கு வெட்டு முகம் ஒரு முக்கோணம்,

அந்த Δன் பக்கங்கள் 13 செ.மீ, 14 செ.மீ, 15 செ.மீ.

$$\therefore s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+14+15}{2} \text{ செ.மீ.} = 21 \text{ செ.மீ.}$$

$$\Delta\text{ன் பரப்பு} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \text{ ச.செ.மீ.}$$

$$= \sqrt{21\times8\times7\times6} \text{ ச.செ.மீ.}$$

$$= \sqrt{3\times7\times2\times2\times2\times7\times2\times3} \text{ ச.செ.மீ.}$$

$$= 7\times3\times2\times2 = 84 \text{ ச.செ.மீ.}$$

பட்டத்தின் உயரம் = 20 செ.மீ.

$$\therefore \text{அதன் கன அளவு} = \text{குறுக்கு வெட்டு பரப்பு} \times \text{உயரம்}$$

$$= 84\times20 = 1680 \text{ க.செ.மீ.}$$

மாதிரி—5 :

ஒரு மாட்டுக் கொட்டைகையின் குறுக்கு வெட்டு முகம் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. கொட்டைகையின் நீளம் 24மீ. ஒரு மாட்டுக்கு 15 க.மீ. காற்று தேவை என்றால், அக்கொட்டைகையிலுள்ள எத்தனை மாடுகள் கட்டலாம்.

கொட்டகையில் உள்ள காற்றின் கன அளவு = குறுக்கு வெட்டு பரப்பு × நீளம்

$$= 16 \times 24 \text{ ச.மீ}$$

கொட்டகையினுள் கட்டக்கூடிய மாடுகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{16 \times 24}{15} \quad \frac{128}{5} = 24\frac{3}{4}$$

∴ கொட்டகையினுள் 25 மாடுகள் கட்டலாம்.

மாதிரி—6 :

ஒரு பட்டகத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு 85,856 ச.செ.மீ அதன் குறுக்கு வெட்டு 4 செ.மீ. பக்கமுள்ள சமபக்க முக்கோணம், அப்பட்டகத்தின் கன அளவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

பட்டகத்தின் மொத்தப் பரப்பு = 85.856 ச.செ.மீ

இரண்டு குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= 2 \times .433 \times 4 \times 4$ ச.செ.மீ.

$= 13.856$ ச.செ.மீ.

∴ பட்டகத்தின் பக்கப்பரப்பு $= 85.856 - 13.856$ ச.செ.மீ.

$= 72$ ச.செ.மீ.

∴ பட்டகத்தின் உயரம் $= \frac{\text{பக்கப்பரப்பு}}{\text{குறுக்கு வெட்டுச்சுற்றளவு}} = \frac{72}{12} = 6$ செ.மீ.

∴ பட்டகத்தின் கன அளவு $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 4 \times 6$

$= 41.568$ ச.செ.மீ.

மாதிரி—7 :

519. 6. ச. செமீ. பருமனுள்ள ஒரு பட்டகத்தின் குறுக்கு வெட்டு 5 செமீ பக்கமுள்ள ஒழுங்கான அறுகோணம். அப்பட்டகத்தின் பக்கப் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

பட்டகத்தின் உயரம் h எனக் கொள்வோம்.

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 5 \times 5 \times h = 519.6$$

$$6 \times .433 \times 5 \times 5 \times h = 519.6$$

$$\therefore h = \frac{516.6}{6 \times 433 \times 5 \times 5} = 8 \text{ செ. மீ.}$$

∴ பட்டகத்தின் உயரம் = 8 செ. மீ.

பட்டகத்தின் பக்கப்பரப்பு = குறுக்கு வெட்டுச் சுற்றளவு × உயரம்

$$= 30 \times 8 = 240 \text{ ச.செ.மீ.}$$

மாதிரி—8 :

16 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு பட்டகத்தின் குறுக்கு வெட்டு முகம் 10 செ.மீ. பக்கமுள்ள சதுரமாகும். அப்பட்டகத்தின் கன அளவு யாது?

பட்டகத்தின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு = $a^2 = 10 \times 10 = 100$ ச செ மீ

உயரம் = 16 செமீ.

கன அளவு = $100 \times 16 = 1600$ க செ. மீ.

மாதிரி—9 :

, 35 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு டின்னில் அடிப்பக்கம் 25 செ. மீ பக்கமுள்ள சதுரமாகும் அதே அளவுள்ள மூடியுடன் கூடிய 10 டின்கள் செய்யத் தேவையான தகட்டின் பரப்பைச் சதுர மீட்டரில் கண்டுபிடிக்கவும்.

டின்னின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு = 22×25

= 625 ச.செ.மீ

டின்னின் பக்கப் பரப்பு = ph

= 4×25×25=3500 ச.செ.மீ

1 டின்னின் மொத்தப்பரப்பு = 625×2+3500

= 1250+3500 = 4750 ச.செ.மீ

10 டின்களின் மொத்தப்பரப்பு = 4750×10 = 47500 ச.செ.மீ

10 டின்கள் செய்யத் தேவையான தகட்டின் பரப்பு } = 47500 ச.செ.மீ.

= 4.75 ச.மீ.

குறிப்பு : 10000 ச.செ.மீ.= 1 ச.மீ

மாதிரி—10 :

குறுக்கு வெட்டு முகம் இரு சமபக்க டிரபீசிய வடிவமான ஒரு மதகின் இணையான பக்கங்கள் 13.4 மீ. 1மீ. சரிவு பக்கம் 34 செ. மீ அம்மதகின் வழியாக மணிக்கு 3 கி மீ வேகத்தில் தண்ணீர் பாய்ந்தால் 1 நிமிடத்தில் பாயும் தண்ணீர் எத்தனை கிலோ மீட்டர்?

டிரபீசியத்தின் இணையான பக்கங்கள் 132 செ. மீ. 100 செ. மீ.

சரிவு பக்கம் 34 செ.மீ.

மதகின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு $= \dfrac{(132+100)}{2} \times 30$ ச.செ.மீ.

$= \dfrac{232}{2} \times 30$ ச.செ.மீ.

$= 3180$ ச.செ.மீ.

தண்ணீரில் வேகம் = மணிக்கு 3கி.மீ.

1 நிமிடத்திற்கு வேகம் $= \dfrac{1000}{06}$ மீ $= 500$மீ

1 நிமிடத்தில் பாயும் தண்ணீரின் கன அளவு = மதகின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு × வேகம்

$= 3480 \times 500$ க.செ.மீ.

$= \dfrac{3480 \times 500}{1000}$ லிட்டர்

= 17,400 லிட்டர்

= 17,4 கி.லிட்டர்

குறிப்பு : 1000 க.செ.மீ. = 1 லிட்டர்

1 க டெசி.மீ. = 1 லிட்டர்

1000 லிட்டர் = 1 கிலோ லிட்டர்

பயிற்சி:

1. ஒரு பட்டகத்தின் உயரம் 1மீ. அதன் அடி ஒவ்வொன்றும் 10 செ.மீ அளவுள்ள இரண்டு சமபக்கங்களைக் கொண்ட செங்கோண முக்கோணம் அதன் மொத்த மேற்பரப்பைக் காண்க [3514 ச.செ.மீ]

2. ஒரு பட்டகம் 1மீ. நீளமுள்ளது அதன் குறுக்கு வெட்டு 30 செ.மீ., 40 செ.மீ., 50 செ.மீ. பக்கங்களுள்ள ஒரு முக்கோணம் அதன் மொத்த மேற்பரப்பைக் காண்க [13200 ச.செ.மீ]

3 ஒரு கெட்டிப் பட்டகத்தின் குறுக்கு வெட்டு 20 செமீ. பக்கமுள்ள சம-பக்க முக்கோணம் அதன் உயரம் 15 செமீ. அதன் கன அளவைக் காண்க. [2598 க.செ.மீ]

4. 25செ.மீ நீளமுள்ள ஒரு பிரிசத்தின் குறுக்கு வெட்டு டிரபீசிய வடிவத்திலிருக்கிறது. அந்த டிரபீசியத்தின் இணைப்பக்கங்களின் நீளம் 12 செ.மீ; 8 செ.மீ. இணைப் பக்கங்கட்கு இடையில் உள்ள தொலைவு 14 செ.மீ. பிரிசத்தின் கன அளவைக் காண்க. [3500 க செ.மீ]

5. ஒரு கால்வாயின் குறுக்கு வெட்டு முகம், மேற்பக்கம் 5மீ அகலமும் அடிப்பக்கம் 1மீ அகலமும், ஆழம் 2 மீட்டருக்கு உள்ள ஒரு டிரபீசிய வடிவத்தில் உள்ளது. தண்ணீர் அதில் நிறைய மணிக்கு 3கி.மீ வேகத்தில் ஓடினால் அந்தக் கால்வாய் வழியே மணிக்கு எத்தனை க.மீ தண்ணீர் ஓடுகிறது எனக் காண்க. [2400 க மீ]

6. ஒரு செவ்வகத் தொட்டியின் உள் அளவுகள் 2மீ நீளம், 3 மீட்டர் ஆழம், 3 மீட்டர் அகலம், அத்தொட்டி எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் பிடிக்கும்? [4000 லிட்டர்]

7. ஒரு சொற்பொழிவு மண்டபம் அறுகோண வடிவத்தில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் ஒரு பக்கம் 10 மீட்டர்; சுவர்களின் உயரம் மீட்டர் ஒரு நபருக்கு 4க மீட்டர் காற்று வீதம் அதில் எத்தனைபேர் வசதியாக உட்கார்ந்து சொற்பொழிவு கேட்கலாம்? [323 பேர்]

8. 4 செ.மீ பக்கமுடைய ஒழுங்கான அறுகோணத்தைக் குறுக்கு வெட்டாகக் கொண்ட பட்டகத்தின் உயரம் 12. செ.மீ. அதன் பக்கப்பரப்பு மொத்தப்பரப்பு கன அளவு இவற்றைக் காண்க. [288 ச.செ.மீ; 371 செ.மீ. 408 க.செ.மீ.]

பாடம் : 28

உருளை (Cylinder).

சாணத்தின் உருண்டையான கம்பிகள், உருண்டையான பென்சில் ஒன்றின் மேல் ஒன்றாக அடுக்கப்பட்ட ரூபாய் நாணயக் குவியல்கள் ஆகியவை உருளைக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும். உருளையைக் குறுக்கு வெட்டு வட்டமாக அமைந்த பட்டகம் எனலாம்.

எனவே உருளையின் கன அளவு = குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு × உயரம்

$= \pi r^2 h$

(r அடிப்பக்க ஆரம், h—உயரம்),

உருளையின் வளைபரப்பு = குறுக்கு வெட்டுச் சுற்றளவு × உயரம்

$= 2\pi rh$

உருளையின் மொத்தப் பரப்பு $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h+r)$

மாதிரி—1

ஓர் உருளையின் ஆரம் 5 செ.மீ. அதன் உயரம் 8 செ.மீ. உருளையின் i) புறப்பரப்பு ii) மொத்தப் பரப்பு iii) கன அளவு இவற்றைக் காண்க.

i) உருளையின் வளைவுப் பரப்பு $= 2\pi rh$

$= 2 \times 3.14 \times 5 \times 8$ ச.செ.மீ.

$= 251.2$ ச.செ.மீ.

ii) உருளையின் மொத்தப் பரப்பு $= 2\pi r\,(h+r)$ ச.செ.மீ.

$= 2\times 3.14\times 5\,(8+5)$

$= 31.4\times 13$

$= 408.2$ ச.செ.மீ.

iii) உருளையின் கன அளவு $= \pi r^2 h$

$= 3.14\times 5\times 5\times 8$ க.செ.மீ.

$= 628$ க.செ.மீ.

மாதிரி—2 :

ஓர் உருளையின் குறுக்கு வெட்டின் சுற்றளவு 44 செ.மீ. உயரம் 12 செ.மீ ஆனால் அதன் கன அளவையும், வளைவு பரப்பையும் கணக்கிடுக.

$2\pi r = 44$, $r = \dfrac{44\times 7}{2\times 22}$ செ.மீ. $= 7$ செ.மீ.

உருளையின் கன அளவு $= \pi r^2 h$

$= \dfrac{22\times 7\times 7\times 12}{7}$ க.செ.மீ.

$= 1848$ க.செ.மீ.

வளைவு பரப்பு $= 2\pi rh$

$= 2\times \dfrac{22}{7}\times 7\times 12$ ச.செ.மீ. $= 528$ ச.செ.மீ.

மாதிரி—3 :

ஓர் உருளையின் கன அளவு 308க.செ.மீ. அதன் உயரம் 8செ.மீ. ஆனால் அதன் வளைபரப்பைக் காண்க.

$$\pi r^2 h = 308$$

$$\therefore r^2 = \frac{308 \times 7 \times 1}{22 \times 8} = \frac{49}{4}$$

$$r = \frac{7}{2} \text{ செ.மீ.}$$

$$\text{வளைவுபரப்பு} = 2\pi rh = \frac{2 \times 22 \times 27 \times 8}{7 \times 2} \text{ ச.செ.மீ.}$$

$$= 176 \text{ ச.செ.மீ.}$$

மாதிரி—4 :

ஓர் உருளையின் வளைவுபரப்பு 176ச.மீ. அதன் குறுக்கு வெட்டு 7மீ அதன் கன அளவைக் காண்க.

$$2\pi rh = 176$$

$$\therefore h = \frac{176 \times 7 \times 2}{22 \times 2 \times 7} = 8\text{மீ}$$

$$\therefore \text{கன அளவு} = \pi r^2 h = \frac{22 \times 7 \times 7 \times 8}{7 \times 2 \times 2} \text{ க.மீ.}$$

$$= 308 \text{ க.மீ.}$$

மாதிரி—5 :

70செமீ. விட்டமும் 50செமீ உயரமும் உள்ள மூடியில்லாத ஒரு உருளை வடிவப் பாத்திரம் செய்யத் தேவைப்படும் பித்தளைத் தகட்டின் பரப்பளவைக் காண்க.

பாத்திரத்தின் ஆரம் = 35செமீ.

வளை பரப்பு $= 2 \times \frac{22}{7} \times 35 \times 50$ ச.செமீ.

$= 11000$ ச.செமீ

அடிப்பரப்பு $= \frac{22}{7} \times 35 \times 35$ ச.செமீ.

$= 3850$ ச.செமீ.

∴ தேவையான தகட்டின் பரப்பளவு $= 11000 + 3850$ ச.செ.மீ

$= 14850$ ச.செ.மீ

மாதிரி—6 :

ஒரு உருளை வடிவ மரக்கட்டையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 660ச.செமீ, அதன் ஆரம் 5செ.மீ என்றால் உயரத்தைக் காண்க.

உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = 660ச.செமீ,

அதன் ஆரம் = 5செ.மீ

$$2\pi r(r+h) = 660$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times 5(5+h) = 660$$

$$5 + h = \frac{660 \times 7}{22 \times 2 \times 5} = 21$$

h = 21 — 5 = 16 செமீ.

∴ உருளையின் உயரம் = 16செமீ.

பயிற்சி 1

1) ஆரம் 14செமீ, உயரம் 25செமீ. அளவுகளுள்ள உருளையின் வளை பரப்புக் காண்க. [2,200ச.செ.மீ]

2) ஆரம் 3.6செமீ. உயரம் 12செமீ அளவுகளுள்ள உருளையின் மொத்தப் பரப்பைக் காண்க. [?41ச.செ.மீ]

3) ஓர் உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 880ச.செமீ அதன் ஆரம் 7செ.மீ. என்றால் உயரத்தைக் காண்க. [13 செ.மீ]

4) ஆரம் 7செ.மீ. உயரம் 15செ.மீ அளவுகளுள்ள . உருளையின் கன அளவைக் காண்க.

[2310க செ.மீ]

5) 5மீ. விட்டமும் 14மீ ஆழமும் உள்ள ஒரு வட்டமான கிணறு வெட்ட கன மீட்டருக்கு ரூ.750 விதப் என்ன செலவாகும்?

[2062.5ரூ]

6) ஓர் உருளையின் கன அளவு 9.240 க.செமீ அதன் ஆரம் செ.மீ உயரம் என்ன?

[15செ.மீ]

7) ஓர் உருளையின் வளை தலப்பரப்பு 330ச.மீ உயரம் 10 செமீ ஆனால் கன அளவு எத்துணை?

[825 க.மீ.]

8) ஓர் உருளையின் குறுக்கு வெட்டுச் சுற்றளவு 44மீ. அதன் உயரம் 15மீ. அதன் கன அளவையும் மொத்தத் தலப் பரப்பையும் காண்க [2,310க.மீ. 968ச.மீ]

பகுதி—2 :

கூம்பு (cone)

செங்கோணத்தை உண்டாக்கும் பக்கங்களில் ஒன்றைச் செங்குத்தில் நிலையாகக் கொண்டு, அச்செங்கோண முக்கோணத்தையும் சுழற்சியினால் உண்டாகும் உருவத்திற்குக் கூம்பு என்று பெயர். கூம்பின் அடிப்பாகம் ஒரு வட்டம் அதன் உச்சி ஒரு கூரான புள்ளி. இடையில் ஒரு வளைவு தலப்பரப்பு உண்டு. கூம்பின் கூரான புள்ளியைக் கூம்பின் உச்சி என்பர். அடித்தளத்தில் மையப்புள்ளிக்கும் உச்சிக்கும் இடையில் உள்ள தொலைவு கூம்பின் செங்குத்து உயரம் ஆகும். உச்சிக்கும் அடித்தளத்தின் பரிதியில் உள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் இடையில் உள்ள தொலைவு கூம்பின் சாயுயரம் ஆகும்.

படத்தில் A—கூம்பின் உச்சி

V—கூம்பின் உச்சி

VA—செங்குத்து உயரம் h

VB—சாயுயரம் l

AB—ஆரம் r

கூம்பின் ஆரம், செங்குத்து உயரம், சாயுயரம் ஆகிய மூன்றும் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும். ஆதலின் இதில் எவையேனும் இரண்டு அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால் மூன்றாவது அளவைக் காணலாம்.

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$r = \sqrt{l^2 + h^2}$$

சில கோபுரங்களின் உச்சிப்பாகம், மணற்குவியல், தானியக் குவியல், மிக்சர் போன்ற தின்பண்டம் அல்லது மளிகைச் சாமான் பொட்டலம் போன்றவை கூம்பு வடிவத்தில் இருக்கின்றன.

கூம்பின் கன அளவு : ஒரு உருளை வடிவமான பாத்திரத்தில், அதே செங்குத்து உயரமும் அடிப்பக்க ஆரமும் உள்ள ஒரு கூம்பு வடிவப் பாத்திரத்தைக் கொண்டு தண்ணீரை அளந்து 3 தடவைகள் ஊற்றினால் உருளைப் பாத்திரம் நிரம்புவதைச் சோதனை செய்து பார்க்கலாம். இதிலிருந்து ஒரு கூம்பின் கன அளவு அதே உயரமும், அடிப்பக்க ஆரமும் கொண்ட உருளையின் கன அளவு $\frac{1}{3}$ பாகமாகும் என்பதை அறியலாம்.

ஓர் உருளையின் கன அளவு $= \pi r^2 h$ என்பதை அறிவோம். எனவே ஆரம் r செங்குத்துயரம் h உள்ள ஒரு கூம்பின் கன அளவு

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

சூத்திரம் : கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

மாதிரி 1 : ஒரு கூம்பின் ஆரம் 6செ.மீ செங்குத்துயரம் 8 செ.மீ, சாயுயரம் காண்க.

$r = 6$செ.மீ, $h = 8$செ.மீ,

$l =$ சாயுயரம் $= \sqrt{r^2 + h^2}$

$$= \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64}$$

$$= \sqrt{100} = 10\text{செ.மீ}$$

மாதிரி-2: ஒரு கூம்பின் ஆரம் 30செ.மீ. சாயுயரம் 32.5செ.மீ. எனில் அதன் செங்குத்துயரம் காண்க.

$r = 30$ செ.மீ. $\qquad l = 32.5$ செ.மீ.

செங்குத்துயரம் $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$$= \sqrt{32.5^2 - 30^2}$$

$$= \sqrt{(32.5+30)(32.5-30)}$$

$$= \sqrt{62.5 \times 2.5}$$

$$= \sqrt{156.25} = 12.5\text{செ.மீ.}$$

பயிற்சி கீழ்க்காணும் கணக்குகளில் விடுபட்டுள்ள இடங்களில் இருக்க வேண்டிய விடைகளைக் காண்க.

	கூம்பின் ஆரம்	செங்குத்துயரம்	சாயுயரம்
1)	7 செ.மீ.	24செ.மீ.	....
2)	5செ.மீ.	12செ.மீ.	....
3)	....	12செ.மீ.	15 செ.மீ.
4)	....	25செ.மீ.	6.5செ.மீ.
5)	4 செ.மீ.	....	8.5செ.மீ.
6)	12செ.மீ.	....	20செ.மீ.

விடைகள் :- 1) 25 செ.மீ. 2) 13 செ.மீ. 3) 9செ.மீ.

4) 6செ.மீ. 5) 7.5 செ.மீ. 6) 16 செ.மீ.

மாதிரி—3 : 7செ.மீ. ஆரமும் 12 செ.மீ. உயரமுள்ள கூம்பின் கன அளவு யாது?

$r = 7$ செ.மீ. $h = 12$ செ.மீ.

கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1 \times 22 \times 7 \times 7 \times 12}{3 \times 7}$ க.செ.மீ.

$= 616$ க.செ.மீ.

மாதிரி—4 : ஆரம் 10செ.மீ, சாயுயரம் 26செ.மீ. உள்ள கூம்பின் கன அளவு கண்டுபிடிக்க.

செங்குத்து உயரம் $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$= \sqrt{26^2 - 10^2}$ செ.மீ.

$= \sqrt{36 \times 16}$

$= 24$ செ.மீ

கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10 \times 24$ க.செ.மீ

$= \frac{17600}{7}$ க.செ.மீ.

$= 2514.28$ க.செ.மீ.

பயிற்சி :

கூம்பின் கன அளவு காண்க :

1] ஆரம் 14 செமீ — செங்குத்துயரம் 15செ.மீ

2] ஆரம் 16 செமீ — செங்குத்துயரம் 42செ.மீ

3] ஆரம் 21 செமீ — சாயுயரம் 35 செமீ

4] செங்குத் துயரம் 48 செமீ — சாயுயரம் 50 செமீ

5] ஒரு கூம்பு வடிவமான பாத்திரத்தின் செங்குத்துயரம் 70 செமீ ஆரம் 15செமீ அதன் கொள்ளளவை லிட்டரில் காண்க

விடை, 1) [illegible]70 க.செ.மீ 2) 11.284க.செ.மீ 3) 12.936 க செமீ

4) 9.856 க.செ.மீ 6) 16.5 லிட்டர்

கூம்பின் வளைவு தளப்பரப்பு : ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் ஆர எல்லைகளை ஒன்றாகச் சேர்த்தால் ஒரு கூம்பு கிடைக்கிறது. வட்டக்கோணப் பகுதியின் வில்லும் ஆரமும் முறையே கூம்பின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவாகவும், சாயுயரமாகவும் மாறுகின்றன. வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு கூம்பின் வளைவு பரப்புக்குச் சமமாகும்.

கூம்பின் வளைவு பரப்பு = வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு

$$= \frac{\text{வில்லின் நீளம்}}{2} \times \text{ஆரம்}$$

$$= \frac{\text{கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு} \times \text{சாயுயரம்}}{2}$$

$$= \frac{2\pi r \times l}{2} = \pi r l$$

கூம்பின் மொத்தப் பரப்பு = வளைவு பரப்பு + அடிப்பாகப் பரப்பு

$$= \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r(l+r)$$

மாதிரி—5: ஒரு கூம்பின் ஆரம் 7செ.மீ செங்குத்துயரம் 24செமீ கூம்பின் வளைவு பரப்பு என்ன? மொத்தப்பரப்பென்ன?

சாயுயரம் $= \sqrt{r^2+h^2}$

$= \sqrt{24^2+7^2}$ செ.மீ.

$= \sqrt{625}$ செ.மீ = 25செ.மீ

வளைவுபரப்பு $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25$ ச.செ.மீ.

= 550ச.செ.மீ.

மொத்தப்பரப்பு $= \pi r(r+l)$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times (7+25) = 22 \times 32$ ச.செ.மீ

704 சசெமீ

மாதிரி—6: கூம்பு வடிவமான ஒரு கூடாரத்தின் அடிப்பரப்பு 616சமீட்டர் அதன் செங்குத்துயரம் 10.5மீ அக்கூடாரத்திற்குத் தேவைப்படும் கித்தானின் பரப்பு என்ன?

அடிப்பரப்பு $\pi r^2 = 616$ ச.மீ.

$$r^2 = 616 \times \frac{7}{22}$$

$$= 287$$

$$r = \sqrt{28 \times 7} = 14$$

செங்குத்துயரம் = 10.5 செ.மீ.

∴ சாயுயரம் $l = \sqrt{10.5^2 + 14^2}$ மீ

$$= \sqrt{306.25} \text{ மீ}$$

$$= 17.5 \text{ மீ.}$$

கூம்பின் வளைபரப்பு = $\pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 13 \times \frac{35}{2} \text{ ச.மீ}$$

$$= 770 \text{ ச.மீ.}$$

கூடாரத்தின் பரப்பளவு = 770 ச.மீ.

கணக்கு—7: ஒரு கூம்பின் வளைவு பரப்பு 2,310 ச.செ.மீ. அதன் ஆரம் 21 செ.மீ. அதன் கன அளவைக் காண்க.

வளைவு பரப்பு $\pi r l = 2310$ ச.செ.மீ.

$$\frac{22}{7} \times 21 \times l = 2{,}310$$

$$l = \frac{2310\times7}{22\times21} = 35\text{மீ.}$$

ஆரம் = 21 செ.மீ.

$$\therefore \text{செங்குத்துயரம் } h = \sqrt{l^2-r^2} = \sqrt{35^2-21^2}$$

$$= \sqrt{(35+21)\,(35-21)}$$

$$h = \sqrt{56\times14} \text{ செ.மீ.}$$

$$= 28 \text{ செ.மீ.}$$

$$\text{கூம்பின் கன அளவு} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times21\times21\times21\times28 = 12{,}936 \text{ க.செ.மீ}$$

பயிற்சி :

ஒரு கூம்பு வடிவக் கூடாரத்தின் அடிவிட்டம் 12மீ. அதன் சாயுயரம் 12மீ. அதற்குத் தேவையான கித்தானின் பரப்பு என்ன?
(396 ச.மீ)

2) ஒரு கூம்பின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவு 88மீ. செங்குத்து உயரம் 8மீ ஆனால் அதன் கன அளவு யாது? (1,642/$_3$ க.செ.மீ.)

3) ஒரு கூம்பின் அடிப்பரப்பு 1,386 ச.செமீ. அதன் செங்குத்து உயரம் 28செ.மீ. கூம்பின் வளைபரப்பைக் காண்க. (2,310 ச.செ.மீ.)

4) ஒரு கூம்பின் வளைவு பரப்பு 2.200 ச செ.மீ. அதன் ஆரம் 14 செ.மீ. அதன் கன அளவு யாது?
(9,856 க.செ.மீ)

5) சாயுயரம் 70செ.மீ. உள்ள கூம்பின் வளைவு பரப்பு 9,240 ச.செ.மீ அதன் கன அளவைக் காண்க, (1,03,488 க.ச.செமீ.)

6) 7 செ.மீ. விட்டமுள்ள ஒரு கூம்பின் மொத்தப் பரப்பு 76 ச.செ.மீ. அதன் அளவு என்ன?
(154 க.செ.மீ.)

கோளம் (Sphere)

பகுதி—I :

உருண்டை வடிவமான பொருளுக்குக் கோளம் என்று பெயர், பந்து, இரும்புக் குண்டு பூமி உருண்டை ஆகியவை கோள வடிவப்பொருள்களாகும் கோளம் ஒரே ஒரு வளைவான புறப்பரப்பு உடையது.

சூத்திரம் : கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{4}{3} \pi r^3$

கோளத்தின் புறப்பரப்பு $= 4\pi r^2$

ஒரு கெட்டியான கோளத்தை இரு சம பாகங்களாக வெட்டினால் ஒவ்வொரு பாகமும் ஓர் அரைக்கோளம் (semi-sphere) எனப்படும். அரை கோளத்திற்கு ஒரு வளைவு பரப்பும், வட்டமான ஒரு சமதளப் பரப்பும் உண்டு.

அரைக் கோளத்தின் வளைவுபரப்பு $= 2\pi r^2$

கெட்டி அரைக்கோளத்தின் மொத்த புறப்பரப்பு $= 3\pi r^2$

கன அளவு $= \frac{2}{3} \pi r^3$

மாதிரி—1 : 3.5 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு கோளத்தின் கன அளவு என்ன? அதன் புறப்பரப்பையும் காண்க.

$$\text{கோளத்தின் கன அளவு} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \text{ க.செ.மீ.}$$

$$= \frac{539}{3} \text{ க.செ.மீ.}$$

$$= 179.67 \text{ க.செ.மீ.}$$

$$\text{புறப்பரப்பு} = 4\pi r^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \text{ ச.செ.மீ.}$$

$$= 154 \text{ ச.செ.மீ.}$$

மாதிரி—2 : ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பு 616 ச.செ.மீ. அதன் கன அளவு என்ன?

$$\text{புறப்பரப்பு } 4\pi r^2 = 616$$

$$r^2 = \frac{616 \times 7}{4 \times 22}$$

$$\therefore r = \sqrt{7 \times 7} = 7 \text{ செ.மீ.}$$

$$\text{கோளத்தின் ஆரம்} = 7 \text{ செ.மீ.}$$

$$\text{கன அளவு} = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7 \text{ க.செ.மீ.}$$

$$= \frac{4132}{3} \text{ க.செ.மீ}$$

$$= 1,437.33 \text{ க.செ.மீ}$$

பயிற்சி 1:-

1) கீழ்க்கண்ட ஆரங்களையுடைய கோளங்களுக்குக் கன அளவுக்கு மேற்பரப்புகள் காண்க.

a) $3\frac{1}{2}$ செ.மீ b) 14 செ.மீ c) 4 டெசி மீ.

a) $179\frac{2}{3}$ க.செ.மீ 154 ச.செ.மீ b) $11498\frac{2}{3}$ க.செ.மீ 2464 ச.செ.மீ c) $268\frac{4}{21}$ க.செ.மீ $201\frac{1}{7}$ ச.செ.மீ

2) ஒரு பந்தின் ஆரம் 6 செ.மீ. அதனுள் அடங்கியிருக்கும் காற்றின் கன அளவைக் காண்க.

[$905\frac{1}{7}$ க.செ.மீ]

மாதிரி—3: ஓர் அரைக் கோளத்தின் விட்டம் 14செ.மீ. அதன் கன அளவு யாது? மொத்தப் புறப்பரப்பு என்ன?

அரைக் கோளத்தின் விட்டம் 14செ.மீ.

ஆரம் 7 செ.மீ

$$\text{அதன் கன அளவு} = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$$

$$= 718\frac{2}{3} \text{ க. செமீ}$$

மொத்த புறப்பரப்பு = $3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 462 \text{ ச.செ.மீ}$$

மாதிரி—4 : ஒரு அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 1,848 ச.செ.மீ அதன் கன அளவு என்ன?

அரைக் கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = 1,848 ச.செ.மீ.

$$3\pi r^2 = 1848$$

$$r^2 = 1848 \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{22}$$

$$= 28 \times 7$$

$$r = 2 \times 7 = 14$$

ஆரம் = 14 செ.மீ.

அதன் கன அளவு = $\frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14$$

$$= 5742\frac{1}{3} \text{ க.செ.மீ.}$$

மாதிரி 5 : இரண்டு கோளங்களின் ஆரங்கள் 2:3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. சிறிய கோளத்தின் கன அளவு 120 க.செ.மீ. என்றால் பெரிய கோளத்தின் கன அளவு என்ன?

இரண்டு கோளங்களின் ஆரங்களின் விகிதம் 2:3

கன அளவுகளின் விகிதம் $2^3 : 3^3$

சிறிய கோளத்தின் கன அளவு 120 க.செ.மீ.

8 பங்குக்கு 120 க.செ.மீ.

$$27 \text{ பங்குக்கு} = \frac{27 \times 120}{8}$$

$$= 405 \text{ க.செ.மீ.}$$

பெரியகோளத்தின் கன அளவு = 405 க.செ.மீ

பயிற்சி :

1) 10 செ.மீ. ஆரமுள்ள அரைக்கோளத்தின் கன அளவு காண்க

$$\left[2,095 \frac{5}{21} \text{ க.செ.மீ.}\right]$$

2) 15.4 செ.மீ. ஆரமுள்ள கெட்டியான அரைகோளத்தின் மொத்தப் பரப்பைக் காண்க.

[2,235.2 ச.செ.மீ.]

3) அரைக் கோளம் ஒன்றின் மொத்தப்பரப்பு 73.92 ச.செ.மீ.. அதன் கன அளவு என்ன?

[45.995 க.செ.மீ.]

5) அரைக்கோள வடிவம் உள்ள ஒரு பாத்திரத்தின் விளிம்பின் சுற்றளவு 131 செ.மீ. கொள்ளளவு என்ன?

[19.42 லிட்டர்]

பகுதி 2 :

பலவகைக் கணக்குகள்

மாதிரி—1 : ஒரு கூடாரம் உருளையின் மேல் கூம்பு அமைந்தது போல் உள்ளது. அதன் விட்டம் 17மீ. உருளை பாகத்தின் உயரம் 3.5 மீ. கூடாரத்தின் அதிக உயரம் 6மீ அதனுள் இருக்கும். காற்றின் அளவு என்ன? அக்கூடாரத்திற்குத் தேவையான கித்தானின் பரப்பளவு என்ன?

கூடாரத்தின் ஆரம் = 6மீ.

உருளைபாக உயரம் = 3.5மீ.

∴ கூம்பு பாகத்தின் உயரம் = 6—3.5

= 2.5மீ

உருளை பாகம் கொள்ளளவு = $\frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times \frac{7}{2}$ க.மீ.

= 394 க.மீ.

கூம்புப்பகுதியின் கொள்ளளவு = $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times \frac{5}{2}$ க.மீ.

= $\frac{660}{7}$ க.மீ.

= 94.29 க.மீ.

கூடாரத்தில் உள்ள காற்றின் கன அளவு = 396+94.2-

= 490.29 க மீ.

கூம்பு பகுதியின் ஆரம் = 6மீ

கூம்பு பகுதியின் செங்குத்துயரம் = 2.5மீ.

∴ அதன் சாயுயரம் $= \sqrt{6^2+2.5^2}$

$= \sqrt{42.52} \simeq 6.5$மீ

உருளை பகுதிக்கு வேண்டிய கித்தான $= 2 \times \frac{22}{7} \times 6 \times \frac{7}{2}$ ச.மீ

$= 132$ ச.மீ

கூம்பு பகுதிக்கு வேண்டிய கித்தான் $= \frac{22}{7} \times 6 \times \frac{13}{2}$ ச.மீ

$= \frac{858}{7}$ ச.மீ.

$= 122.57$ ச.மீ

கித்தானின் மொத்தப்பரப்பு $= 132 + 122.27$

$= 25457$

மாதிரி—2 ஓர் உலோகத்தாலான கூம்பின் ஆரம் 12 செமீ, உயரம் 24 செமீ. அதை உருக்கி 2செ.மீ ஆரமுள்ள கோளங்கள் எத்தனை செய்யலாம்?

கூம்பு உயரம் = 24செ.மீ.

ஆரம் = 12செமீ

கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 12 \times 12 \times 24 \text{ க.செ.மீ.}$$

கோளத்தின் ஆரம் = 2 செமீ

$$\text{கோளத்தின் கன அளவு} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{22}{7} \,..\, 2 \times 2 \times 2$$

$$\text{கோளங்கள் எண்ணிக்கை} = \frac{\text{கூம்பின் கன அளவு}}{\text{கோளத்தின் கன அளவு}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 12 \times 12 \times 24}{\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 12 \times 12 \times 24 \, \frac{3}{4} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= 108$$

மாதிரி— : 18செமீ ஆரமுள்ள அரைக்கோள வடிவமான கிண்ணம் நிறைய அமிலம் இருக்கிறது. இதை 6செமீ ஆரமும் 12செ.மீ உயரமும் உள்ள கூம்பு வடிவமான எத்தனைக் குடுவைகளில் நிரப்பலாம்.

அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்தின் ஆரம் 18செமீ.

$$\text{அதன் கொள்ளளவு} = \frac{2}{3} \pi 18^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 18 \times 18 \times 18 \text{ செ.மீ.}$$

கூம்பு பாகக் குடுவையின் கொள்ளளவு $= \frac{1}{3} \pi r_1^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 12 \text{ க.செ.மீ.}$$

$$\text{குடுவைகளின் எண்ணிக்கை} = \frac{\text{அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்தின் கொள்ளளவு}}{\text{கூம்புப் பாகக் குடுவையின் கொள்ளளவு}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 18 \times 18 \times 18}{\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 12}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 18 \times 18 \times 18 \times 3 \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{12}$$

$$= 27$$

மாதிரி—4: 3.5 செ.மீ. விட்டமுள்ள 12 காரீயக் குண்டுகளை உருக்கி 7 செ.மீ. விட்டமுள்ள உருளையாகச் செய்தால் உருளையின் i) உயரம் ii) மொத்தப் புறப்பரப்பு இவற்றைக் காண்க.

காரீயக்குண்டின் விட்டம் 3.5 செ.மீ. அல்லது $\frac{7}{2}$ செ.மீ.

$$\text{ஆரம்} = \frac{7}{4} \text{ செ.மீ.}$$

குண்டின் கன அளவு $= \frac{4}{3} \pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \text{ க.செ.மீ.}$$

12 குண்டுகளின் கன அளவு $= 12 \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}$ க.செ.மீ.

உருளையின் கன அளவு $= 12 \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}$

$$\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times h = 12 \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}$$

$$\therefore h = \frac{12 \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}}{\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}}$$

$= 7$ செ.மீ.

உருளையின் மொத்த மேற்பரப்பு $= 2\pi r\,(h+r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \left(7 + \frac{7}{2}\right)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{21}{2}$$

$= 231$ ச.செ.மீ.

பயிற்சி :

1. ஒரு கூடாரம் உருளையின் மீது கூம்பு அமைந்தது போல் உள்ளது அதன் விட்டம் 18மீ. அதிக உயரம் 6மீ உருளைபாகத்தின் உயரம் 2மீ கூடாரத்திற்குத் தேவையான கித்தானின் பரப்பு என்ன?

2. மரத்தால் செய்யப்பட்ட பம்பரம் 6 செமீ. விட்டமுள்ள ஒரு கூம்பின் அடிப்பரப்பின் மேல் அரைக்கோளம் கொண்டதாக உள்ளது. பம்பரத்தின் மொத்த உயரம் 7 செமீ என்றால் இதன் கன அளவு என்ன?
[94 29 6ச மீ]

3. 10செ மீ ஆரமும் 21 செ.மீ உயரமுள்ள உலோகத்தால் செய்த ஒரு கூம்பை உருக்கி, ஒவ்வொன்றும் ½ செ.மீ. விட்டமுள்ள கோளவடிவ குண்டுகள் எத்தனை செய்யலாம்? [33 600]

3. ஒரு மண்டபம் உருளை வடிவமான சுவர் மீது அரைக்கோளம் அமைந்த வடிவத்தில் இருக்கிறது அதன் உட்பகுதியின் அடிப்பக்க விட்டம் 7மீ. மிக அதிக உயரம் ½மீ. அதன் உட்புறத்தில் காரை பூச்சிக்கு ரூ2 வதம் பறும் என்ன செலவாகும் [ரூ 330]

Institute of Correspondence Course

Open University System Time : 2 hrs

Pre-foundation course Marks : 100

1. ஒரு ஆஸ்பத்திரி வார்டின் குறுக்கு வெட்டு செவ்வகத்தின் மீதமைந்த முக்கோண வடிவமுடையது செவ்வகத்தின் நீளம் 20மீ அகலம். 16மீ. குறுக்கு வெட்டு முகத்தின் மொத்த உயரம் 28மீ. வார்டின் நீளம் 10மீ என்றால், வார்டில் உள்ள காற்றின் கன அளவைக் காண்க.

2) ஒரு முக்கோணப் பட்டகத்தின் நீளம் 15 செ.மீ. முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 3செமீ. 2.4செமீ, 1.8செமீ, 18செமீ அதன் கன அளவையும் மொத்த பரப்பையும் காண்க.

3) ஒரு கால்வாயின் குறுக்கு வெட்டு முகம் மேல்பக்கம் 5மீ, அகலம் அடியில் 3மீட்டர் அகலமும் ஆழம் 2மீட்டரும் டிரபிசிய வடிவத்தில் உள்ளது. தண்ணீர் அதன் வழியே மணிக்கு எத்தனை கனமீட்டர் தண்ணீர் ஓடுகிறது எனக் காண்க.

4) ஒரு சிலிண்டரின் அடியின் பரப்பு 616ச செ.மீ அதன் உயரம் 20செ மீ அதன் வளை பரப்பை உலோகத் தகட்டால் மூடச் செமீக்கு 5 பைசா விதம் என்ன செலவாகும்? $\left(\pi = \frac{22}{7} \right)$

5) ஒரு பாத்திரத்தில் தண்ணீர் விளிம்புவரை உள்ள 7செ.மீ விட்டம் 14 செ. மீ விட்டம் உடைய இரண்டு கோளங்கள் அதனுள் அமுக்கப் பட்டால் வெளியே வழியும் தண்ணீரின் கன அளவை காண்க

6) 10செ மீ ஆரமுள்ள வட்டத்திலிருந்து 3மீ அளவுள்ள நீள் வட்டக் கோணப்படுத்தி வெட்டியெடுக்கப்பட்டு கூம்பாக அமைக்கப்படுகின்றது கூம்பின் அடிச்சுற்றளவைக் காண்க.

7) ஒரு நெற்களஞ்சியம் உருளையின் மீது கூம்பு அமைந்த வடிவத்தில் உள்ளது உட்புற ஆரம் 3.5 மீட்டர் உட்புற மொத்த உயரம் 4 மீ உருளை வடிவமான பாகத்தின் உயரம் 2 மீ களஞ்சியத்தில் நிறைய நெல் இருக்கிறது. 1 கமீ நெல்லின் விலை ரூ.750 என்றால் களஞ்சியத்திலுள்ள நெல்லின் மதிப்பைக் காண்க.

8) 10 செ.மீ ஆரம் 2.செ.மீ உயரம் உடைய ஒரு உலோ கூம்பை உருக்கி 1/2 செ.மீ விட்டமுள்ள கோளவடிவக் குண்டுகள் செய்தால் எத்தனை குண்டுகள் செய்யலாம்?